Lycée de Wona | **Année scolaire 2021-2022**

Professeur : M KABRE | **Durée : 4h**

Classe : Terminale D | **Date : 04-11-2021**

Epreuve n°1 de Mathématiques

Questions de cours (5pts)

1) calculer le module de $z = (1-i)^{-2}(2-4i)^3$ **(0,5pt)**
2) déterminer puis representer l'ensemble des points $M_{(z)}$ tel que : $|z-2| = |z+2-i|$**(1pt)**
3) Calculer l'argument de $z' = 2i(1+i)^3$ **(0,5pt)**
4) donner la notation exponentielle de $z = -\sqrt{3} + i$ **(0,5pt)**
5) determiner les racines carrées de $15 - 8i$ **(1pt)**
6) soit $A(1+i)$ déterminer l'affixe du point B (z_B) l'image de A

   par la translation de vecteur $\vec{u}(-2+3i)$ **(0,5pt)**
7) soit $M(1-3i)$ déterminer l'affixe du point C (z_C) image de M

   par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ **(0,5pt)**
8) soit $L(-2+2i)$ déterminer l'affixe du point D (z_D) image de L

   par l'homothétie de centre O et de rapport 4. **(0, 5pt)**

Exercice 1 (5pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 1cm.soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ pour tout z *par* : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i+3)z - 6 + 2i$.

1) Calculer $P(-i)$; puis en déduire une factorisation de $P(z)$ **(1pt)**
2) a) résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. **(0,5pt)**

   b) soient les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 2i$ *et* $z_C = 3 - i$. Placer les points A, B et C dans le repère. **(0,5pt)**

   c) calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient. En déduire la nature du triangle ABC. **(1,5pts)**
3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   a) Calculer l'affixe du point D.**(0,5pt)**
   b) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC**. (1pt)**

Exercice 2 (6pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique :2cm

On désigne par A le point d'affixe 2, par B le point d'affixe 2i et par Ω le point d'affixe 1+i. On considère, l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de 2, associe le nombre complexe : $f(z) = \frac{iz+2}{z-2}$.

1) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$, avec x, y, X, Y réels.
   a) Exprimer X et Y en fonction de x et y. **(1pt)**
   b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que f(z) soit réel et représenter cet ensemble. **(1pt)**
2) Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$
   a) Déterminer l'affixe Z_C du point C. **(0,5pt)**
   b) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{OC}})$.en déduire que les points Ω; O et C sont alignés . **(1pt)**
3) On pose z'=f(z)
   a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer pour z' différent de i, z en fonction de z'. **(1pt)**
   b) M est le point d'affixe z (z différent de 2) et M'celui d'affixe z' (z' différent de i). Montrer que $OM = 2\frac{M'D}{M'E}$ où D et E sont les points d'affixes respectives -1 et i. **(1pt)**
   c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A, son image M'appartient à une droite fixe que l'on définira graphiquement. **(0,5pt)**

Exercice 3 (4pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application de $C \setminus \{1\}$ dans C définie par $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$

1) On pose $Z = f(z)$. Exprimer z en fonction de Z **(1pt)**
2) Soit M le point d'affixe $z(avec z \neq 1)$ et M' le point d'affixe Z Montrez que $OM = \frac{AM'}{BM'}$ ou A et B sont des points dont vous déterminerez les affixes **(1,5pts)**
3) Soit (Γ)l'ensemble des points M du plan pour les quels $|z| = 1$ et $z \neq 1$ Montrez que si M appartient à (Γ).M'appartient à une droite (D)que vous définirez géométriquement. **(1,5pts)**

Courage !