

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes , réponds par VRAI si l'affirmation est juste ou par FAUX si l'affirmation est fausse.

1. A est un évènement de Ω et \bar{A} l'évènement contraire de A on a : $P(\bar{A}) = 1 + P(A)$
2. La fonction $X \rightarrow \sin(x^2 + \frac{\pi}{4})$ admet pour dérivée sur \mathbb{R} la fonction $X \rightarrow 2x \cos(x^2 + \frac{\pi}{4})$
3. L'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, \ln x - 1 \leq 0$ a pour ensemble solution] 0 ; e [
4. Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle K. a et b sont deux éléments de K tels que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que $\forall x \in [a ; b], m \leq f'(x) \leq M$ alors , $m(a - b) \leq f(b) - f(a) \leq M(a - b)$
5. Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

X_i	-10	0	10
P_i	0,2	0,3	0,5

L'espérance mathématique de cette variable aléatoire X est 3

6. Si A et B sont deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,75$ et $P(B) = 0,2$ alors $P(A \cup B) = 0,8$

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations du tableau ci-dessous une seule réponse est juste. Recopie sur ta feuille de copie le numéro de la ligne du tableau suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

	Affirmations	A	B	C
1	Si A et B sont deux évènements indépendants de probabilités non nulles, alors	$A \cap B = \emptyset$	$P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$	$\frac{P(B/A)}{P(B)}$
2	Une primitive F sur]1 ; +∞[de la fonction f telle que $f(x) = \ln x$ est définie par :	$F(x) = x \ln x - x$	$F(x) = x \ln x + x$	$F(x) = \ln x - 1$
3	la solution de l'équation $x \in \mathbb{R}, e^{2x} - e = 0$ est	e	\sqrt{e}	$\frac{1}{2}$
4	Log(10) est égal à	1	e	10

EXERCICE 3

Jean-Louis Gasset , le sélectionneur des éléphants de Côte d'Ivoire a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs lors de la préparation de la Coupe d'Afrique des Nations CAN 2023 en Côte d'Ivoire . Il a alors remarqué que sur une série de cinq tirs au but , un joueur pris au hasard dans son équipe, marque

- * 5 buts avec une probabilité de 0,2
- * 4 buts avec une probabilité de 0,5
- * 3 buts avec une probabilité de 0,3

Chaque joueur à l'entraînement , tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendantes .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs au but réussis par un joueur au cours d'un entraînement

1. a) Calcule la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au but lors d'un entraînement
- b) Détermine les valeurs prises par X
- c) Etablis la loi de probabilité de X
- d) Calcule l'espérance mathématique de X
2. Jean-Louis Gasset considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$.

Montre que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entraînement est égale 0,61.

3. Chaque joueur participe à 10 séances d'entraînement. On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres. On appelle Y la variable égale au nombre de succès d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours de ses 10 entraînements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.

Les résultats seront donnés par défaut au millième.

- a) Calcule la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.
 - b) La probabilité d'avoir exactement 6 succès
 - c) La probabilité d'avoir au moins 1 succès
 4. Calcule le nombre minimal d'entraînements auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99
- exercice

EXERCICE 4

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases} \text{ et } V_n =$$

$\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$

1. calcule V_0
2. démontre que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
3. Exprime (V_n) en fonction de n
4. Calcule la limite de (V_n)
5. Exprime U_n en fonction de V_n et déduis-en la limite de (U_n)
6. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$
- a) Démontre que : $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$.
- b) Justifie que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$
- c) Exprime T_n en fonction de n

EXERCICE 4 **

Soit a un nombre réel donné.

On considère les suites (U) et (V) définies respectivement par :

- $U_0 = 3$, $U_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1} - U_n$

- On pose : $a = 1$.
 - Démontre que la suite (V) est constante et donne sa valeur.
 - Déduis-en que (U) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
 - On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
Exprime U_n puis S_n en fonction de n .
- On pose : $a = -5$.
 - Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .
 - Exprime V_n en fonction de n .
 - Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n
où : $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$
 - Exprime U_n en fonction de T_n .
 - Déduis-en que la suite (U) est divergente.

EXERCICE 5

Partie A

Soit la fonction g définie sur $] -\infty ; 1[$ par : $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x)$

- Calcule $g(0)$.
- On admet que g est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et on note g' sa fonction dérivée.
 - Calcule $g'(x)$ pour tout x élément de $] -\infty ; 1[$.
 - Détermine, suivant les valeurs de x , le signe de $g'(x)$.
 - Dresse le tableau de variation de g .
- Déduis du tableau de variation de g que : $\forall x \in] -\infty ; 0[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in] 0 ; 1[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 1[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) .

Unité 2 cm.

- Calcule la limite de f à gauche en 1.
 - En déduis que (C_f) admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.
- Justifie que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C_f) en $-\infty$.
- Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (D) .
- On admet que f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - Justifie que : $\forall x \in] -\infty ; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$.

- b. Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresse le tableau de variation de f .
6. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$.
- a. Démontre que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur l'intervalle K que l'on précisera.
- b. Démontre que l'équation $(E) : x \in]-\infty; 1[, f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que $-1,37 < \alpha_1 < -1,36$ et $0,51 < \alpha_2 < 0,52$.
- c. Vérifie que si un nombre réel α est une solution de l'équation (E) alors on a : $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$.
- d. On désigne par (C') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère (O, I, J) .
- Construis (C) et (C') . (*On utilisera deux couleurs différentes*).

EXERCICE 6

Une entreprise propose, pour recruter un employé sur 10 ans, deux types de rémunérations. Le contrat 1 prévoit un salaire annuel de 3 800 000 FCFA avec une augmentation salariale fixe de 100 000 FCFA par an.

Quant au contrat 2, il prévoit un salaire annuel de 3 000 000 FCFA avec une augmentation salariale de 10% par an. Ton ami, nouvel employé dans cette entreprise te sollicite pour déterminer le contrat le plus avantageux sur les 10 ans afin de clore la signature de son contrat. Détermine à l'aide d'un raisonnement rigoureux, basé sur tes connaissances mathématiques, le contrat le plus avantageux.