Devoir n°3 de mathématiques

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$
2. $f(x) = \frac{4-5x}{x^2+2x-3}$
3. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$
5. $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{-x+2}$

Exercice 2

Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1. Déterminer le domaine de définition D_h de h
2. Démontrer qu'il est possible de prolonger h par continuité en $x = 0$
3. Soit g le prolongement par continuité de h en $x = 0$
   (a) Définir g.
   (b) Préciser le domaine de définition D_g de g.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{(x^2+1)} - x$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O,I,J) d'unité 2 cm et (Δ) la droite d'équation $y = -2x$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)}+x}$.
   c) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.
3. a) Montrer que pour tout réel x, $\lim_{x \to -\infty}(f(x) + 2x) = 0$.
   b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) > 0$ puis en déduire le signe de $(f(x) + 2x)$.
   c) Interpréter les résultats obtenus en 3a et 3b.

Situation d'intégration

Les élèves de Terminale s'exercent à la photographie au sein du club photo du lycée de Koupéla. On les informe qu'en photographie, la **profondeur de champ** correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'oeil considérera nette.

En optique, pour que la nettete se tende d'une distance a à une distance r, la mise au point doit être faite à la distance : $P = \frac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

Les élèves souhaitent que la netteté s'étende de ´$5m$ à l'infiniˇ.

Un élève affirme alors que : $P = 10 - \frac{50}{5+r}$. Ce qui n'est pas de l'avis des autres.

Ensemble ils décident de vérifier cette formule et de faire des calculs pour déterminer la distance de mise au point à choisir quand l'objet s'éloigne.