DEVOIR DE MATHEMATIQUES

2022/2023
Durée : 4H

SÉRIE D
Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.

EXERCICE 1

Écris le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	A et B sont des évènements d'un même univers. Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ alors les évènements A et B sont indépendants.
2	Si f une fonction continue et strictement croissante sur $[2; 3]$ telle que $f(2) = 1$ et $f(3) =5$, alors l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; 3]$.
3	h et g sont deux fonctions numériques. a, l et l' des éléments de IR∪ $\{-\infty; +\infty\}$ Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} goh(x) = l$.
4	Une expérience aléatoire où l'on s'intéresse à un évènement appelé succès et à sa non réalisation appelée échec est un schéma de Bernoulli.

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses sont données dont une seule est juste. Recopie sur ta feuille le numéro de l'affirmation suivie de la lettre correspondant à la réponse juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES A	B	C	D
1	Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; on dit que (Cf) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$	$+\infty$	0	$-\infty$	1
2	a est un nombre réel. <table><tr><td>x_i</td><td>-10</td><td>5</td><td>30</td></tr><tr><td>$P(X = x_i)$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>a</td><td>$\frac{1}{4}a$</td></tr></table> La valeur a pour que le tableau ci-dessous détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est :	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$
3	Lorsque qu'une variable aléatoire X suit une loi Binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$ donc $P(X = 1)$ est égale à :	$\frac{135}{256}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{32}{729}$
4	Soit A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. On a $P(B) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{1}{4}$

EXERCICE 3

On donne la fonction f définie sur IR $\setminus\{1\}$, par $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$.

1) Justifie que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

2a) Démontre que f admet un prolongement par continuité en 1.

b) Détermine la fonction h, prolongement par continuité de f en 1.

EXERCICE 4

On considère un dé blanc et un dé rouge, cubiques non pipés.

Le dé blanc comporte trois faces numérotées 0, trois faces numérotées 1.

Le dé rouge comporte deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés.

On note X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus sur la face supérieure des deux dés.

1- Justifie que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 3.

2- Détermine la loi de probabilité de X.

3- Justifie que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à $\frac{2}{3}$.

4- Détermine la fonction de répartition F de X.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-\infty; 3[$ par $f(x) = \frac{-x^2+x+5}{x-3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J).

1a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat.

2a) Justifie que $\forall x \in]-\infty; 3[, f(x) = -x - 2 + \frac{1}{3-x}$.

b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

c) Etudie la position relative de (C) et (D).

3) On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et strictement décroissante sur $]2; 3[$.

a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty; 2[$.

b) Sachant que $-2 < \alpha < -1$, détermine une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

EXERCICE 6

Des élèves de terminale étudient le refroidissement d'un objet porté à 210°C. L'étude du phénomène thermique conduit à $f(t) = \frac{200}{t} + 10$ où $f(t)$ désigne la température de l'objet en degrés Celsius (°C) à l'instant t (t est exprimé en minutes).

Les élèves effectuent un contrôle de la température de l'objet après chaque minute (le premier contrôle ayant lieu à l'instant $t = 1$). Ils n'arrivent pas à déterminer la température de l'objet après une très longue période de refroidissement.

En utilisant tes connaissances, détermine cette température.