

**DEVOIR SURVEILLÉ N°1 DU DEUXIÈME TRIMESTRE**

(Calculatrices non autorisées)

**EXERCICE 1**

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction donnée sur  $I$

(a)  $f(x) = x^2 \sin(x^3)$ ;  $I = \mathbb{R}$ .

(b)  $g(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$ ;  $I = ]-\infty; \frac{1}{2}[$

(c)  $h(x) = x\sqrt{1+x^2}$ ;  $I = \mathbb{R}$

(d)  $j(x) = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$ ;  $I = ]0; \pi[$

2.  $f$  est définie sur  $] -\infty; 0[$  par :  $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{(2x^2 - x)^2}$

(a) Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall x \in ]-\infty; 0[; f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(2x-1)^2}$ .

(b) Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $] -\infty; 0[$  qui s'annule en  $-1$ .

**EXERCICE 2**

1. On considère le polynôme défini par :  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ .

(a) Factoriser  $P(x)$  puis résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $P(x) = 0$ .

(b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$e^{3x} + 2e^{2x} - 5e^x - 6 = 0; \quad (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 - 5\ln x - 6 = 0$$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  les systèmes suivants :

(a) 
$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ \ln x - \ln 2 = \ln y \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} e^x - 2e^y = -5 \\ 3e^x + e^y = 13 \end{cases}$$

**PROBLÈME**

**PARTIE A**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| & \text{si } x < 0 \\ (2+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

2. (a) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ . Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.
- (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)]$ . Interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Étudier la continuité de  $f$  en 0.
- (b) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$
- (c) En déduire que  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 0.  $f$  est-elle dérivable en 0?
4. Calculer  $f'(x)$  pour :
  - (a)  $x \in ]0; +\infty[$ .
  - (b)  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ .
5. Étudier le signe de  $f'(x)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$  et pour  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ .
6. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
7. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]-3; -2[$ .
8. Tracer  $(C_f)$ , courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  d'unités 1cm.

On mettra en évidence l'allure de  $(C_f)$  au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

### **PARTIE B**

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]-\infty; -1[$ .

1. Montrer que  $g$  définit une bijection de  $]-\infty; -1[$  sur un intervalle  $J$  à préciser .
2. On note  $g^{-1}$  sa bijection réciproque.
  - (a) Calculer  $g(-2)$ . Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\ln 3$ .
  - (b) Calculer  $(g^{-1})'(\ln 3)$ .
  - (c) Représenter la courbe de  $g^{-1}$  dans le repère précédent.

---

**BONNE INSPIRATION!!!**