	Année-Scolaire :2023-2024
L.D.N.Z. DE ZITENGA	**Date** : /04/2024
Prof : M.OUATTARA	**Durée** : 4h
Classe : $TleD$	**Coef** :05

COMPOSITION DU TROISIÈME TRIMESTRE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrices non autorisées)

Exercice 1 (4 pts)
Une population homogène de bactéries placée dans un milieu liquide se multiplie par division successives . On s'intéresse dans cette étude à l'évolution de la densité bactérienne en fonction du temps. Une série de 9 mesures a donné les résultats suivants :

x **(temps)**	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y **(densité)**	0,4	0,7	1,2	2	4	7	13	25	45
$z = lny$									

1. On pose $z = lny$, où lny représente le logarithme népérien de y.
   (a) Reproduire et compléter le tableau précédent par les valeurs de z. **(0.5pt)**
   (b) Construire le nuage de points représentant la série (x, z) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ (unité : 2 cm). **(1pt)**
   (c) Tracer au jugé une droite d'ajustement de z en x. **(0.5pt)**
2. (a) Calculer les coordonnées du point moyen M de la série statistique (x, z). **(0.5pt)**
   (b) Écrire une équation de la droite d'ajustement de z en x sachant qu'elle passe par le point moyen M et par le point $A(1; 0, 2)$. **(0.5pt)**
   (c) En déduire la relation entre x et y sous la forme : $y = ke^{\alpha x}$, $\{k, \alpha\} \in \mathbb{R}$. **(0.5pt)**
   (d) Quelle densité peut-on prévoir approximativement au temps $x = 7$ en utilisant le graphique ? **(0.5pt)**

N.B : Les valeurs de z seront arrondies à 10^{-1} près.
On donne : $ln2 \approx 0, 69$; $ln3 \approx 1, 1$; $ln5 \approx 1, 61$; $ln7 \approx 1, 9$; $ln10 \approx 2, 3$; $ln13 \approx 2, 6$; $e^{7,4} \approx 1635, 98$.

Exercice 2 (4 pts)
On se place dans l'espace (ε) muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On considère les points $A(1; 6; 4)$,$B(2; 5; 3)$ $C(3; 1; 1)$ et $D(8; 1; 7)$. On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées de $\vec{n}$. En déduire que les points A,B et C ne sont pas alignés **(0.5pt)**
   (b) Déterminer l'aire du triangle ABC **(0.25pt)**.
2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
   (a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC) **(0.5pt)**.
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) **(0.25pt)**.
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ). **(0.5pt)**
   (d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite Δ et du plan (ABC) **(0.25pt)**

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
   (a) On pose $\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{n}$. Calculer le nombre réel α **(0.25pt)**.
   (b)) En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre $ABCD$ **(0.75pt)**.
4. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.
   (a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants. **(0.25pt)**
   (b) Vérifier que la droite (d), intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique
   $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$ **(0.5pt)**

.

Problème (12 pts)

Partie A (3.75 pts)
Résolution de l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = xe^x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_2) : $y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. **(0.5pt)**
2. Soit a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)e^x$.
   (a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1). **(0.5pt)**
   (b) Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2). **(1.5pt)**
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1). **(0.75pt)**
3. Déterminer la solution de (E_1) qui s'annule en 0. **(0.5pt)**

.

Partie B (3 pts)
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0.5pt)**
2. Étudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation. **(1.25pt)**
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   (a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions. **(0.25pt)**
   (b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$. **(0.25pt)**
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0.75pt)**

.

Partie C (4 pts)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ **(0.5pt)**.
2. Calculer $f'x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Étudier le sens de variation de f. **(2pts)**.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est définie dans **la partie B**. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. **(0.75pt)**
4. Établir le tableau de variation de f. **(1pt)**
5. Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité graphique : $2cm$). **(0.75pt)**

.

<u>Partie D</u> (1.25 pts)

1. Soit m un réel négatif, interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. **(0.25pt)**
2. (a) Calculer $\int_m^0 xe^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties. **(0.5pt)**

   (b) En déduire $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$. **(0.25pt)**
3. Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque m tend vers $-\infty$. **(0.25pt)**

.

Prendre $\alpha = -1.5$ **et** $f(\alpha) = 0.16$

BONNE INSPIRATION ! ! !