TRAVAUX DIRIGES: LIMITES ET CONTINUITE

Exercice 1

Calculer les limites suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x) = \frac{x^2+5x+4}{2x^2-8} \qquad b)\ f(x) = \frac{3x-5}{x^2-x+1}$$

$$c)\ f(x) = \frac{x^2+1}{-2x+3} \qquad d)\ f(x) = \frac{x^2+1}{|-2x+3|}$$

Exercice 2

Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to+\infty}} x\sin\frac{1}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{3+\cos x}$$

$$d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\cos x}{3+\cos x} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sin x}$$

Exercice 3

Etudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{2x^2-1}{x-1}$$

$$c)\ f(x) = \sqrt{(x+2)^2} - \frac{3}{x-1} \qquad d)\ f(x) = \frac{x^2+\sin x}{x}$$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la courbe représentative (ε) de la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. Donner une équation de ces asymptotes et préciser leur position par rapport à (ε).

$$a)\ f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}} \qquad b)\ f(x) = \frac{x+1}{2} + \sqrt{x^2-x+1}$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \qquad d)\ f(x) = \sqrt{x^2-x+1}$$

Exercice 5

a) f est la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} pour\ x\epsilon]-\infty;1[, & f(x) = \frac{6x}{x+2} \\ pour\ x\epsilon]1;+\infty[, & f(x) = \sqrt{3x+1} \end{cases}$

b) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $]0;1]$.

$$(1)\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (2)\ f(x) = \frac{\tan x}{x} \quad (3)\ f(x) = \frac{1-\cos x}{x} \quad (4)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 0 ?

c) Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur $[0;1[$.

$$(1) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \quad (2)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \quad (3)\ f(x) = \frac{|x|-1}{x-1} \quad (4)\ f(x) = \frac{x(1-x)}{x-1}$$

Peut-on prolonger f par continuité en 1 ?

Exercice 6

Dans chacun des suivants, étudier la continuité sur ℝ de la fonction f définie par :

$$(1)\begin{cases} pour\ x\epsilon]-\infty;0[, & f(x) = 1 - x \\ pour\ x\epsilon]0;+\infty[, & f(x) = 5x^3 + x + 1 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} pour\ x\epsilon]-\infty;0], & f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 9 \\ & f(0) = 9 \end{cases}$$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer a pour que f soit une fonction continue sur ℝ :

$$(1)\begin{cases} pour\ x \in \mathbb{R} - \{1\}, & f(x) = \dfrac{8x - 13}{4x + 1} \\ & f(1) = a \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} pour\ x \in \mathbb{R} - \{7\}, & f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x - 7} \\ & f(7) = a \end{cases}$$

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer a et b pour que f soit une fonction continue Sur l'intervalle $[-1\,;1]$:

$$(1)\begin{cases} pour\ x \in [-1\,;1], & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} + 2x + 3} \\ & f(-1) = a \\ & f(1) = b \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} pour\ x \in [-1\,;1] - \left\{0; -\dfrac{1}{2}\right\}, & f(x) = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{1}{4x^2 + 3} \\ & f(0) = a \\ & f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = b \end{cases}$$