

DEVOIR BILAN DE MATHÉMATIQUES

CE : MATHS
 Niveau : TD
 Durée : 4H
 24/11/25

EXERCICE 1 (2Pts)

Réponds à chaque affirmation sur ta feuille de copie par **VRAI** si l'affirmation est vraie et par **FAUX** si elle est fausse.

1. Toute fonction continue en un point a est dérivable en a .
2. La fonction de répartition F est une application de $X(\Omega) \rightarrow [0; 1]$
3. Si f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I , alors sa bijection f^{-1} est continue et strictement croissante sur $f(I)$.
4. Soit P un polynôme de degré n alors sa dérivée successive d'ordre n est une constante non nulle.

EXERCICE 2 (2Pts)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule est correcte. Indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Enoncé	A	B	C
1	Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ on a $f'(x) =$	$\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	$x\sqrt{x^2+1}$	$\frac{-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
2	Soit g une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et g^{-1} sa bijection réciproque. Si $g(-3) = 2$ et $g'(-3) = \sqrt{3}$ alors $(g^{-1})'(2) =$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$\sqrt[3]{\sqrt{a^5b^2}} \times \sqrt[3]{\sqrt{a^2b^5}}$	$(ab)^{\frac{6}{7}}$	$(ab)^{\frac{7}{6}}$	ab
4	Soit X la variable aléatoire prenant les valeurs $\{-2; 0; 1; 2; 3\}$ la probabilité $P(X = 5) =$	0,5	1	0

EXERCICE 3 (3Pts)

Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}}$
 Détermine la limite de f si elle existe en 0 et en $+\infty$
2. Soit g la fonction de $[-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}) & ; si x \neq 0 \\ 0 & ; si x = 0 \end{cases}$
 Etudie la continuité et la dérivabilité de g en 0

3. On considère la fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{x+1}$
- Démontre que $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right], |h'(x)| \leq \frac{4}{9}$
 - Déduis-en que $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right], \left|h(x) - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{4}{9} \left|x - \frac{1}{2}\right|$

EXERCICE 4(3Pts)

A/

Dans une classe de TD, 60% des filles et 70% des garçons ont eu la moyenne en mathématiques au premier trimestre. On sait également que 65% des élèves de cette classe ont eu la moyenne en mathématiques.

On choisit au hasard un élève de cette classe et on note :

F l'évènement : " l'élève choisit est une fille "

M l'évènement : " l'élève choisit a eu la moyenne en mathématiques "

- Traduis les données en termes de probabilités.
 - Dresse l'arbre pondéré en complétant par les probabilités connues .
- Démontre que la probabilité de l'évènement F est 0,5
- On choisit un élève de cette classe qui a eu la moyenne en mathématiques. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

B/

Pour récompenser les élèves qui ont eu la moyenne en maths, le Directeur choisit au hasard 5 élèves de cette classe.

On note X la variable aléatoire qui associe le nombre le nombre d'élèves qui ont eu la moyenne en maths.

- Justifie que X suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - Détermine la loi de probabilité de X .
- Calcule la probabilité d'avoir au moins 3 élèves qui ont la moyenne en maths.
- Le Directeur choisit n élèves de cette classe ($n \in \mathbb{N}^*$)

Calcule P_n : La probabilité d'avoir au moins un élève qui a la moyenne en maths

EXERCICE 5(5Pts)

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Première partie

1.a) Calcule la limite de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifie que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$

c) Déduis-en la limite de (x) , donne une interprétation graphiquement du résultat.

2.a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

b) Etudie les variations de f dresser son tableau de variation.

3.a) Détermine l'équation de la tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.

b) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

4. Trace la courbe (\mathcal{C}) .

Deuxième partie

1. Montre que la fonction f réalise une bijection f^{-1} sur un intervalle K à déterminer.
2. Détermine le sens de variation de f^{-1} puis dresser son tableau de variation.
3. Montre que f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$.
4. Détermine l'expression de $f^{-1}(x)$.
5. Trace (\mathcal{C}') la courbe représentative de f^{-1}

EXERCICE 6(5Pts)

Une société de fabrication de produits cosmétiques fabrique chaque jour x produit avec $x \in [0; 40]$. Le coût total de productions, exprimée en milliers de francs, est donné par la fonction :

$C(x) = x^2 - 60x$. Chaque produit fabriqué est vendu au prix unitaire de 2.000F. Toute la production est vendue le même jour.

Pour plus d'efficacité, le Directeur de l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal. Il demande au comptable la quantité de produits cosmétiques que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.

L e comptable t'associe à ce projet.

En utilisant tes connaissances mathématiques détermine la quantité de produits cosmétiques à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal