

17-01-26

DEVOIR DE NIVEAU DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 (2Pts)

Réponds à chaque affirmation sur ta feuille de copie par **VRAI** si l'affirmation est vraie et par **FAUX** si elle est fausse.

1. $\ln x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$
2. La fonction de répartition F est une application de $X(\Omega) \rightarrow [0; 1]$
3. Si f est continue et strictement décroissante sur un intervalle I , alors sa bijection f^{-1} est continue et strictement croissante sur $f(I)$.
4. Soit P un polynôme de degré n alors sa dérivée successive d'ordre n est une constante non nulle.

EXERCICE 2 (2Pts)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule est correcte. Indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé	A	B	C
1	Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - xe^x \ln x$ on a $f'(x) =$	$(1+x)e^x \ln x$	$-(1+x)e^x \ln x$	$(1+x) \ln x$
2	On considère l'équation (E): $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(2-x)$ L'ensemble de validité est :	$]1; 2[$	$]1; +\infty[$	$] -2; 2[$
3	Soit g une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et g^{-1} sa bijection réciproque. Si $g(-3) = 2$ et $g'(-3) = \sqrt{3}$ alors $(g^{-1})'(2) =$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
4	Une primitive de $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ est :	$\sin \sqrt{x}$	$2 \sin \sqrt{x}$	$2 \cos \sqrt{x}$

EXERCICE 3 (3Pts)

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive F sur $] -\infty; 1[$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ On pose } \frac{2x+1}{(x-1)^2}; h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et } k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

1.a) Démontre que $\forall x \in]-\infty; 1[, g(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$.

b) Déduis-en une primitive G de g sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

2.a) Calcule $K'(x)$ et vérifie que $k'(x) = h(x)$.

b) Déduis-en une primitive H de h sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

3. Déduis-en des questions précédentes, une primitive F de f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On remarquera que $f(x) = g(x) + h(x)$

EXERCICE 4 (3Pts)

Une urne contient 2 jetons blancs et n jetons noirs, indiscernables au toucher, ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$).

1. Une partie d'un jeu consiste à tirer 2 jetons de l'urne, simultanément. Pour chaque jeton blanc tiré, le joueur gagne 2 points et pour chaque jeton noir tiré, il perd un point. M. KONAN participe à une partie. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique des points obtenus par M. KONAN à l'issue d'un tirage.

a) Détermine la loi de probabilité de X .

b) Démontre que l'espérance mathématique est : $E(X) = \frac{2(-n^2+3n+4)}{(n+2)(n+1)}$

c) Détermine la valeur de n pour laquelle le jeu est équitable.

2. Pour la suite, on prendra $n = 4$.

M. KONAN joue 8 parties successives, avec remise dans l'urne des jetons tirés avant chaque nouvelle partie.

On considère que M.KONAN est gagnant à l'issue de chaque partie, lorsque le gain algébrique des points obtenus est strictement positif et qu'il est perdant dans le cas contraire.

a) Calcule la probabilité pour que M.KONAN gagne exactement 3 parties à l'issue des 8 parties.

b) Calcule la probabilité pour que M.KONAN gagne exactement 7 parties à l'issue des 8 parties

EXERCICE 5 (5pts)

PARTIE A

On considère la fonction g de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et définie par $g(x) = 1 + x(2 \ln|x| + 1)$.

1.a) Détermine l'ensemble de définition de g .

b) Détermine les limites de g en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. On admet que g est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

a) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

b) Calcule $g(-1)$

c) Démontre que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = x(x \ln|x| + 1) \text{ si } x \neq 0. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$ d'unité 5cm

1. Démontre que f est continue en 0
2. Etudie la dérivabilité de f en 0
3. Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
 - a) Démontre que $x \in \mathbb{R}^* ; f'(x) = g(x)$.
 - b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation
5. Trace (\mathcal{C})

EXERCICE 6 (5pts)

Un commerçant de meubles de luxe achète ses articles en Turquie. Lorsqu'il achète en ligne les frais de transport sont inclus dans le coût de la marchandise et le fournisseur se charge de l'expédition. Cette fois – ci, dans l'intention d'accroître ses bénéfices, il décide de faire le déplacement. Mais avant, il échange avec une société de transport IMPORT-EXPORT, il ressort de cet échange que les articles aussi fragiles que les siens ont 75% de chance de ne pas être endommagé durant le transport.

Il veut savoir la quantité minimale d'article qu'il doit acheter afin qu'il ait plus de 99%

De chance qu'au moins un article ne soit endommagé. Il te demande de l'aider.

En t'appuyant sur tes connaissances mathématiques au programme, aide-le