

DEVOIR SURVEILLE N°1 DE MATHÉMATIQUES DU 1^{er} TRIMESTRE

(Calculatrices non autorisées)

Exercice 1

On considère le nombre complexe α défini par $\alpha = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$.

1. Écrire α sous la forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système d'inconnues z et z' :
$$\begin{cases} z + iz' = 1 + i \\ \frac{1}{2}z + (1-i)z' = 2 - 5i \end{cases}$$

3. Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On a les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$. On considère l'application f de P privé de A dans P qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z - 3 + i}{-iz + 2}$.

a) Soit C le point d'affixe $1 - i$. Calculer l'affixe de $f(C)$.

b) Montrer que $z' = \frac{i(z - 3 + i)}{z + 2i}$.

c) Interpréter géométriquement le module et l'argument de z' .

d) En déduire :

- L'ensemble E_1 des points M tel que $z' \in \mathbb{R}^*$.
- L'ensemble E_2 des points M tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$.
- L'ensemble E_3 des points M tel que $|z'| = 1$.

Exercice 2

1. a) Déterminer le nombre complexe ω tel que : $\omega(1+i) = 1+3i$ puis calculer $i\omega^2$.

b) Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i$.

Montrer que $f(z)$ peut se mettre sous la forme $(z - \omega)(z - i\omega)$.

En déduire les solutions dans \mathbb{C} , de l'équation : $f(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique $2cm$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 2 + i$ et $b = -1 + 2i$.

a) Placer les points A et B dans le repère. La figure sera complétée au fur et à mesure.

b) vérifier que $b = ia$ et en déduire la nature exacte du triangle OAB .

c) C est le point d'affixe $c = 1 + \frac{1}{2}i$.

Déterminer l'affixe d du point D tel que le triangle OCD soit isocèle et tel que :

$$\text{mes}(\vec{OC}; \vec{OD}) = \frac{\pi}{2}.$$

d) On note J , K , L et M les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DA]$, CD et $[BC]$.

Déterminer la nature exacte du quadrilatère $JKLM$. Justifier.

Exercice 3

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité : 1cm).

1. Soit d le nombre complexe défini par : $d = \frac{3-i}{1-2i} + \frac{2+i}{i} + (3+i)(1-4i) - 14(1+i)^2$.
 - a) Écrire d sous la forme algébrique, puis déterminer ses racines carrées.
 - b) En déduire la solution dans \mathbb{C} de l'équation : $z^2 - (3+2i)z - 1 + 13i = 0$.
On notera z_1 la solution de partie réelle positive et z_2 l'autre solution.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .
 - a) Déterminer l'affixe du point C dont l'image par la translation t de vecteur \vec{w} d'affixe $4i$ est le point B .
 - b) Déterminer une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

3. M étant le point d'affixe z différent de $4-i$, on considère le nombre complexe Z défini par :
$$Z = \frac{iz + 3 + i}{z - 4 + i}.$$
 - a) Vérifier que : $Z = \frac{i(z + 1 - 3i)}{z - 4 + i}$.
 - b) Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z .
 - c) Déterminer et construire l'ensemble de points M du plan tel que Z soit de module 1.