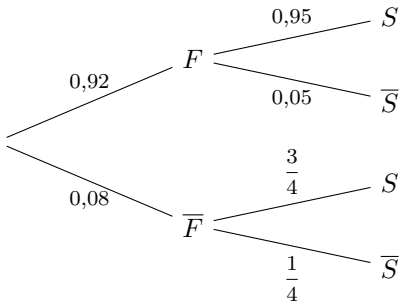
BILAN DE FIN DE TRIMESTRE
SESSION : NOVEMBRE 2026
Date : 18/11/2026

Coefficient : 2
Durée : 4H

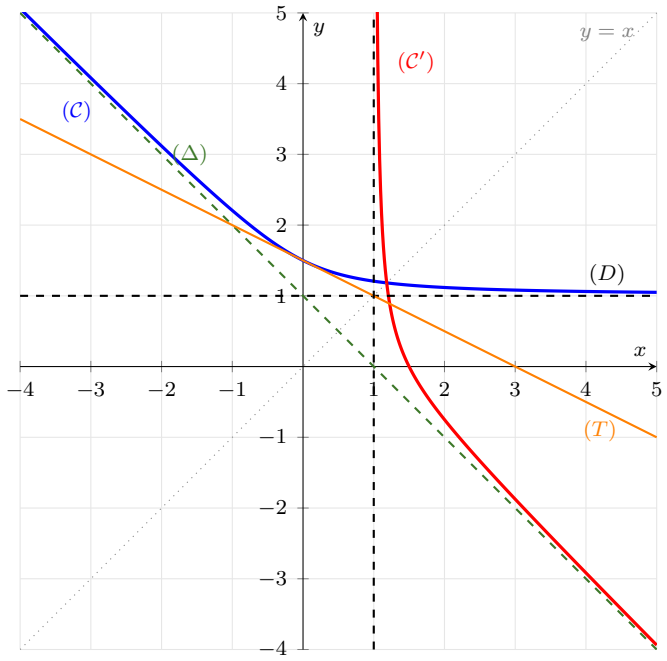
CORRIGÉ ET BARÈME
DEVOIR BILAN DE MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Exercice	Corrigé	Barème
Exercice 1 (2 pts)	**1** F, **2** V, **3** V, **4** F	$0{,}5 \times 4$ = **2**
Exercice 2 (2 pts)	**1** b, **2** a, **3** a, **4** c	$0{,}5 \times 4$ = **2**
Exercice 3 (4 pts) 1.a)	$P(F) = 0{,}92$; $P_F(S) = 0{,}95$; $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0{,}02$.	$0{,}25 \times 3$
1.b)	$P(\overline{F}) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$. $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{P(\overline{F} \cap \overline{S})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0{,}02}{0{,}08} = \dfrac{1}{4}$.	0,5
1.c)		0,5
2.	$P(F \cap S) = 0{,}92 \times 0{,}95 = 0{,}874$; $P(\overline{F} \cap S) = 0{,}08 \times \dfrac{3}{4} = 0{,}06$. $P(S) = 0{,}874 + 0{,}06 = 0{,}934$ (probabilités totales). $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}874}{0{,}934} \approx \mathbf{0{,}936}$.	0,25 0,25

Exercice	Corrigé	Barème
3.a)	$X(\Omega) = \{0\,;\,2\,500\,;\,5\,000\}$. $P(X = 5\,000) = P(F \cap S) = 0{,}874$; $P(X = 2\,500) = P(\overline{F} \cap S) = 0{,}06$; $P(X = 0) = P(\overline{S}) = 1 - 0{,}934 = 0{,}066$. | x_i | 0 | 2 500 | 5 000 | | $P(X = x_i)$ | 0,066 | 0,06 | 0,874 |	0,25 0,5
3.b)	$E(X) = 0 \times 0{,}066 + 2\,500 \times 0{,}06 + 5\,000 \times 0{,}874 = 150 + 4\,370 = \mathbf{4\,520}$ F. $E(X^2) = 2\,500^2 \times 0{,}06 + 5\,000^2 \times 0{,}874 = 375\,000 + 21\,850\,000 = 22\,225\,000$. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 22\,225\,000 - 4\,520^2 = \mathbf{1\,794\,600}$.	0,25 0,25
4.a)	Un jouet n'est pas mis au rebut s'il réussit le test de solidité : probabilité $0{,}934$. Les prélèvements étant indépendants : $p = 0{,}934^3 \approx \mathbf{0{,}815}$.	0,25
4.b)	Événement contraire : $1 - 0{,}934^3 \approx \mathbf{0{,}185}$.	0,25
Exercice 4 (3 pts) A.1)	F est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et $F'(x) = (2ax+b)\sqrt{2x+1} + \dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{5ax^2+(2a+3b)x+b+c}{\sqrt{2x+1}}$. Or $f(x) = x\sqrt{2x+1} = \dfrac{2x^2+x}{\sqrt{2x+1}}$. Par identification : $\begin{cases} 5a = 2 \\ 2a+3b = 1 \\ b+c = 0 \end{cases}$ donc $a = \dfrac{2}{5}$; $b = \dfrac{1}{15}$; $c = -\dfrac{1}{15}$. $F(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{1}{15}x - \dfrac{1}{15}\right)\sqrt{2x+1}$.	0,5 0,25
A.2)	$G(x) = F(x) + k$; $G(0) = 1 \iff -\dfrac{1}{15} + k = 1 \iff k = \dfrac{16}{15}$. $G(x) = \left(\dfrac{2}{5}x^2 + \dfrac{1}{15}x - \dfrac{1}{15}\right)\sqrt{2x+1} + \dfrac{16}{15}$.	0,25
B.1)	$f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} = u'(x)\,u(x)^{-3}$ avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de f sur I : $x \longmapsto -\dfrac{1}{2\sin^2 x} + k,\ k \in \mathbb{R}$.	0,5
B.2.a)	$f'(x) = \dfrac{-\sin x \cdot \sin^3 x - \cos x \cdot 3\sin^2 x \cos x}{\sin^6 x} = \dfrac{-\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\sin^4 x}$. Avec $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$: $f'(x) = \dfrac{2\sin^2 x - 3}{\sin^4 x} = \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{3}{\sin^4 x}$.	0,25 0,25
B.2.b)	$h(x) = \dfrac{3}{\sin^4 x} = \dfrac{2}{\sin^2 x} - f'(x)$, donc $h(x) = 2g(x) - f'(x)$.	0,25
B.2.c)	$\left(-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x} = g(x)$: c'est une primitive de g sur I. Comme $h = 2g - f'$, les primitives de h sur I sont : $H_k(x) = 2\left(-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right) - \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} + k = -\dfrac{2\cos x}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} + k,\ k \in \mathbb{R}$.	0,25 0,25
B.3)	$\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 1$ et $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin^3\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 2$, donc $H_k\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -2 - 2 + k = 0 \iff k = 4$. $H_0(x) = -\dfrac{2\cos x}{\sin x} - \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} + 4$.	0,25

Exercice	Corrigé	Barème
Exercice 5 (5 pts) 1.a)	$g'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$: g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	0,25
1.b)	Pour $x > 0$: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$. Pour $x < 0$: $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \to -1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1$. **Tableau de variation de g :** x : $-\infty$ … $+\infty$ $g'(x)$: $+$ g : -1 ↗ 0	0,25
1.c)	g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'image de $\mathbb{R}$ par g est l'intervalle : $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-1\,;0[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < g(x) < 0$: $g(x)$ est majoré strictement par 0. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) < 0$.	0,25
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (somme de termes tendant vers $+\infty$). $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 1 + \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.	0,25
2.b)	$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) = g(x)$.	0,25
2.c)	$f'(x) = g(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. x : $-\infty$ … $+\infty$ $f'(x)$: $-$ f : $+\infty$ ↘ 1	0,5
3.	$f(x) - 1 = \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: $(D) : y = 1$ asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$. $f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$: (Δ) asymptote en $-\infty$.	0,25
4.a)	$\sqrt{x^2+1} > \lvert x\rvert \geq x$ donc $f(x) - 1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) > 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D). $\sqrt{x^2+1} > \lvert x\rvert \geq -x$ donc $f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) > 0$: $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ).	0,25 0,25
4.b)	$f(0) = \frac{3}{2}$; $f'(0) = g(0) = -\frac{1}{2}$. $(T) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.	0,25

Exercice	Corrigé	Barème
4.c) et 6.a)	 $(\mathcal{C}')$ est la symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$; elle admet les asymptotes $x = 1$ et $y = -x + 1$.	0,5 (4.c) 0,25 (6.a)
5.a)	f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $K =]1\,;+\infty[$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$).	0,25
5.b)	f^{-1} a le même sens de variation que f : elle est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$. x : 1 … $+\infty$ f^{-1} : $+\infty$ ↘ $-\infty$	0,25
5.c)	$f(0) = \dfrac{3}{2}$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $f(0) = \dfrac{3}{2}$.	0,25
5.d)	$\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$	0,25
6.b)	Pour $x \in]1\,;+\infty[$, $y = f^{-1}(x) \iff f(y) = x \iff \sqrt{y^2+1} = y + 2(x-1)$. En élevant au carré : $y^2 + 1 = y^2 + 4(x-1)y + 4(x-1)^2$, d'où $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - 4(x-1)^2}{4(x-1)} = \dfrac{1}{4(x-1)} - x + 1.$ (Vérification : $f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$.)	0,5

Exercice	Corrigé	Barème
Exercice 6 (4 pts) Situation complexe	Pour trouver le montant S, je vais utiliser la leçon **Probabilité conditionnelle et variable aléatoire**, plus précisément la **variable aléatoire** (loi de probabilité et espérance mathématique). **Plan de travail :** 1) Je définis la variable aléatoire X égale au gain algébrique d'un joueur (mise de 200 F déduite). 2) Je détermine les valeurs prises par X et leurs probabilités. 3) Je dresse le tableau de la loi de probabilité de X. 4) Je calcule l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de S. 5) Je résous l'équation $E(X) = 2\,500$. 6) Je conclus. **Exécution :** Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur. • Vert : $P = \frac{2}{10},\ X = 1\,000 + S - 200 = S + 800$. • Blanc : $P = \frac{3}{10},\ X = S - 200$. • Rouge : $P = \frac{4}{10},\ X = -1\,000 - 200 = -1\,200$. • Noir puis noir : $P = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100},\ X = -300 - 200 = -500$. • Noir puis autre : $P = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{100},\ X = 200 - 200 = 0$. **Loi de probabilité de** X (avec $S > 200$) : $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x_i & -1\,200 & -500 & 0 & S-200 & S+800 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{4}{10} & \frac{1}{100} & \frac{9}{100} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} \\ \hline \end{array}$ (Vérification : $\frac{40+1+9+30+20}{100} = 1$.) $E(X) = \frac{2}{10}(S+800) + \frac{3}{10}(S-200) + \frac{4}{10}(-1\,200) + \frac{1}{100}(-500) + \frac{9}{100} \times 0$ $E(X) = 0{,}5\,S + 160 - 60 - 480 - 5 = 0{,}5\,S - 385$. $E(X) = 2\,500 \iff 0{,}5\,S = 2\,885 \iff S = 5\,770$. **Conclusion :** le président doit mettre **5 770 F** dans chaque enveloppe pour que le gain moyen d'un joueur soit de 2 500 F.	

Exercice	Corrigé	Barème

Grille d'évaluation de l'exercice 6

Critères	Indicateurs	Points
CM1 : Pertinence	Utilisation de la variable aléatoire ; de l'espérance mathématique ; détermination des probabilités ; conclusion sur S (1/4 $\rightarrow$ 0,25 ; 2/4 $\rightarrow$ 0,5 ; 3/4 $\rightarrow$ 0,75)	0,75
CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques	Valeurs de X ; loi de probabilité (dont le second tirage) ; calcul de $E(X)$ en fonction de S ; résolution de $E(X) = 2\,500$ (1/4 $\rightarrow$ 0,5 ; 2/4 $\rightarrow$ 1 ; 3/4 $\rightarrow$ 1,5)	1,5
CM3 : Cohérence de la réponse	Démarche logique ; résultat cohérent avec la démarche ; réponse à la préoccupation (1/3 $\rightarrow$ 0,75 ; 2/3 $\rightarrow$ 1,25)	1,25
CP : Perfectionnement	Originalité ; présentation soignée ; vérification du résultat (1/3 $\rightarrow$ 0,25 ; 2/3 $\rightarrow$ 0,5)	0,5
	TOTAL	**20 pts**