

DEVOIR N°1 DU PREMIER SEMESTRE

(DUREE : 04 HEURES)

Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

Echauffement : (36 mns ≈ 03 pts)

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur I .
 - a. $f(x) = (6x - 3)(4x^2 - 4x + 2)^3$; $I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
 - b. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{3 + \cos x}}$; $I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
 - c. $f(x) = 2\cos 3x - 3\sin 2x$; $I = \mathbb{R}$ **(0,5pt)**
 - d. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sin x \sin 2x$; $I =]-\infty; -1[$ **(0,5pt)**
2. Soit h la définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $k(x) = \frac{3x-2}{(x+2)^3}$.
 - a. Déterminer les a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2\}, k(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)^3}$. **(0,5pt)**
 - b. En déduire la primitive K de k qui prend la valeur 2 en -3 . **(0,5pt)**

Exercice n°1 : (60 mns ≈ 05 pts)

On note (P) le plan complexe et $A(-3)$ et $B(2i)$ deux points du plan (P) .

Soit f l'application de $(P) - \{A\}$ dans (P) qui à tout $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1cm. On considère le nombre complexe : $z' = \frac{z+3}{iz+2}$.

On pose $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$.

1. Déterminer le point Q dont l'image par f est le point Q' d'affixe $1 + i$. **(0,5pt)**
2. Exprimer x' et y' en fonction de x et y . **(01pt)**
3. Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :
 - a. $(E): Z \in \mathbb{R}$. **(0,75pt)**
 - b. $(F): Z \in i\mathbb{R}^*$. **(0,75pt)**
4. a. Interpréter géométriquement le module de z' . **(0,75pt)**
 b. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
 - i. $(I): |Z| = 1$. **(0,5pt)**
 - ii. $(K): |Z| = 2$. **(0,75pt)**

Problème : (144 mns ≈ 12 pts)

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm f avec

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} ; & \text{si } x \leq 0 \\ x + \sqrt{x^2 + x} ; & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = -x^3 + 3x - 4$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variations. **(0, 75pt)**
2. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. **(0, 5pt)**
 b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} . **(0, 5pt)**
3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]-\infty; 0]$. **(0, 25pt)**

Partie B : Etude de la fonction f :

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f . **(0, 5pt)**
2. a. Calculer les limites de f aux bornes de Df et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera. **(01pt)**
 b. Pour $x \leq 0$, déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}$ et en déduire la nature de la branche infinie en $-\infty$. **(0, 75pt)**
 c. Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$. **(0, 5pt)**
3. a. Montrer que f est continue sur Df . **(0, 75pt)**
 b. Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter le résultat obtenu. **(01pt)**
4. Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 2$. **(0, 5pt)**
5. a. Montrer que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[; f'(x) = \frac{-xg(x)}{(x^2-1)^2}$. **(0, 5pt)**
 b. Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et étudier son signe. **(0, 75pt)**
 c. Dresser le tableau de variation de f sur Df . **(0, 75pt)**
6. Construire soigneusement la courbe (Cf) . **(01pt)**

Partie C : Bijection

Soit h la restriction de f sur $I =]0; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser. **(0, 5pt)**
2. Calculer $h(1)$ et $(h^{-1})'(\sqrt{2} + 1)$. **(0, 5pt)**
3. Expliciter $h^{-1}(x)$. **(0, 5pt)**
4. Construire (Ch^{-1}) dans le repère précédent. **(0, 5pt)**

IL EST MAINTENANT GRAND TEMPS DE SE METTRE AU TRAVAIL !!!