GROUPE SCOLAIRE AYEWA
Date : 18 /12/2025
Prof : Mr FOTO

MATHEMATIQUES

Année : 2025-2026
Classe : TD1
Durée : 4 H
Coefficient : 4

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou F si l'affirmation est fausse.

N	Affirmations
1	v est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle K et v^{-1} sa bijection réciproque. Si v est continue et strictement croissante sur I, alors v^{-1} est continue et strictement décroissante sur K
2	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que a<b . S'ils existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x élément de $[a;b], m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(a-b) \leq f(b)-f(a) \leq M(a-b)$.
3	La fonction $x \to \sin(x^2+\frac{\pi}{4})$ admet pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \to 2xcos\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)$.
4	Si la dérivée second f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un point d'inflexion au point $A\left(x_0; f(x_0)\right)$.

EXERCICE 2 (2 points)

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de l'une des lettres A, B, C ou D qui permet d'obtenir l'affirmation correcte.

N	Enoncés	Réponses	
1	La dérivée d'ordre trois de la fonction h définie par : $h(x) = 3\cos(2x+1)$ est :	A	$h^{(3)}(x) = -24\cos(2x+1)$
		B	$h^{(3)}(x) = 24\cos(2x+1)$
		C	$h^{(3)}(x) = -24\sin(2x+1)$
		D	$h^{(3)}(x) = 24\sin(2x+1)$
2	Soit g la fonction continue , strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et définie par :$g(x) = 2-\ln(x)$. On note g^{-1} la bijection réciproque de g. On a : $(g^{-1})'(2)$=……….	A	-2
		B	-1
		C	1
		D	2
3	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \cdots \ldots \ldots$	A	-1
		B	0
		C	1
		D	2
4	F et f sont deux fonctions continues sur un intervalles K. Si f est une primitive de F sur K alors on a :	A	$F'(x) = f(x)$
		B	$f'(x) = F(x)$
		C	$F'(x) = f'(x)$
		D	$F(x) = f(x)$

EXERCICE 3 (2,75 points)

Soit f et h deux fonctions définies respectivement sur $[1;3]$ et $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$ et $h(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 - 2$.
On désigne par (Ch) la courbe représentative de la fonction h dans un repère orthonormé (O, I, J).

1) Sachant que : $\forall\ x\ \in\ [1;3], f'(x) = \frac{6}{(x+4)^2}$, justifie que : $\forall\ x\ \in\ [1;3]$, $\frac{6}{49} \leq f'(x) \leq \frac{6}{25}$.
2) En utilisant l'inégalité des accroissements finis , déduis –en l'encadrement de $f(3)$.
3) Démontre que le point $A(2; -\frac{14}{3})$ est un point d'inflexion de (Ch).

EXERCICE 4 (3,25 points)

Soit f la fonction continue sur $]1;+\infty[$ telle que : $f(x) = \frac{x}{(x-1)^4} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. On note F une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

1. On admet que $\forall\ x\ \in\ ]1;+\infty[, \frac{x}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$.
   Détermine une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{x}{(x-1)^4}$.
2. a) Soit k la fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ et définie par : $k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
   Justifie que pour tout x élément de $]1;+\infty[, k'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
   b) Déduis-en une primitive sur $]1;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
3. Détermine une primitive F de la fonction f sur $]1;+\infty[$.

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{1+x} & ; \text{Si } x > 0 . \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. (Unité graphique : 4 cm) .

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1.a) Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
  b) Détermine le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$.
  c) Dresse le tableau de variation de g.

2.a) Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution θ dans $]0;+\infty[$.
  b) Justifie que θ appartient à l'intervalle $]0,2;0,3[$.
  c) Démontre que : $\begin{cases} \forall\ x\ \in\ ]0;\theta[, g(x) < 0 \\ \forall\ x\ \in\ ]\theta;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B

1.a) Etudie la continuité de f en O.
  b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
  c) Donne une interprétation graphique des résultats de la question 1.b).

2.a) Etudie la dérivabilité de f en O , puis interprète graphiquement ce résultat .
  b) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   Justifie que : si $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$.

3. Démontre que $f(\theta) = -\theta$.
4. Dresse le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
5. Construis la courbe (Cf).

EXERCICE 6 (5 points)

Une société de la fabrication de produits cosmétiques fabrique chaque jour x produit avec $x \epsilon [0; 40]$.
Le coût total de productions , exprimée en milliers de francs est donné par la fonction : $C(x) = x^2 - 60x$.
Chaque produit fabriqué est vendu au prix unitaire de de 2.000 F. Toute la production est vendue est le même jour. Pour plus d'efficacités, le directeur de l'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal. Il demande au comptable la quantité de produits cosmétiques que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal. Le comptable t'associe à ce projet.
A l'aide de tes connaissances mathématiques, aide le comptable à déterminer la quantité de produits cosmétiques à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.