Problème 8

1. $g(x)=e^{x}(x-2)-1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. a. $g'(x)=e^{x}(x-2)+e^{x}=e^{x}(x-1)$, or on sait que $e^{x}>0$, donc $f'(x)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$

b.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^{x}		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $g(x)=0$:

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, donc elle est strictement croissante sur l'intervalle $[1;3]\subset[1;+\infty[$, et on a $f(1)=-e-1<0$ et $f(3)=e-1>0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha)=0$ et $1\leq\alpha\leq3$.

A l'aide de la calculatrice on trouve $2{,}1\leq\alpha\leq2{,}2$.

On sait que $g(\alpha)=e^{\alpha}(\alpha-2)-1=0\Rightarrow e^{\alpha}(\alpha-2)=1\Rightarrow e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. $$f(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}+x}=\frac{e^{x}\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\dfrac{x}{e^{x}}\right)}=\frac{\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1+xe^{-x}\right)}$$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0 \text{ , donc } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1+0}{1+0}=1$$

On déduit que la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

2. $f(x)-1=\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}+x}-1=\dfrac{e^{x}+1-e^{x}-x}{e^{x}+x}=\dfrac{1-x}{e^{x}+x}$, $e^{x}+x>0$ sur R + donc le signe de $f(x)-1$ dépend du signe $1-x$.

Donc si $1-x>0\Rightarrow x<1$ et la courbe C et au dessus de D sur $]0;1[$

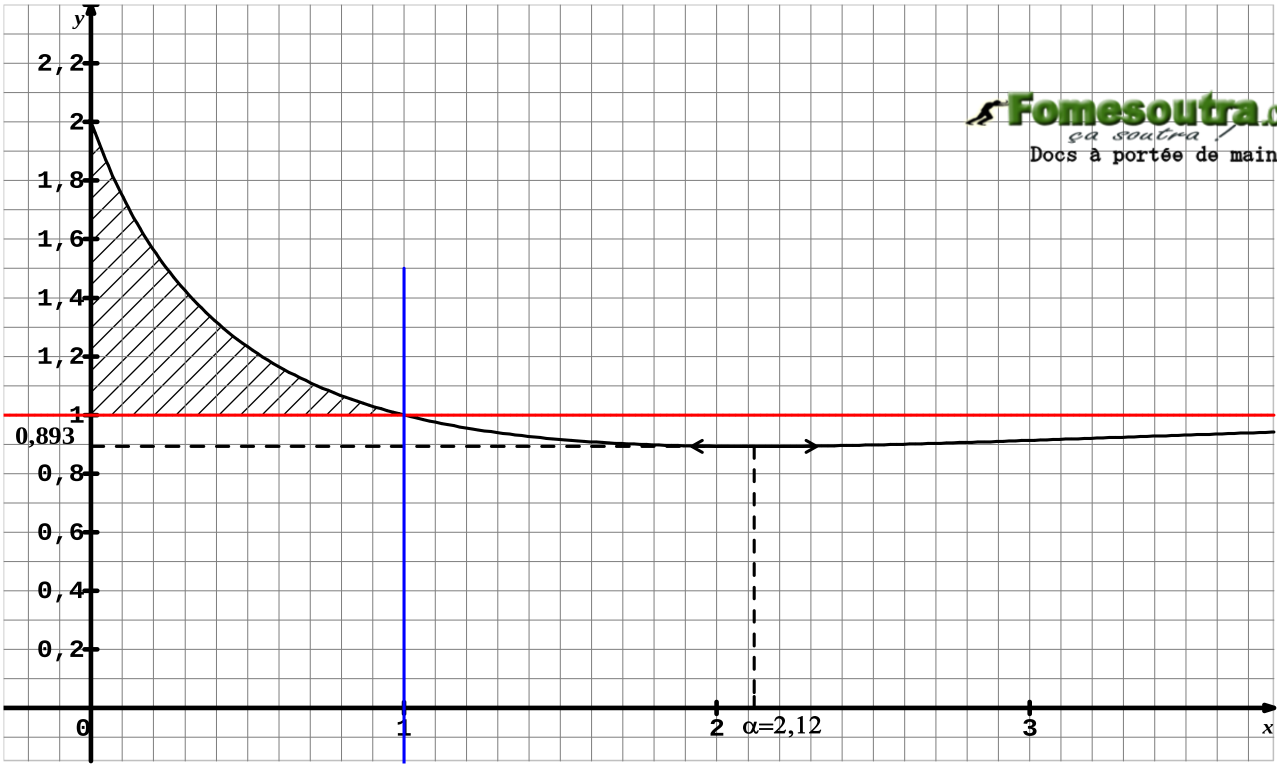
Si $1-x<0\Rightarrow x>1$ et la courbe C et en dessous de D sur $]1;+\infty[$.

3. $$f'(x)=\frac{e^{x}\left(e^{x}+x\right)-\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{e^{2x}+xe^{x}-e^{2x}-2e^{x}-1}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{(x-2)e^{x}-1}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}=\frac{g(x)}{\left(e^{x}+x\right)^{2}}.$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

$$f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}+1}{e^{\alpha}+\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\alpha-2}+1}{\dfrac{1}{\alpha-2}+\alpha}=\frac{\dfrac{1+\alpha-2}{\alpha-2}}{\dfrac{1+\alpha(\alpha-2)}{\alpha-2}}=\frac{\alpha-1}{\alpha^{2}-2\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^{2}}=\frac{1}{\alpha-1}$$, puisque $\alpha\neq1$.

Partie C



$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$, on pose $u(x)=e^x+x$, $u'(x)=e^x+1$, donc $f(x)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{u'}{u}$, d'après le formulaire, on obtient : $F(x)=\ln(u(x))=\ln\left(e^x+x\right)$ est une primitive de $f(x)$ sur R.

$B=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)u.a=25\left[F(x)\right]_0^1=25\times\left(F(1)-F(0)\right)=25\left(\ln(e^1+1)-\ln(e^0)\right)=25\ln(e+1)=32,83$.