COLLEGE LES GRACES	DEVOIR DE NIVEAU MATHEMATIQUES	Année Scolaire : 2022-2023
DATE :23 FEVRIER 2023	Tle D	Durée : **4heure**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chaque affirmation, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est exacte. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'affirmation suivie de la lettre de la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1.	$\ln e^{\ln 4} =$	A	$2\ln 4$
		B	$2\ln 2$
		C	$e^{\ln 4}$
		D	4
2.	Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = xe^{-x^2}$. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g'(x) =$	A	$(1-2x)e^{-x^2}$
		B	$(1-x)e^{-x^2}$
		C	$-2xe^{-x^2}$
		D	$2xe^{-x^2}$
3.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto xe^{x^2}$ est :	A	$\frac{1}{2}e^{x^2}$
		B	e^{x^2}
		C	$2e^{x^2}$
		D	$\frac{1}{2}+e^{x^2}$
4.	Une solution de l'inéquation :$2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0$ est :	A	e^2
		B	$\ln 2$
		C	0
		D	2

EXERCICE 2 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $a \in \mathbb{R}$et $b \in \mathbb{R}$, $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 - b^2}$
2	Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k2\pi$avec $k \in \mathbb{Z}$.

3	**Si des arguments de deux nombres complexes non nuls sont égaux alors ces deux nombres complexe sont égaux.**
4	$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{5}}}{e^{i\frac{2\pi}{5}} \times e^{-i\frac{4\pi}{5}}} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$

EXERCICE 3 (3points)

En vue d'une bonne organisation de la coupe d'Afrique des nations de football 2023 en Côte d'ivoire, une entreprise de fabrique de ballon en caoutchouc vérifie la qualité de sa production avant la commercialisation.

Chaque ballon produit par l'usine est soumis à deux contrôles :

D'une part, l'aspect du ballon est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition. D'autre part, sa solidité est testée. Il s'avère que :

- **92% sont sans défaut de finition.**
- **Parmi les ballons qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité.**
- **2% des ballons ne satisfont à aucun des deux contrôles.**

On choisit au hasard un ballon parmi les seaux produits. On considère les événements suivants :

A : « le ballon choisi est sans défaut de finition ».

B : « le ballon réussit le test de solidité ».

1. a. Donner la valeur de chacune des probabilités suivantes : P(A) ; P_A(B) et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

b. Calcule $P(\overline{A})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B})$

c. Justifie que la probabilité $P_{\overline{A}}(B) = \frac{3}{4}$.

2. a. Construis un arbre de probabilité.

b. Démontre que P(B) = 0,934.

c. Un ballon a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

3. On prélève au hasard 4 ballons dans la production de l'usine. Les contrôles des 4 ballons sont indépendants les uns des autres et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de ballon de ce lot subissant avec succès le test de solidité.

a. Détermine les valeurs prises par X.

b. Calcule $(0 < X \leq 2)$ et déterminer la loi de probabilité de X. (Arrondi d'ordre 3 des résultats).

c. Calcule l'espérance mathématique E(X) et la variance de X.

4. Soit n un nombre entier naturel.

On décide de choisir au hasard n ballons dans la production de l'usine et on s'intéresse au nombre de ballon du lot ayant réussi le test de solidité.

a. Démontre que la probabilité Pn qu'au moins un ballon réussisse le test de solidité est

b. Pn = 1 − (0,066).

c. Détermine la valeur minimale de l'entier n pour que Pn soit supérieure à 99%.

EXERCICE 4 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1) Démontre que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on précisera.

2) Détermine les nombres complexes a et b tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $4+i$, $4-i$ et $-i$.

a) Placer ces points dans le repère $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$

b) Ω est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe du point S tel que ΩAS soit un triangle isocèle et rectangle en Ω de sens direct.

c) Démontre que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 5 (5 points)

PARTIE A

On considère la fonction g de$\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - x - 2e^{-x}$.
Etudier les variations de g (on ne demande pas de calculer les limites).
a) Calcule g (ln2).
b) En déduire que pour tout réel x ; $g(x) < 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle $f(x) = e^{-x}(x + e^{-x})$ $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$
On appelle(C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O ; I ; J). Unité graphique 2cm.

1- a) Calcule la limite de f en$+\infty$.
b) Interpréter graphiquement le résultat.

2- a) Montrer que $f(x) = e^{-2x}(xe^{x} + 1)$.
Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
b) Démontrer que pour tout x$\in\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

5- a) Justifier que f est une bijection puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.

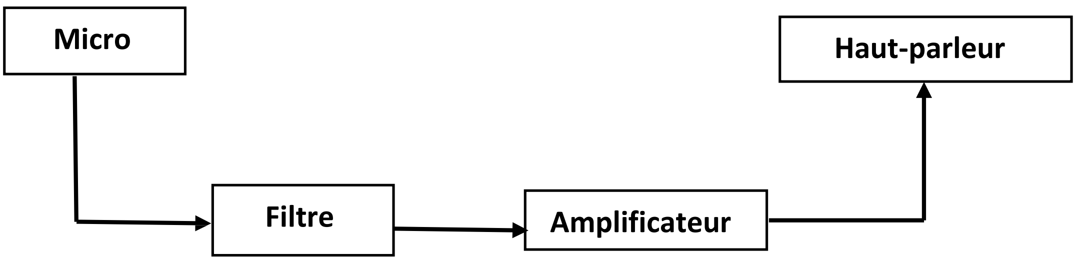
b) Calcule $f(0)$

c) Calcule $(f^{-1})'(1)$.

d) Tracer (T) ; (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

EXERCICE 6 (5points)

A l'approche des fêtes de paques, un responsable d'une structure de sonorisation, se rend en ville avec son fils pour acheter des microphones, des filtres, des amplificateurs et des haut- parleurs. Les résistances et les condensateurs sont des composants électriques utilisés dans le domaine du son pour concevoir des filtres. Placé en sortie d'un microphone, un filtre atténue plus ou moins les sons selon leur fréquence f, exprimée en Hertz (Hz).



Dans le magasin où rentre le responsable de sonorisation, on peut lire comme indicatif sur le filtre :

- Son grave de fréquence f = 100 ; Z_R = 10.
- Son aigu de fréquence f = 1000 ; Z_R = 10

Pour un filtre donné, l'atténuation d'un son se calcule à l'aide des deux nombres complexes Z_R et Z_C tel que $Z_C = -\frac{1000\sqrt{3}}{f}i$. Le gain du filtre est donner par le nombre complexe ZG définie par ZG $=\frac{ZC}{ZR+ZC}$. La valeur de ZG exacte du gain du filtre est déterminée par le module du nom complexe ZG. Un filtre est en bonne état lorsque le gain du filtre d'un son grave est supérieur d'un son aigu. Le responsable veut acheter un filtre de bonne qualité. Pour cela, il décide de tester le filtre mais malheureusement y'a coupure de coupure de courant, ce dernier te rencontre et sollicite ton aide. A l'aide de tes connaissances mathématiques réponds a la préoccupation du Monsieur