Mr DJABABONI N. Espoir
Professeur de Mathématiques
Contacts :
+228 90 68 45 14
+228 99 83 47 30

Mathématiques

Terminale D

Flash N° 1

Année scolaire 2026-2027
Date : 20 octobre 2026

Exercice n° 1 : *Situation-problème : évaluation des compétences*

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes. Dans le souci de pouvoir estimer la population de cette race de singes, un spécialiste modélise le nombre de singes, en milliers d'individus, par la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, avec f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+3} - x + 1$. Il désigne par I l'intervalle $[1\,;2]$.

Pour leur exposé de SVT, un groupe d'élèves de Terminale D est parti faire une recherche dans cette réserve naturelle. Impressionnés par le modèle utilisé pour estimer la population de singes dans la réserve, ces élèves tentent de déterminer, à deux unités près, la valeur maximale en milliers de singes que comptera celle-ci à très long terme. Ne parvenant pas à le faire, ils te sollicitent.

Étant élève en classe de Terminale D, en basant ton raisonnement sur des arguments solides :

Consigne 1

Justifie que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans I et que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$ et $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Consigne 2

Démontre que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$ et que $|U_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, puis déduis-en, à deux unités près, le nombre maximal de milliers de singes qu'on aura à très long terme dans cette réserve naturelle.

Exercice n° 2 : *Questions objectives*

I) *Choisir la bonne réponse.*

1. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-x-2}+x$ admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente :
a) verticale dirigée vers le bas b) horizontale c) verticale dirigée vers le haut.

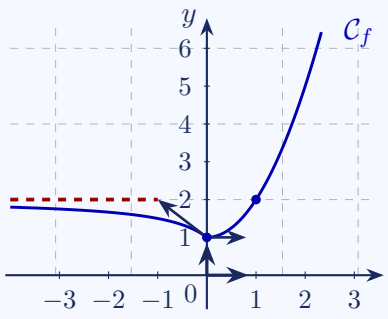
2. Si (U_n) est décroissante et minorée alors :
a) elle diverge vers $-\infty$ b) elle converge c) elle est constante d) aucune bonne réponse.

3. Soit l'application $h : \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \to \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $h(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$. Elle est une bijection donc admet une bijection réciproque h^{-1} dérivable sur :
a) $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ b) $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right[$ c) $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ d) aucune bonne réponse.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. L'équation $f(x) = 0, \forall x \in [0\,;2]$:
a) n'admet pas de solution b) admet une unique solution c) admet deux solutions.

II) Dans la figure ci-contre, on donne $(\mathcal{C}_f)$ la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au point $A(0\,;1)$ une tangente horizontale.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
- La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).



En utilisant les données et le graphique, compléter les pointillés suivants.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ **... 1 ...** $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ **... 2 ...** $\qquad f'_g(0) =$ **... 3 ...**

Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0\,;+\infty[$. g étant continue et strictement **... 4 ...**, alors elle réalise une bijection **... 5 ...** notée g^{-1} de l'intervalle **... 6 ...** vers **... 7 ...**. Sachant que $g'(1) = 2$, alors $(g^{-1})'(2) =$ **... 8 ...**.

III) *Relie par une flèche, si possible, chaque élément de la colonne A à sa réponse.*

A	B
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$	0
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$	$\dfrac{1}{4}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1}+4x\right)$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$	$\dfrac{1}{2}$
	2
	$-\infty$

Exercice n° 3 : *Problème*

I) Partie A

1) Montrer que pour tout réel x on a $\sqrt{x^2+3} > |x|$.
2) En déduire le signe de $\sqrt{x^2+3}+x$ et de $\sqrt{x^2+3}-x$ sur $\mathbb{R}$.

II) Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$. On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
2. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition puis dresser le tableau de variation de f.
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;1]$.
   a. Montrer que g admet une bijection réciproque notée g^{-1}.
   b. Construire dans un même repère les courbes $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f et $(\mathcal{C}')$ celle de g^{-1}.
4. On désigne par I l'intervalle $[1\,;2]$ et par α l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans I. On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a. Démontrer que pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in I$.
   b. Démontrer que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   c. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in I$.
   d. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
   e. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, puis déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.