

Lycée de Wona

Année scolaire 2021-2022

Professeur : M KABRE

Durée : 4h

Classe : Terminale D

Date : 03-02-2022

Epreuve n°3 de Mathématiques

Exercice 1 (4pts)

1) On considère dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, le polynôme

$$P(z) = z^3 + (1 + 2i)z^2 - (1 - 14i)z - 13$$

- Démontrer que dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera **(0,5pt)**
- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$ **(0,5pt)**

2) Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans \mathbb{C} , définie par $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) unité graphique 2cm, on considère les points A, B, C et M d'affixes respectives $-i$; $2 - 3i$; $-3 + 2i$ et z .

- Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure **(0,5pt)**
- Montrer que les points A, B et C sont alignés **(0,5pt)**
- Donner une interprétation géométrique de $|f(z) - i|$ et $\arg [f(z) - i]$ **(0,5pt)**

3) a) déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z vérifiant :

$$|f(z) - i| = \sqrt{2} \text{ (1pt)}$$

b) déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z vérifiant :

$$\arg [f(z) - i] = \frac{\pi}{4} \text{ (0,5pt)}$$

Exercice 2 (4pts)

On définit pour tout entier naturel n , les suites (u_n) et (v_n) respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n)^2 \end{cases} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$$

- démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. **(0,75pt)**
- a) calculer v_0 **(0,25pt)**
b) démontrer que (v_n) est une suite géométrique. **(0,5pt)**
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . **(0,5pt)**
- On pose $S = \sum_{k=0}^n v_k$ et $S' = u_0 \times u_1 \dots \times u_n$
 - Calculer S en fonction de n. **(1pt)**
 - Prouver que $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} e^S$ puis exprimer S' en fonction de n. **(1pt)**

Problème (12pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)^2 e^{-x} & \text{si } x \in [0; +\infty[\\ f(x) = x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) + 4 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2cm)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire deux asymptotes à (C), on précisera les équations. **(2pts)**
- 2) a°) montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = x \ln|x-2| - x \ln|x| + 4$ **(0,5pt)**
b°) étudier la continuité de f en 0. **(0,5pt)**
c°) calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{2}{x}\right)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. **(1pt)**
d°) montrer que $\forall x \in [0; +\infty[, \frac{f(x)-f(0)}{x} = (x+4)e^{-x} + 4 \frac{e^{-x}-1}{x}$ **(0,5pt)**
e°) étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus. **(1,5pts)**
- 3) Etudier le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. **(1pt)**
- 4) a°) calculer $f'(x)$ et $f''(x)$, $\forall x \in]-\infty; 0[$. **(1pt)**
b°) déterminer le sens de variation de f' sur $]-\infty; 0[$ et dresser son tableau de variation sur $]-\infty; 0[$. **(1pt)**
c°) en déduire le signe de $f'(x)$, $\forall x \in]-\infty; 0[$. **(0,5pt)**
d°) en déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$. **(0,5pt)**
- 5) Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R} . **(1pt)**
- 6) Construire la courbe (C). **(1pt)**

$$e^{-2} \simeq 0,14$$

FIN

