Devoir n°2 de mathématiques

Exercice 1

Pour chaque affirmation, trois réponses sont proposées. Éris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

1. La forme algébrique de $\dfrac{5-2i}{4-3i}$ est :
   a) $\frac{15}{25}+\frac{3i}{25}$ **b)** $\frac{26}{25}+\frac{7i}{25}$ **c)** $\frac{26}{25}-\frac{23i}{25}$
2. Le conjugué de $\dfrac{1-z}{1-i}$ est :
   a) $\frac{1+z}{1-i}$ **b)** $\frac{1+\bar{z}}{1+i}$ **c)** $\frac{1-\bar{z}}{1+i}$
3. Le nombre complexe $\sqrt{2}-4i$ a pour partie imaginaire :
   a) $-4i$ **b)** -4 **c)** $\sqrt{2}-4$
4. L'inverse de $-4+3i$ est :
   a) $\frac{4-3i}{25}$ **b)** $\frac{-4-3i}{25}$ **c)** $\frac{-4-3i}{7}$
5. Soient les points $A(-7;5)$ et $B(0;3)$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :
   a) $7-2i$ **b)** $-2+7i$ **c)** $-7+2i$

Exercice 2

A- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-3e^{i\frac{3\pi}{8}}z+2e^{i\frac{3\pi}{4}}=0$.

1. Démontrer que l'une des racines carrées du discriminant Δ de (E) est: $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
2. (a) Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
   (b) En déduire celles de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.
3. (a) Résous alors l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
   (b) Soit A et B les points d'affixes respectives des solutions de (E) tes que $|z_B|>|z_A|$. Montrer que A est milieu de [OB].

B- On considère les nombres complexe : $z_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}+i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $z_2=\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$.

a. Ecrire sous forme algébrique z_1^2.

b. En déduire la forme trigonométrique de z_1^2.

c. Ecrire z_2 sous sa forme trigonométrique. Etablir que $z_1^2=4z_2^2$.

Exercice 3

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.

1. (a) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure.
   (b) déterminer les réels a et b tels que pour tout complexe z, on ait
   $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.
   (b) En déduire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
3. On considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et le point C d'affixe Z_C symétrique de Z_B par rapport à O.
   (a) Représenter sur un même graphique les points A, B et C.
   (b) déterminer le module et un argument du quotient $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$.
   (c) En déduire une mesure en radians de l'angle $(\vec{BA}, \vec{BC})$ et la nature du triangle ABC.

Exercice 4

I- soient les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et $z_2 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$.

1. Calculer le module et un argument de Z_2.
2. On pose $U = \frac{z_2}{z_1}$.
   (a) Ecrire U sous la forme algébrique.
   (b) Calculer le module et un argument de U.
   (c) En déduire le module et un argument de Z_1.
3. Utiliser les résultats précédents pour donner les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

II- soit z' un nombre complexe tel que $z' = \frac{z+2-i}{z-i}$.

1. On pose $z = x + iy$. Déterminer la partie réel et la partie imaginaire de z en fonction de x et y.
2. déterminer l'ensemble des point $M(z)$ tel que z' soit un réel.
3. déterminer l'ensemble des point $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.

Situation d'intégration

M. Noubissi possède trois terrains 1, 2 et 3.
Le terrain 1 a une forme telle que la représentation dans le plan complexe rapporté á un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est un polygone dont les sommets A, B et C ont pour affixes respectives $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, 2 et $-3 + i$.
Le terrain 2 a la forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est l'ensemble des point M dont l'affixe z est tel que :

$|2iz + 1 - 3i| = 10$.
Le terrain 3 a une forme telle que dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (unité graphique des axes 6cm) est l'ensemble des points M dont l'affixe z solution de l'équation $R_e(z') = 0$ où $z' = \frac{z-3+i}{z+2i}$ avec $z = x + iy$.

M. Noubissi veut clôturer chacun des trois terrains à l'aide d'un grillage vendu à 5000 Frs les 3m.

Tâches:

1. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 1 ?
2. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 2?
3. Combien va-t-il dépenser pour clôturer le terrain 3?

BONNE INSPIRATION !!!