LYCÉE DE SAPAGA | **Année-Scolaire** :2023-2024

Prof : M.TIORO | **Date** : 17/02/2024

Classe : $TleD$ | **Durée** : 4h | **Coef** :05

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 DU DEUXIÈME TRIMESTRE

(Calculatrices non autorisées)

EXERCICE 1

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $y' - 2y = 0$ b) $y' + 3y = 0$
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale donnée :
   a) (E) : $y' - 4y = 0$ et $f(0) = 3$
   b) (E) : $y' + \sqrt{2}y = 0$, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1.
   c) Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ telle que $f(\frac{\pi}{4}) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.
   d) Quelle est la solution f de l'équation différentielle $9y'' + y = 0$ sachant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 3$

.

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tcost\,\mathrm{d}t$ $\quad J = \int_0^{ln2} (x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ $\quad N = \int_1^{2} xlnx\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^3 sint\,\mathrm{d}t$

$M = \int_2^{0} x\sqrt{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 3

1. On considère la courbe (Γ) de représentation paramétrique dans le repère $(O; I; J)$:
   $$\begin{cases} x(t) = sint \\ y(t) = cos2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).
   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en $t = \frac{\pi}{4}$
2. On considère la courbe (Γ') de représentation paramétrique dans le repère $(O; I; J)$:
   $$\begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} + 1, \quad t > 0 \end{cases}$$
   (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ').
   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{u}$ en $t = 1$

.

EXERCICE 4

On définit les nombres complexes Z_n de la manière suivante :
$Z_0 = 1$ et pour tout naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$.

1. Calculer Z_1 et Z_2.
2. Pour tout naturel n , on pose $U_n = Z_n - i$
   (a) Calculer U_0 , U_1 et U_2.
   (b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (c) Montrer que pour tout n, $U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3. On pose $Z_n = X_n + iY_n$.
   (a) Exprimer X_n et Y_n en fonction de n.
   (b) Étudier la convergence des deux suites (X_n) et (Y_n) de terme général respectif X_n et Y_n ..
   (c) On admet le résultat suivant : « Si $Z_n = X_n + iY_n$ et si les suites (X_n) et (Y_n) sont convergentes , alors la suite (Z_n) est convergente et on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} Z_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} X_n + i\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} Y_n\right)$ ». Donner alors la limite de la suite (Z_n) s'il y a lieu.

BONNE INSPIRATION ! ! !