Devoir n°3 de mathématiques

Exercice 1

I. Écris le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation est vraie ou de Faux si elle est fausse.

f est une fonction définie en a.

1. Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ alors f est dérivable à gauche en a.
2. Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors f n'est pas dérivable en a.
3. Si $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2$ et $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 1,999$ alors f est dérivable en a.
4. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche en a et dérivable à droite en a.

II. Pour chacun des énoncés incomplets ci-dessous, trois réponses sont proposées et une seule est juste.
Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la réponse juste.

1. La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction :
   a) $x \mapsto \cos(x^2)$ **b)** $x \mapsto 2x\cos(x^2)$ **c)** $x \mapsto -2x\cos(x^2)$
2. f étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(\cos x)$ est la fonction :
   a) $x \mapsto \sin x f'(\cos x)$ **b)** $x \mapsto -\sin x f'(\cos x)$ **c)** $x \mapsto -\sin x f'(\sin x)$
3. La dérivée sur $]1;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est la fonction .....
   a) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ **b)** $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ **c)** $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\[2ex] \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition de f et calculer les limites à ses bornes.
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition D_f.
3. Etudier la dérivabilité de f sur D_f, puis calculer les dérivées de f où elle est dérivable, puis dresser le tableau de variation de f.
4. Dans un repère orthonormé (unité 2 cm), construire la courbe C_f. On précisera les équations des asymptotes à C_f ainsi que la tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$.

5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[-1; +\infty[$.
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera les variations.

   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1; +\infty[$.

   c) Calculer $g^{-1}(1)$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

   d) Construire la courbe $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} dans le même repère que C_f.

Exerccice 3

Soit f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$

1. Etudier les variations de f.

2. Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera son ensemble de définition.

3. Etudier la dérivabilité de f^{-1} puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

4. Soit $g(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

   a) Montrer que g est une fonction constante.
   b) En déduire que $\forall x \in]-\infty; 0[, g(x) = -\frac{\pi}{2}$ et que $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) = \frac{\pi}{2}$.

Situation d'intégration

Le marché de Pouytenga fait des ventes de maïs et de haricots chaque samedi, et à chaque x heure on obtient des ventes $f(x) = -x^2 + 75x$ de maïs et $g(x) = x^2 - 6x + 50$ du haricot en centaines de FCFA. Le marché débute et ferme dès que la cloche du marché sonne 150 fois. À 7h00min cette cloche émet un son qui revient à des intervalles de temps réguliers et égaux telle que à un temps t précis (t en minutes) la cloche émet un son d'équation horaire $h(t) = \sin(\frac{3t}{2})$. Pour ne pas perdre les ventes, Karim se rend à ce marché à 7h00min pour vendre son maïs et son haricot mais il a trois préoccupations : la première est de connaitre le montant et l'heure de la vente maximale du maïs, la seconde est de connaitre le montant de la recette de haricot à son arrivée au marché (c'est-à-dire à 7h00min) et l'heure de la vente minimale du haricot, la troisième est de connaitre l'heure de fermeture du marché.

Tâches

1. Aider Karim à résoudre son premier problème.

2. Aider Karim à résoudre son deuxième problème.

3. Aider Karim à résoudre son troisième problème.