

CORRIGE

EXERCICE 1

1. La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est de la forme $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ où A et B sont deux réels. Ici, $\omega^2 = 25$ donc $\omega = 5$.

Donc, la solution générale est donnée par : $f(x) = A \cos(5x) + B \sin(5x)$ où A et B sont deux réels.

2. On vérifie que la fonction f donnée par $f(x) = \sqrt{3} \cos(5x) - \sin(5x)$ vérifie les trois conditions données.

Tout d'abord, f est bien de la forme donnée à la question précédente avec $A = \sqrt{3}$ et $B = -1$ donc f est solution de (E).

$$\text{Calculons } f(\pi/6): f(\pi/6) = \sqrt{3} \cos(5\pi/6) - \sin(5\pi/6) = \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

Donc la courbe représentative passe par le point de coordonnées $(\pi/6; -2)$.

Calcul de la dérivée : $f'(x) = -5\sqrt{3} \cos(5x) - 5 \sin(5x)$ (en utilisant $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$)

$$\text{D'où : } f'(0) = -5\sqrt{3} \sin(0) - 5 \cos(0) = -5\sqrt{3} \times 0 - 5 \times 1 = -5$$

Conclusion : la fonction f donnée vérifie bien les trois conditions.

Autre méthode

$$f(\pi/6) = A \cos(5\pi/6) + B \sin(5\pi/6) = A \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{B}{2} = -A\sqrt{3} + B = -4$$

$$f'(x) = -5A \sin(5x) + 5B \cos(5x) \Rightarrow f'(0) = -5 \times 0 + 5B = -5 \Rightarrow B = -1$$

$$-A\sqrt{3} = -B - 4 = 1 - 4 = -3 \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$$

3. On utilise la formule d'addition trigonométrique : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ en prenant

$$a = 5x \text{ et } b = \pi/6. \text{ On a donc : } f(x) = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(5x) - \frac{1}{2} \sin(5x) \right] = 2 \cos\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$$

4. Soit F une primitive de $f : F(x) = \frac{2}{5} \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$. Valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \pi/6]$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{(\pi/6) - 0} \int_0^{\pi/6} f(x) dx = \frac{6}{\pi} [F(x)]_0^{\pi/6} = \frac{6}{\pi} [F(\pi/6) - F(0)] = \frac{12}{5\pi} \left[\sin\left(5 \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{12}{5\pi} \left[\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{12}{5\pi} \left[0 - \frac{1}{2} \right] = -\frac{6}{5\pi} \end{aligned}$$