

Lycée de Wona

Année scolaire 2021-2022

Professeur : M KABRE

Durée : 4h

Classe : Terminale D

Date : 04-11-2021

Epreuve n°1 de Mathématiques

Questions de cours (5pts)

- 1) calculer le module de $z = (1 - i)^{-2}(2 - 4i)^3$ (0,5pt)
- 2) déterminer puis représenter l'ensemble des points $M_{(z)}$ tel que :
 $|z - 2| = |z + 2 - i|$ (1pt)
- 3) Calculer l'argument de $z' = 2i(1 + i)^3$ (0,5pt)
- 4) donner la notation exponentielle de $z = -\sqrt{3} + i$ (0,5pt)
- 5) déterminer les racines carrées de $15 - 8i$ (1pt)
- 6) soit $A(1 + i)$ déterminer l'affixe du point B (z_B) l'image de A
par la translation de vecteur $\vec{u}(-2 + 3i)$ (0,5pt)
- 7) soit $M(1 - 3i)$ déterminer l'affixe du point C (z_C) image de M
par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ (0,5pt)
- 8) soit $L(-2 + 2i)$ déterminer l'affixe du point D (z_D) image de L
par l'homothétie de centre O et de rapport 4. (0, 5pt)

Exercice 1 (5pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) unité graphique 1cm. soit P le polynôme défini sur \mathbb{C} pour tout z par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + (3i + 3)z - 6 + 2i$.

- 1) Calculer $P(-i)$; puis en déduire une factorisation de $P(z)$ (1pt)
- 2) a) résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$. (0,5pt)
b) soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3 - i$. Placer les points A, B et C dans le repère. (0,5pt)
c) calculer $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ puis interpréter géométriquement le module et un argument de ce quotient. En déduire la nature du triangle ABC. (1,5pts)
- 3) Soit D l'image de C par la translation de vecteur \vec{AB} .
a) Calculer l'affixe du point D. (0,5pt)
b) Donner la nature exacte du quadrilatère ABDC. (1pt)

Exercice 2 (6pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique : 2cm

On désigne par A le point d'affixe 2, par B le point d'affixe $2i$ et par Ω le point d'affixe $1+i$. On considère, l'application f qui, à tout nombre complexe z différent de 2, associe le nombre

$$\text{complexe : } f(z) = \frac{iz+2}{z-2}.$$

- 1) On pose $z = x + iy$ et $f(z) = X + iY$, avec x, y, X, Y réels.
 - a) Exprimer X et Y en fonction de x et y . **(1pt)**
 - b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit réel et représenter cet ensemble. **(1pt)**
- 2) Soit C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-3\pi}{4}$
 - a) Déterminer l'affixe Z_C du point C . **(0,5pt)**
 - b) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\widehat{O\Omega; OC})$. en déduire que les points $\Omega; O$ et C sont alignés. **(1pt)**
- 3) On pose $z' = f(z)$
 - a) Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer pour z' différent de i , z en fonction de z' . **(1pt)**
 - b) M est le point d'affixe z (z différent de 2) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).
Montrer que $OM = 2 \frac{M'D}{M'E}$ où D et E sont les points d'affixes respectives -1 et i . **(1pt)**
 - c) Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 2 privé du point A , son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira graphiquement. **(0,5pt)**

Exercice 3 (4pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soit f l'application de $C \setminus \{1\}$

dans C définie par $f(z) = \frac{2-iz}{1-z}$

- 1) On pose $Z = f(z)$. Exprimer z en fonction de Z **(1pt)**
- 2) Soit M le point d'affixe z (avec $z \neq 1$) et M' le point d'affixe Z Montrez que $OM = \frac{AM'}{BM'}$ ou A et B sont des points dont vous déterminerez les affixes **(1,5pts)**
- 3) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan pour les quels $|z|=1$ et $z \neq 1$ Montrez que si M appartient à (Γ) . M' appartient à une droite (D) que vous définirez géométriquement. **(1,5pts)**

Courage !