I Pré-requis :

Démonstration de cours : On rappelle la propriété (P) suivante : Pour tout nombre réel x : $e^x > x$

1°) Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0, +∞ [, $e^x - \frac{1}{2}x^2 \geq 1$

2°) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$

II ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE .

Soit gla fonction définie sur R par : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1°) Déterminer la limite de g en -∞ et la limite de g en +∞.

2°) a) Justifier que g est une fonction dérivable sur R.

b) Déterminer g ' (x) et étudier le signe de g '(x) sur R.

c) Dresser le tableau des variations de g sur R.

3°) a) Montrer que l'équation g(x) = 0 a exactement deux solutions réelles.

b) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions. Que peut on en déduire concernant la courbe représentative de la fonction g dans un repère (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) ?

c) Montrer que l'autre solution notée α vérifie la double inégalité $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$.

4°) Donner dans un tableau le signe de g(x) selon x, nombre réel.

III ETUDE DE LA FONCTION PRINCIPALE .

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1°) Déterminer la limite de f en -∞ et la limite en +∞.

2°) a) Justifier que f est dérivable sur R.

b) Calculer f ' (x) .

c) Montrer que f '(x) et g(x) ont le même signe sur R.

3°) Etudier le sens de variation de f.

4°) Dresser le tableau de variation de f.