



**TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES**

**THEME** : Equation Différentielle

**NIVEAU** : Terminale C, D E, & F

**Prof**: Mr Socrate-Ahmmmed (+242) 06 593 41 78 / 05 716 88 70

**Email**: socrateahmmedonanga@gmail.com

**Rappels du Cours**

**I)-Définition**

On Appelle équation différentielle toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonctions inconnue.

**II)- Ordre d'une équation différentielle**

C'est le rang de la dérivée la plus élevé contenue dans cette équation

- |   |                        |
|---|------------------------|
| a. $2y'''' - y''' + 7y'' + y' + 2y = 0$ | 4 <sup>eme</sup> Ordre |
| b. $y''' + 7y'' + y' + 2y = 0$          | 3 <sup>eme</sup> Ordre |
| c. $7y'' + y' + 2y = 0$                 | 2 <sup>eme</sup> Ordre |
| d. $y' + 2y = 0$                        | 1 <sup>er</sup> Ordre  |

**II-1)- équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre**

**1)- Equation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre sans second nombre** (homogène)

C'est toute équation de la forme

$$(*) \quad \boxed{ay' + by = 0} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$$

**i)- Résolution**

**1<sup>er</sup> Méthode**

$$(*) \quad ay' + by = 0$$

$$\Leftrightarrow ay' = -by$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int -\frac{b}{a} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\frac{b}{a}x + C_2$$

*" Seul le travail et les sacrifices que tu entreprends aujourd'hui payeront un jour, car c'est bien de souffrir aujourd'hui pour mieux vivre demain "*

« Mr. SOCRATE-AHMMED (+242) 06 593 41 78 »

Pour le compte des Mathématiques sans frontières

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}x + C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}x} \times e^{C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{b}{a}x} \times e^{C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow y = e^{C_2 - C_1} \times e^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{posons } k = \pm e^{C_2 - C_1}$$

$$\boxed{y = ke^{-\frac{b}{a}x}} \quad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

**2<sup>eme</sup> Méthode**

(\*)  $ay' \pm by = 0$

posons:  $y = ke^{rx}$

$$\Rightarrow y' = kre^{rx}$$

$$akre^{rx} + bke^{rx} = 0$$

$$ke^{rx}(ar + b) = 0$$

$$ke^{rx} \neq 0 = ar + b$$

$$\Rightarrow r = -\frac{b}{a}$$

remplacons  $r = -\frac{b}{a}$  dans  $y = ke^{rx}$  on aura:

$$\boxed{y = ke^{-\frac{b}{a}x}} \quad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

Avec  $ar + b = 0$  est appelée équation caractéristique l'équation homogène (\*)

**ii) Solution particulière**

Déterminer la solution particulière c'est préciser la Valeur de la constante k telle que la solution vérifie la condition initiale  $y(x_0) = y_0$

**2)-Equation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre avec second membre** (non homogène)

C'est une équation dont le second membre n'est plus 0 mais une fonction de la variable réelle  $x$

Exemple

- $y' - 4y = -3x + 1$
- $2y' + y = e^x$
- $-\frac{1}{2}y' + 6y = \cos 2x$
- $5y' - 3y = (x^2 - x + 1)e^{3x}$
- $y' = -6x^2$
- $y' = 1 + \tan^2 x$

**II<sub>2</sub>) Equation différentielle du second ordre**

**1)-Equation différentielle du 2<sup>eme</sup> ordre sans second membre** (équation-homogène)

C'est toute équation de la forme :

$$(*) \quad \boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*, (b, c) \in \mathbb{R}$$

**i)-Résolution**

On a :  $ay'' + by' + cy = 0$

posons  $y = e^{tx}$

$$y' = te^{tx}$$

$$y'' = t^2e^{tx}$$

$$\Leftrightarrow at^2e^{tx} + bte^{tx} + ce^{tx} = 0$$

$$\Rightarrow e^{tx}(at^2 + bt + c) = 0$$

$$\Rightarrow e^{tx} \neq 0 \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

avec  $(at^2 + bt + c = 0)$  équation caractéristique de l'équation homogène (\*)

En effet :  $at^2 + bt + c = 0$

On calcule :  $\Delta = b^2 - 4ac$

- **1er cas:** si  $\Delta = 0$ , Alors il existe une racine double  $t_0 = -\frac{b}{2a}$  Dans ce cas la solution de (\*) est de la forme

$$\boxed{y(x) = (Ax + B)e^{t_0x}} \quad \forall (A, B) \in \mathbb{R}$$

- **2e cas:** si  $\Delta > 0$ , Alors il existe deux racines réelles distinct  $r_1$  et  $r_2$  tels que

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, on a  $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$   $\forall (A, B) \in \mathbb{R}$

- **3e cas** : si  $\Delta < 0$ , Alors il existe deux racines complexes conjuguées  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \alpha - i\beta$

On aura :

$$y(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

Où

$$y(x) = Ke^{\alpha x} \cos(\beta x + \omega) \quad \forall (A, B, K, \alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}$$

## ii) Solution particulière

Il s'agit de déterminer les valeurs des constantes réelles lorsque la solution générale vérifie les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = z_0$$

## 2)- Equation différentielle du second degré avec second membre (équation non homogène)

Forme :  $ay'' + by' + cy = f(x)$

Exemple

- $y'' + by' - 2y = 4e^{2x}$
- $y'' - 4y' = 4(x - 1)^2 - 2$

Pour résoudre les équations de cette forme, il faut :

a) Cherche d'abord la solution homogène  $y_h(x)$  associée à l'équation homogène en posant :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

b) Ensuite chercher la solution particulière  $y_p(x)$  vérifiant (\*) c'est à dire

$$ay''_p + by'_p + cy_p = f(x)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation non homogène (\*) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

**EXERCICE 1**

Résoudre les équations différentielles suivants :

a)  $g''(x) = 1$

b)  $y' = e^{2x}$

c)  $xy' = \frac{1}{\ln x}$

d)  $y'' = 2y'$

e)  $y''' = 0$

f)  $y' + 2y = 0$

g)  $y' - \ln 2y = 0$

a')  $y'' = \cos x$

b')  $y'' = 2x$

c')  $y'^{\sqrt{x}} = 1$

d')  $(x^2 + 1)y' = x$

e')  $y' = \frac{1}{x \ln x}$

f')  $3y' - \pi y = 0$

g')  $-2y' + 5y = 0$

**EXERCICE 2**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1-  $2y'' - y' - 6y = 0$

2-  $y'' + 16 = 0$

3-  $y' - \pi y = 0$

4-  $y' + y \ln 2 = 0$

5-  $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$

6-  $y'' + y' + y = 0$

1')  $y'' + y' + y = 0$

2')  $4y'' - 25y = 0$

3')  $(x^2 + 1)y' = 0$

4')  $y'' - 2y' - y = 0$

5')  $4y'' + y = 0$

2) Trouver les solutions vérifiant les conditions initiales de 4,4',5 et 5'

$\rightarrow y(0) = -1$  et  $y'(0) = 0$

$\rightarrow y(0) = 1$  et  $y'(2) = 1$

$\rightarrow y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$  et  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\rightarrow y(0) = -1$  et  $y'(0) = \sqrt{3}$

**EXERCICE 3**

1)- Déterminer toutes les solutions des fonctions réelles vérifiant l'équation différentielle donné dans chacun des cas suivants

a)  $4y'' - 9y = 0$

b)  $y'' + 4y' + 4y = 0$

c)  $4y'' - 8y' + 3y = 0$

a')  $4y'' + 9y = 0$

b')  $y'' - 4y' + 3y = 0$

c')  $y'' + 5y' = 0$

d)  $y'' - 6y' + 10y = 0$

d')  $4y'' - 4y' + 5y = 0$

**EXERCICE 4**

Donner la solution générale de l'équation différentielles :

1)  $y' + 4y = 0$

2)  $3y' - y = 0$

3)  $y' - 5y = 3x$

4)  $\pi y' + 2y = 0$ ; ;  $y(3\pi) = 1$

5)  $4y'' + 9y = 0$  ;  $y(\pi) = 2$  ;  $y'(\pi) = 0$

6)  $y'' = \frac{1}{2}x + 1 + \sin 2x$  ;  $y(0) = 0$  ;  $y'(0) = 0$

7)  $2y'' + y' - 3y = 0$  ;  $y(0) = -1$  ;  $y'(0) = 2$

8)  $y'' - 2y' + 2y = 0$

9)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  ;  $y(0) = 1$  ;  $y'(0) = 3$

10)  $4y'' - 4y' - 3e^{2x} + y = 0$

**EXERCICE 5**

On considère l'équation différentielle suivants :

(E):  $2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1)- Déterminer une fonction polynôme de degré 2 solution de l'équation.

2)- On pose  $f=h-g$ , montrons que  $f$  est solution de (E) pour que  $h$  soit la solution de l'équation (E') =  $2y' + y = 0$

3)- Résoudre (E')

4)- Déduire la solution générale de (E)

**EXERCICE 6**

Résoudre l'équation : (E):  $y'' + y = 0$  , on notera  $f$  la solution de cette équation

2)- On considère (E') :  $y'' + y = \cos 2x$

a)- Déterminer les réels a et b tel que la fonction définie par

$f(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$  , soit solution de l'équation (E')

b)- Montrer que la fonction  $h$  telle que  $h(x) = f(x) + f_0(x)$  est une solution de (E)

**EXERCICE 7**

(E):  $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$

- 1)- Soit  $\varphi$  la solution définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = ke^{4x}$  avec  $K \in \mathbb{R}$ . Déterminer  $k$  pour que  $\varphi$  soit solution de (E).
- 2)- Montrons que  $f$  est solution de l'équation (E) pour que  $f - \varphi$  soit solution de l'équation différentielle  $(E') = y'' - 5y' + 6y = 0$
- a)- Résoudre  $(E')$
- b)- Dédire la solution de (E)
- 3)- Déterminer la solution particulière de (E)

**EXERCICE 8**

Soit l'équation différentielle  $(E) = y' + 2y = x^2 + 1$ .

- 1)- Résoudre l'équation différentielle  $(F) = y' + 2y = 0$ .
- 2)- Déterminer une fonction polynôme  $g$  du second degré, solution de (E).
- 3)- Démontrer que  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $h = f - g$ .
- 4)- En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

**EXERCICE 9**

Soit  $(E) = y'' + 4y' = \sin 2x$ .

- 1)- Résoudre l'équation différentielle  $(F) : y'' + 4y' = 0$ .
- 2)- On pose  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$   
Déterminer les réels  $C_1$  et  $C_2$  tels que  $g$  soit une solution de (E)
- 3)- Démontrer que la fonction  $f$  est une solution de (E) si et seulement si  $f - g$  est une solution de (F)
- 4)- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

**EXERCICE 10**

On considère l'équation (E) tel que  $y'' - 6y' + 9y = 0$

- 1)- Résoudre sur  $\mathbb{R}$  cette équation.
- 2)- Trouver la solution particulière de  $f$ .
- 3)- Etudier les variations de la fonction ainsi trouver ; pour  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$

**EXERCICE 11**

Soit  $(E) : y'' + 2y' + 10y = 0$

- 1)- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .
- 2)- Déterminer la solution particulière  $f$  ; tel que  $f(0) = 0, f' \left( \frac{\pi}{6} \right) = e^{-\frac{\pi}{6}}$
- 3)- Représenter graphiquement la fonction trouver.

**EXERCICE 12**

Soit (E) :  $y'' - 4y' + 4y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E).
- 2)- Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée première s'annule en 0.
- 3)- Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) de f munie d'un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  admet une tangente horizontale A (0 ;1).
- 4)- Calculer l'intégrale  $Z = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) e^{2x} dx$ .

**EXERCICE 13**

Soit (E) l'équation tel que :  $9y'' + ay' + 4y = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- 1)- Pour quelle valeur de a l'équation (E) admet-elle une solution générale de la forme  $y = e^{ax}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}$ .
- 2)- On pose  $a = 0$ , Résoudre l'équation (E).
- 3)- Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  passe par le point  $I(\frac{\pi}{2}, \sqrt{3})$  et admet en ce point une tangente de pente  $-\frac{2}{3}$ .

**EXERCICE 14**

Soit l'équation différentielle  $ay'' + 2by' + 4y = 0$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}$

Sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$

- 1)- Calculer a et b.
- 2)- Résoudre cette équation.
- 3)- Résoudre l'équation pour  $f(0) = 0$  ,  $f'(0) = 1$ .

**EXERCICE 15**

Soit (E):  $y'' - 3y' + 2y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E)
- 2)- Trouver la solution particulière  $f$  de (E) dont la courbe (C) passe par le point  $I(\ln 2; 0)$  et admet en ce point une tangente parallèle a la droite d'équation  $y = -2x$

**EXERCICE 16**

Soit (E) =  $y'' - 2y' + y = 0$

- 1)- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)
- 2)- Déterminer la solution particulière  $h$  de cette équation dont la courbe (C) admet dans le repère  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  un point d'inflexion.

**EXERCICE 17**

PARTIE A

(E) :  $y'' + 2y + y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E).
- 2)- Trouver la solution  $g$  de (E) telle que  $g(0) = 0$  et  $g'(0) = 1$

PARTIE B

Soit  $g(x) = xe^x - 1$  la fonction continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

- 1)- Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 2)- Calculer  $g'(x)$ , puis étudier les variables de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3)- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0,1[$ , puis donner le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

PARIE C

Soit  $f(x) = (x - 1)e^x - x - 1$  la fonction continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique de 2cm.

- 1)- Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
- 2)- Montrer que  $f'(x) = g(x)$ .
- 3)- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4)- Préciser les branches infinies de (C) à  $+\infty$ , puis tracer soigneusement la courbe (C).
- 5)- Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine délimité par (C) avec l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = 0, x = 1$ .

**EXERCICE 18**

PARTIE A

$(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$

- 1)- Intégrer l'équation (E).
- 2)- Déterminer la solution particulière  $h$ , vérifiant les relations  $h(0) = 0$  et  $h'(0) = 0$ .

PARTIE B

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle  $x$  tel que  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = (x + 1)e^{-2x} & , \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x + 2x \ln(x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère, orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  unité graphique de 4 cm.

- 1)- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 0$ .
- 2)- Etudier les branches infinies de (C).
- 3)- Etudier les variations de  $f$ .
- 4)- Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  de l'intervalle  $]-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}[$
- 5)- Construire la courbe (C) représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$
- 6)- Calculer l'air de la partie du plan délimitée par la courbe (c) avec l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = 0$
- 7)- On construit la fonction  $g$  définie  $\forall x \in ]-\infty, 0[$  par  $g(x) = -f(x)$ 
  - a)- Dresser le tableau de variation de  $g$  sans étudier les variations
  - b)- Construire (c') la courbe représentative de  $g$  dans le même repère que (C)

**BONUS**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- 1)  $4y' + 3y = 0$        $\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0$
- 2)  $y \ln 5 - y' = 0$        $y\sqrt{3} = y'$
- 3)  $y' - 3y = 0$       et       $y(0) = 2$
- 4)  $3y' + y = 0$       et       $y(1) = 0$
- 5)  $y' + y \ln 2 = 0$       et       $y(1) = 1$
- 6)  $y' = y$       et       $y(1) = -1$
- 7)  $2y' + 3y = 0$       et       $A\binom{2}{1}$
- 10)  $-y' = y$       et       $A\binom{2}{3}$

*" Seul le travail et les sacrifices que tu entreprends aujourd'hui payeront un jour, car c'est bien de souffrir aujourd'hui pour mieux vivre demain "*

« Mr. SOCRATE-AHMMED (+242) 06 593 41 78 »

Pour le compte des Mathématiques sans frontières

11)  $y' - \pi y = 0$  et  $A(e^{2x})$

12)  $y' = -\frac{y}{2}$  ; 13)  $y' + 2y = 0$

14)  $y'^{\sqrt{2}} - y\sqrt{3} = 0$  ;  $y'' - 2y' + y = 0$

15)  $y' + 3y = 0$   $y(0) = 1$

16)  $y' - 3y = 0$   $y(1) = 1$

17)  $4y' - 3y = 0$   $y(-4) = 1$

18)  $y' + y \ln 2 = 0$   $y(1) = -2$

a)  $9y'' - 64y = 0$   $9y'' + 4y = 0$

b)  $y'' - 2y = 0$   $2y'' + y = 0$

c)  $2y'' - y = 0$   $y(0) = 0$   $y'(0) = 1$

d)  $9y'' + 4y = 0$   $g(\pi) = 0$   $g'(\pi) = 0$

e)  $y'' + y' - 6y = 0$   $y'' - 4y' + 8y = 0$

f)  $y'' + 4y' - 5y = 0$   $\frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0$

g)  $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$   $9y'' + 6y' + y = 0$

h)  $y'' - 6y' + 2y = 0$   $4y'' + 4y' + y = 0$

i)  $y'' - 2y' - 2y = 0$   $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

j)  $y'' - 4y' + 4y = 0$   $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

k)  $y'' + 4y' + 5y = 0$   $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

l)  $y'' + 2y' + y = 0$   $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

m)  $y'' + 16y = 0$   $y(0) = 0$   $y'(0) = -1$

n)  $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$   $y(0) = 1$ ,  $y'(2) = 1$

o)  $4y'' + y = 0$   $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

p)  $y'' + 2y' - 3y = 0$   $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = -1$

q)  $y'' + y' + y = 0$   $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = \sqrt{3}$

*" Seul le travail et les sacrifices que tu  
entreprennds aujourd'hui payeront un jour, car  
c'est bien de souffrir aujourd'hui pour mieux  
vivre demain "*

« Mr. SOCRATE-AHMMED (+242) 06 593 41 78 »

Pour le compte des Mathématiques sans frontières

Vérifier dans chaque cas que la fonction f est solution de l'équation (E) sur l'intervalle k :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$  (E):  $2(y + y') = x^2$   $k = \mathbb{R}$

$f(x) = (2x - 1)e^x$  (E):  $y' - y = 2e^x$   $k = \mathbb{R}$

$f(x) = e^x + e^{2x}$  (E):  $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$   $k = \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{2x}$  (E):  $yy' = 1$   $k = ]0, +\infty[$