

CE : Maths

**DEVOIR DE NIVEAU  
DE TD**

**EXERCICE 1 (2pts)**

Réponds à chaque affirmation sur ta feuille de copie par **VRAI** si l'affirmation est vraie et par **FAUX** si elle est fausse.

1. Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle. Si  $P_B(A) = P(A)$  alors A et B sont indépendants.
2. Soit le point  $A(a; f(a))$  et  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$ . Si  $f''(a) = 0$  et  $f''$  change de signe en  $a$  alors le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion à  $(C_f)$ .
3. La fonction de répartition  $F$  est une application de  $\mathbb{R}$  vers  $[0; 1]$ .
4. Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .  
L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X sont définies par  
 $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1 - p)$  et  $\sigma(X) = \sqrt{np(p - 1)}$

**EXERCICE 2 (2Pts)**

Pour chacune des propositions suivantes, une seule est correcte. Indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Énoncé	A	B	C
1	Soit $g$ une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $g^{-1}$ sa bijection réciproque. Si $g(-3) = 2$ et $g'(-3) = \sqrt{3}$ alors $(g^{-1})'(2) =$	$\sqrt{3}$	3	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
2	Soit $f$ une fonction définie $\mathbb{R}$ et $(C)$ sa représentation graphique dans le repère $(O, I, J)$ , si l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet deux solutions qui sont 2 et -1, alors $(C)$ coupe l'axe en :	Un point A(2 ; -1)	Un point A(-1 ; 2)	Deux points A(2 ; 0) et B(-1 ; 0)
3	On considère l'équation $(E): \ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(2 - x)$ L'ensemble de validité est :	$]1 ; 2[$	$]1 ; +\infty[$	$] -2 ; 2[$
4	Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - xe^x \ln x, f(0) = 1$ . $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$	0	$+\infty$	$-\infty$

### EXERCICE 3 (3pts)

**Les questions de cet exercice sont indépendantes**

Soit  $A = (\sqrt{3} + i)^n$  où  $n$  est un nombre entier naturel

- Détermine les valeurs possibles de l'entier naturel  $n$  pour que  $A$  soit un nombre réel.
- On appelle  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 
  - Montre que  $\bar{j} = j^2$
  - Montre que  $j^{-1} = j^2$
- On pose  $P(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 - 3z + 1$ . On désigne  $\alpha$  un nombre complexe quelconque non nul.
  - Montre que  $\overline{P(\alpha)} = P(\bar{\alpha})$
  - Déduis en que si  $P(\alpha) = 0$  alors  $P(\bar{\alpha}) = 0$  et  $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$
- On considère l'équation (E) :  $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Soit  $z = a + ib$  une solution de (E).  
Démontre que  $a^2 + (b - 3)^2 = 8$

### EXERCICE 4 (4pts)

Soit  $f$  la fonction dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$  d'unité graphique 1cm.

- Calcule la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Interprète graphiquement le résultat.
  - Calcule la limite de  $f(x)$  et de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $+\infty$ . Donne une interprétation graphique des résultats.
- Démontre que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(e^x - 2)e^x$ .
  - Etudie les variations de  $f$  puis dresse son tableau de variation.
- Détermine une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C})$  au point  $A(0; 1)$ .
- On désigne par  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = e^{2x} - 4e^x + 2x + 3$ 
  - Justifie que  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 2(e^x - 1)^2$ .
  - Etudie les variations de  $h$  puis dresse son tableau de variation.

- c) Calcule  $h(0)$  puis détermine le signe de  $h(x)$  sur  $\mathbb{R}$
5. Détermine les positions relatives de  $(C)$  par rapport à  $(T)$ .
6. Trace  $(C)$  et  $(T)$ .

EXERCICE 5 (5pts)

**A, B et C sont indépendants**

**A.** pour tout  $n$  entier naturel,  $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calcule  $I_0$  et  $I_1$

2. a) Démontre que : Pour tout  $n$  entier naturel,  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

b) Calcule  $I_2$

**B.** Soit l'intégrale :  $K = \int_0^\pi e^x (\cos 2x) dx$ .

1. A l'aide de deux intégrations par parties, montre que  $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$

2. On pose  $I = \int_0^\pi e^x (\cos^2 x) dx$  et  $J = \int_0^\pi e^x (\sin^2 x) dx$

a) Calcule  $I + J$  et  $I - J$

b) En déduire les valeurs exactes de  $I$  et  $J$

**C.** Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .  $OI = 2\text{cm}$  et  $OJ = 1\text{cm}$ . On donne la fonction dérivable  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + 1 + \frac{1+\ln x}{x^2}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

1) Etudie la position de  $(C)$  par rapport à la droite  $(D): y = x + 1$

2) Calcule à l'aide d'une intégration par parties l'aire  $\mathcal{A}$  de la partie du plan limitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 1$

### EXERCICE 6 (4pts)

En vue de préparer leur prochain devoir, deux élèves d'une classe de Terminale D du lycée de Gagnoa font des recherches à la bibliothèque dudit lycée. Ils découvrent dans le livre de Mathématiques dans la collection "SPM", l'exercice suivant :

On considère le plan ( $P$ ) muni d'un repère orthogonal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  l'équation

$$(E) : z \in \mathbb{C}, z^3 - (6 + 9i)z^2 + (45i - 9)z + 54 - 54i = 0.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives tels que  $z_A$  est la solution réelle pure de (E) et  $Im(z_B) > Im(z_C)$  les autres solutions de (E).

Ces deux élèves affirment que ABC est un triangle rectangle isocèle en B.

Donne un avis sur l'affirmation de ces deux élèves.