DEVOIR DE NIVEAU N°2 **Coefficient: 4**
NIVEAU: Terminale D **Durée: 4 heures**

Date : 09/02/2022

MATHÉMATIQUES

CE. MATHEMATIQUE
Année-Scolaire : 2021-2022

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Réponds à chaque affirmation sur ta feuille de copie par V si l'affirmation est Vraie et par F si l'affirmation est Fausse. **Exemple : 5-F**

N°	PROPOSITIONS
1	A et B étant deux évènements indépendants d'univers Ω, on a : $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$
2	X étant une variable aléatoire prenant les valeurs X_1, $X_{2, \dots, X_n}$, avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \dots, P_n$ et E(X) étant noté m : On appelle écart-type de X le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ tel que $\sigma(X)=\sqrt{x_1^2P_1+x_2^2P_2+\cdots x_n^2P_n-m^2}$
3	Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. D'après le théorème des accroissements finis sur [a ;b], $\lvert \sin b-\sin a\rvert \leq \lvert b-a\rvert$
4	Les primitives de la fonction $x\to\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2x^3}$ sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions de la forme : $x\to-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^3}+c\ (c\in\mathbb{R})$.

EXERCICE 2 (2 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Écris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse. **Exemple : 5-D**

<table>
<tr><th>N°</th><th>ÉNONCES</th><th colspan="2">Réponses</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ alors</td><td>A</td><td>(C_f) admet une demi-tangente horizontale</td></tr>
<tr><td>B</td><td>(C_f) admet une asymptote en $+\infty$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>(C_f) admet une demi-tangente verticale</td></tr>
<tr><td>D</td><td>(C_f) admet deux demi-tangentes verticales</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4"><table><tr><td></td><td>Fait la maladie</td><td>Ne fait pas la maladie</td></tr><tr><td>Vacciné</td><td>15</td><td>25</td></tr><tr><td>Non vacciné</td><td>18</td><td>12</td></tr></table>Ce tableau les résultats d'une enquête effectuée dans une population de 70 personnes. On choisit au hasard un individu. La probabilité que cet individu fasse la maladie sachant qu'il est vacciné est</td><td>A</td><td>$\frac{15}{70}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\frac{15}{33}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\frac{15}{40}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\frac{33}{40}$</td></tr>
</table>

JE SUIS JEUNE, JE VEUX ET JE PEUX REUSSIR, JE REFUSE DONC DE TRICHER

3	$a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}}$ est égal à	A	$a^5 b^5$
		B	ab
		C	$a^{12} b^{11}$
		D	$a^4 b^3$
4	Le système d'équation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} 5\ln x + 2\ln y = 8 \\ 4\ln x - 3\ln y = 11 \end{cases}$ a pour soluition	A	$\left(\mathrm{e}^2; \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$
		B	$\left(\frac{1}{\mathrm{e}}; \mathrm{e}^2\right)$
		C	$(e^{-2}; e^{-1})$
		D	$(e^1; e^{-1})$

EXERCICE 3 (3 points)

On donne les fonctions f, g *et* F *definies sur* $\mathbb{R}$ *par*: $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$, $g(x) = cos^4(x)$ et $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

1. Justifie que $Cos^4(x) = \frac{1}{8}[3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)]$.
2. Déduis-en les primitives de g sur $\mathbb{R}$.
3. a) Démontre que F est une primitive de sur $\mathbb{R}$.
   b) Détermine la primitive F_0 de f qui s'annule en 0.

EXERCICE 4 (3,5 points)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur H1, 25% de l'horticulteur H2 et le reste de l'horticulteur H3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus.
La livraison de l'horticulteur H1 comporte 80% de conifères, alors que celle de l'horticulteur H2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre dans son stock. On considère les événements suivants :
   - H1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H1 »;
   - H2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H2»;
   - H3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H3 » ;
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »;
   - F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

   a) Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
   b) Calcule la probabilité pour que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H3.
   c) Justifie que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.
   d) L'arbre choisi est un conifère. Détermine la probabilité qu'il l'ait acheté chez l'horticulteur H1 **(on arrondira le résultat à 10^{-3} près).**

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
   a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.
   b) Calcule la probabilité pour que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères. On arrondira le résultat à l'ordre 3.

EXERCICE 5 (4,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par :$g(x) = -1 + x\ln x \; si \; x > 0 \; et \quad g(0) = -1$.
1-a) Justifier que g est continue en 0.
1-b) Justifier que g n'est pas dérivable en 0.
2-a) Calculer $g'(x), pour\ x \in]0;+\infty[$.
2-b) démontrer que g est strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{1}{e}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.
c) Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, dresser le tableau de variation de g.
3-a) Démontrer que l'équation : $x \in]0\,;+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α.
b) Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[par\ f(x) = 1 - x + (x-1)\ln x$. On note (($C$) la courbe représentative de f.
1-a) Calculer la limite de f en 0. Interpréter les résultats.
b) Calculer les limites en $+\infty$,de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.
2-a) Démontrer que :$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
2-b) Déterminer le sens de variation de f.
2-c) Justifier que : $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$
2-d) Dresser le tableau de variation de f.
3-a) Déterminer que la droite (T) d'équation $y = -x + 1$ est la tangente à (C) en son point d'abscisse 1.
3-b) Justifier que (C) est au-dessus de (T) sur $]0;+\infty[$.
4-on donne :$\alpha = 1{,}7\ et\ f(\alpha) = -0{,}3$. Tracer (T) et (C).
5- Soit h la restriction de f à l'intervalle $[2;+\infty[$.
5-a) Justifier que h est une bijection de $[2;+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
5-b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}.
5-c) Tracer (H) la courbe représentative de h^{-1} dans le repère (O, I, J).
5-d) Vérifier que $h(e) = 0$. Justifier que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$.

EXERCICE 6 (5 points)

Une usine fabrique et commercialise des sachets de poudre de cacao. Sa capacité journalière de production est comprise entre 1 000 et 3 000 sachets. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 3] par la fonction B définie par :
$B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 + 2\ln x$.
Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
Détermine le nombre de sachets de poudre de cacao à produire pour obtenir un bénéfice maximal.