

**DEVOIR DE NIVEAU TERMINALE**

SERIE : D

**EXERCICE 1 : ( 2 points)**

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de vrai (V) ou faux (F). Exemple : 5–F

N°	AFFIRMATIONS
1	$x$ est un nombre réel. $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = 1$
2	$a$ et $b$ sont deux nombres réels positifs. $e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = a + b$
3	$f$ et $g$ sont deux fonctions telles que $\forall x \in [0; +\infty[$ , $f(x) \geq g(x)$ . Si $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$
4	Si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,5$ et $P(B) = 0,2$ alors $P(A \cup B) = 0,6$ .
5	La fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ admet un prolongement par continuité en 1.

**EXERCICE 2 : ( 2 points)**

Pour chacune des propositions suivantes indique le numéro suivi de la lettre qui correspond à la bonne réponse. Exemple : 5–C.

N°	ENONCES	A	B	C
1	$X$ est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p = \frac{1}{3}$ . alors la variance $v(X)$ est égale à :	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{9}$
2	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}$ est égale à	$+\infty$	0	1
3	Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne $A(1+i)$ et $B(-2i)$ . L'ensemble des points $M(Z)$ tels que $ Z - 1 - i  =  Z + 2i $ est	Le cercle de diamètre $[AB]$	Le cercle de diamètre $AB$	La médiatrice du segment $[AB]$
4	Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$ est la fonction :	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto -x + x \ln x$
5	La fonction $x \mapsto e^x$ est définie sur	Décroissante sur $\mathbb{R}$	Constante sur $\mathbb{R}$	Croissante sur $\mathbb{R}$

**EXERCICE 3: ( 3 points)**

- Écris le nombre complexe  $Z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$  sous forme algébrique.
- On pose  $Z_1 = -1 + i$  et  $Z_2 = \sqrt{3} - i$ 
  - Écris chacun des nombres complexes  $Z_1$  et  $Z_2$  sous forme trigonométrique.
  - Déduis-en le module et un argument de  $Z$ .
- Écris alors  $Z$  sous forme trigonométrique.
- Déduis des questions précédentes les valeurs exactes de  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$ .

#### EXERCICE 4 : (2,5 points)

A l'occasion de la kermesse d'un lycée, le Jeu suivant est proposé aux participants : on dispose d'une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 2000F chacun, les autres ne rapportent rien.

Pour participer à ce jeu, le joueur doit miser la somme de 500F puis il tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne : il reçoit alors 2000F par jeton gagnant tiré. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note  $X$  la variable aléatoire associant le gain algébrique (la différence entre la somme rapportée par les deux jetons tirés et les 500F de la mise).

1-a) Justifie que les valeurs prises par  $X$  sont : - 500F ; 1500F et 3500F.

b) Établis la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

(Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles)

2-a) Justifie que l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  est telle que  $E(X) = -100$ .

b) Ton ami qui veut participer à ce jeu, vient te consulter. Le jeu lui est-il favorable ? Justifie.

#### EXERCICE 5 : ( 5,5 points)

##### Partie A

On considère la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x - 3 + \ln x$

1) Calcule les limites de  $g(x)$  en 0 et en  $+\infty$ .

2) Étudie les variations de  $g$  puis dresse son tableau de variation.

4) Justifie que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

5) Justifie que  $2,20 < \alpha < 2,21$ .

6) Justifie que  $\forall x \in ]0 ; \alpha[ , g(x) < 0$  et que  $\forall x \in ]\alpha ; +\infty[ , g(x) > 0$ .

##### Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . L'unité graphique est le centimètre.

1) a- Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interprète graphiquement les résultats.

b- Calcule la limite de  $f(x)$  en 0 à droite et interprète graphiquement le résultat.

2) a- Démontre que  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b- Étudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.

3) Calcule  $f(1)$  et  $f(e^2)$  et déduis-en les coordonnées des points d'intersection de  $(C)$  et l'axe  $(OI)$ .

4) Trace la courbe  $(C)$ . (On prendra  $\alpha \approx 2,2$  et  $f(\alpha) \approx -0,66$ )

#### EXERCICE 6 : (5 points)

Lors d'une expérience pendant le cours de chimie dans une classe de TD d'un lycée, un gaz se répand accidentellement dans le laboratoire. L'évolution du taux de gaz dans l'air peut se modéliser par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 5]$  par  $f(x) = (x - 2)e^{-x}$  où  $x$  est le nombre de minutes écoulées depuis le début de l'incident et  $f(x)$  est le taux du gaz dans l'air exprimé en ppm (parties pour millions).

Le gaz a un effet irritant pour la gorge 3 minutes après que son taux ait atteint sa valeur maximale dans le laboratoire.

Les élèves n'ont pu évacuer le laboratoire avant les 5 minutes qui suivent le début de l'incident.

Inquiet, le chef de l'établissement veut urgemment savoir si les élèves ont été affectés par le gaz et sollicite le meilleur élève de ta classe que tu es, pour obtenir une réponse.

A l'aide de tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef de l'établissement.