

Lycée de Wona

Année scolaire 2021-2022

Professeur : M KABRE

Durée : 4h

Classe : Terminale D

Date : 03-03-2022

Epreuve n°4 de Mathématiques

Exercice 1 (4pts)

On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $\frac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$

- 1) Déterminer le réel a , tel que la fonction v définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de (E). **(1pt)**
- 2) Donner les solutions de l'équation (E') : $\frac{1}{2}y' + y = 0$ **(1pt)**
- 3) a) Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $u - v$ est solution de (E') **(0,5pt)** ;
b) en déduire les solutions de (E). **(0,5pt)**
- 4) déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant $h(0) = 0$ **(1pt)**

Exercice 2 (4pts)

- 1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $u = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$ sous forme algébrique **(0,5pt)**.
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$ **(0,5pt)**.
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) unité graphique 2cm
 - a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 4i$; $z_C = -\sqrt{3} + 3i$ **(0,5pt)**.
 - b) Montrer que $u = \frac{z_C - 2i}{z_B - 2i}$ **(0,5pt)**.
 - c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **(0,5pt)**
- 4) Soit f l'application de $P \setminus \{C\}$ dans P qui à tout point d'affixe $z (z \neq z_C)$ associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$ telle que $z' = f(z) = \frac{z-4i}{z+\sqrt{3}-3i}$
 - a) Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument de z' **(0,5pt)**
 - b) En déduire et construire l'ensemble (E) des points M dont l'image par f a pour affixe un nombre imaginaire pur non nul. **(0,5pt)**
 - c) En déduire et construire l'ensemble (D) des points M dont l'image par f est un élément du cercle de centre O et de rayon 1. **(0,5pt)**

On donne $\sqrt{3} = 1,7$

Problème (12pts)

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 2(x-1)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = (x-2)e^{-x+1} + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 2cm)

Partie A (6pts)

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ? **(0,75pt)**.
- 2) Etudier la continuité de f en 1. **(0,75pt)**
- 3) Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats. **(2pts)**
- 4) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **(2pts)**
- 5) Montrer que (E): $f(x) = -2$ admet une solution unique α et que $\alpha \in \left[-1; \frac{-1}{2}\right]$ **(0,5pt)**.

Partie B (2pts)

- 1) Déterminer les réels α, β et γ tels que pour tout $x < 1$, $\frac{x^2-2x}{x-1} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-1}$ **(0,5pt)**.
- 2) Par une intégration par partie, calculer l'intégrale $I = \int_0^{1-\frac{1}{e}} (x-1)\ln(1-x) dx$ **(0,5pt)**
- 3) Construire (C) et calculer en cm^2 l'aire du partie délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{e}$ **(1pt)**.

Partie C (4pts)

- 1)
 - a) Montrer que l'équation (E) équivaut à $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $\left[-1; \frac{-1}{2}\right]$ par $h(x) = 1 - e^{\frac{1}{1-x}}$ **(0,5pt)**
 - b) On pose $I = \left[-1; \frac{-1}{2}\right]$. Montrer que $\forall x \in I, h(x) \in I$ **(1pt)**.
 - c) Montrer que $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{7}{8}$ **(1pt)**.
- 2) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = h(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 - a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n, u_n \in I$ **(0,25pt)**.
 - b) En utilisant l'inégalité de la moyenne, montrer que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{7}{8}|u_n - \alpha|$. **(0,5pt)**
 - c) En déduire que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. **(0,5pt)**
 - d) En déduire que la suite est convergente et préciser sa limite. **(0,25pt)**

On donne $\frac{2}{e} \approx 0,73$; $\frac{1}{e^2} \approx 0,13$; $\ln 2 \approx 0,69$; $\ln \frac{3}{2} \approx 0,40$; $e^{\frac{2}{3}} \approx 1,947$ $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,648$

FIN