Lycée de Wona	**Année scolaire 2021-2022**
Professeur : M KABRE	**Durée : 4h**
Classe : Terminale D	**Date : 02-12-2021**

Epreuve n°2 de Mathématiques

Questions de cours (5pts)

1) Soit $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R};\quad x\mapsto f(x)=\frac{x^2+x}{x}$; Calculer la limite de f en 0 puis en déduire un prolongement par continuité **(1pt)**
2) Déterminer la primitive F de $f(x)=2+\cos(x)$ qui s'annule en π **(0,5pt)**
3) Déterminer une primitive de $f(x)=(1+tan^2x)tanx\ sur\ I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ **(0,5pt)**
4) Etudier la continuité de $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto E(x)$ en 2. **(0,5pt)**
5) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f définies par **: (1,5pts)**

a) $f(x)=\ln(5-2x)$ b) $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ c) $f(x)=\ln(4x^2-25)$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $\ln(x-4)+\ln(x-2)=\ln 3$ b) $\ln(2x^2-9x+4)=2\ln 3$.**(1pt)**

Exercice (5pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ unité graphique 1cm. On considère les points A et B d'affixes respectives :
$z_A=2+2i$; $z_B=(1+\sqrt{3})+i(3+\sqrt{3})$

1) Placer les points A et B. **(0,5pt)**
2) Ecrire le nombre complexe $Z=\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.**(1pt)**
3) a) déterminer OA et AB. Vérifier que OB$=2(1+\sqrt{3})$ **(0,75pts)**

   b°) déterminer en radian, la mesure principale de $(\vec{u};\overrightarrow{OA})$ et de $(\vec{u};\overrightarrow{OB})$ en déduire une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ **(0,75pts)**
4) en utilisant les questions précédentes , donner les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}\ et\ de\ sin\frac{\pi}{12}$. **(1pt)**
5) a) déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\alpha=2(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ **(0,5pt)**

   b) Quelle est la nature exacte du triangle OABD ? justifier **(0,5pt)**

   On donne $\sqrt{3}=1,7$

Problème (10pts)

Partie A

on considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1) déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ **(1pt)**
2) Étudier le sens de variation de g et dresser le tableau de variation de g.**(0,5pt)**
3) En déduire que pour tout $x > 0$ on a $g(x) > 0$ **(0,5pt)**

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2\ln(x)}{x}$; on considère par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité :2cm)

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ en déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale que l'on précisera l'équation. **(1,5pts)**
2) a°) calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.**(1pt)**
   b°) en déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.**(1pt)**
3) a°) montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$**.** Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D) **(1pt)**

b°) déterminer les coordonnées du point B de $(\mathcal{C})$ en lequel la tangente est parallèle à (D). **(0,5pt)**

4) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point A d'abscisse 1. Déterminer une équation de (T). **(0,5pt)**
5) a°) démontrer que f est une bijection définie de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
   b°) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ **(0,5pt)**
   c°) construire $(\mathcal{C})$ (on placera les points A et B et les tangentes à $(\mathcal{C})$ en A et en B**).(1pt)**
6) construire dans le même repère , la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction f^{-1} réciproque de f.**(0,5pt)**