Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5-3x^2+7)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(-2x^4+x^3-3x-1)^3\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-5}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^3}{1+x+x^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x}{(2x+3)^2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\sqrt{2})x^2+3x-5}{x^2+x+2}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2}{x+1}-\sqrt{3}x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2+3x-8}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2-5x}{8x^2+7}}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2x-5}}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x^3-1}{2x^3+7}}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}\ ;\ \lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{9-x^2}\ ;\ \lim_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}\ ;\ \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}\ ;\ \lim_{x\to-1}\frac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}\ ;\ \lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}\ ;\ \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}\ ;\ \lim_{x\to3}\frac{7-5x}{(x-3)^2}\ ;\ \lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-3}{x^2+2x-3}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}\ ;\ \lim_{x\to1^-}\frac{8x-1}{\sqrt{1-x}}\ ;\ \lim_{x\to4^+}\frac{x}{2-\sqrt{x}}\ ;\ \lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x-4}}{x^2-8x+16}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2} \quad ; \quad \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{(x+1)^3(x-2)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^3}{|x^2-9|} \quad ; \quad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\frac{3x^2-x-1}{4x^2-1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}(2x-5\sqrt{x}) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x-5}+x+3\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-x+4\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x-3\right) \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+3}{x^2+8x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x+6\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}-3} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right) \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5-3x^2+7)$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5-3x^2+7)=\lim_{x\to-\infty}4x^5$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5-3x^2+7)=-\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty \quad \text{et} \quad 4>0$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x^4+x^3-3x-1)^3$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x^4+x^3-3x-1)^3=\lim_{x\to+\infty}(-2x^4)^3$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-8x^{12}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}(-2x^4+x^3-3x-1)^3=-\infty$$

Car : $\lim_{x\to-\infty}x^{12}=+\infty$ et $-8<0$

- Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-5}$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{x^2-5}=0$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^3}{1+x+x^3}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^3}{1+x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-1$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^3}{1+x+x^3}=-1$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x}{(2x+3)^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x}{(2x+3)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x}{(2x+3)^2} = \frac{1}{4}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{-2x^2-4x-1}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{-2x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -1$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-9x+5}{2x^2-(2x+1)^2} = -1$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\sqrt{2})x^2+3x-5}{x^2+x+2}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\sqrt{2})x^2+3x-5}{x^2+x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\sqrt{2})x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (1-\sqrt{2})$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-\sqrt{2})x^2+3x-5}{x^2+x+2} = (1-\sqrt{2})$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2}{x+1}-\sqrt{3}x\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2}{x+1}-\sqrt{3}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2-\sqrt{3}x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2}-\sqrt{3})x$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2}{x+1}-\sqrt{3}x\right)=+\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \quad \text{et} \quad (\sqrt{2}-\sqrt{3})<0$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2+3x-8}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2+3x-8}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3-2x^2+3x-8}=+\infty$$

Car :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^3}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{cases}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2-5x}{8x^2+7}}$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2-5x}{8x^2+7}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(8+\frac{7}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\left(8+\frac{7}{x^2}\right)}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{2x^2-5x}{8x^2+7}}=\frac{1}{2}$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^2}=0$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2x-5}}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-5}=0^+$$

et

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2x-5}}=0$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x^3-1}{2x^3+7}}$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x^3-1}{2x^3+7}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3\left(5-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{7}{x^3}\right)}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x^3-1}{2x^3+7}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\left(5-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{7}{x^3}\right)}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{5x^3-1}{2x^3+7}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x^3}=0$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$$

On a :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-(\sqrt{2})^2}{x-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=\lim_{x\to\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$$

Donc :

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{9-x^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{9-x^2}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(3-x)(3+x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x-2)}{(3+x)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{9-x^2}=-\frac{1}{6}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}$$

On a :

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}$$

$$=\lim_{x\to-5}\frac{(x+1)(x+5)}{(x-1)(x+5)}$$

$$=\lim_{x\to-5}\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}=\frac{2}{3}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}$$

On a :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-2^3}{x(x-2)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x}$$

Donc :

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=6$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x(1-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(1-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(1-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x-x^2}=\frac{1}{4}$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$$

On a :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{3}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

On a :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+3x^2+4x+3 & x+1 \\ \hline -\quad 2x^3+2x^2 & 2x^2+x+3 \\ \hline x^2+4x & \\ -\quad x^2+x & \\ \hline 3x+3 & \\ -\quad 3x+3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x^2+x+3\,)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x+3}{x+2}$$

Donc :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+3x^2+4x+3}{x^2+3x+2} = 4$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$$

On a :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x+2)\left(\sqrt{x+6}+3\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3} = 30$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}$$

On a :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}\right)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{8-2x}}{3\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{8-2x}}=\frac{\sqrt{2}}{9}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}$$

On a :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x+12}-(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\left[\sqrt{x+5}-(\sqrt{x}+1)\right]\left[\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+1)\right]\left[\sqrt{x+12}+(\sqrt{x}+2)\right]}{\left[\sqrt{x+12}-(\sqrt{x}+2)\right]\left[\sqrt{x+12}+(\sqrt{x}+2)\right]\left[\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{-2[\sqrt{x}-2]\left[\sqrt{x+12}+(\sqrt{x}+2)\right]}{-4[\sqrt{x}-2]\left[\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+12}+(\sqrt{x}+2)}{2\left[\sqrt{x+5}+(\sqrt{x}+1)\right]}$$

Donc :

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x}-2}=\frac{2}{3}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to 3} \frac{7-5x}{(x-3)^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to 3} 7-5x = -8$$

et

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x\to 3} \frac{7-5x}{(x-3)^2} = -\infty$$

Car :

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \quad \text{et} \quad -8 < 0$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$$

On a :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Car :

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} x+1 = 0^- \\ \lim_{x\to -1^-} x-1 = -2 \\ \lim_{X\to 0^+} \sqrt{X} = 0 \end{cases}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$$

Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x - 3$ est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. Donc le trinôme $x^2 + 2x - 3$ admet deux racines distinctes qui sont : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

Le tableau de signe du trinôme $x^2 + 2x - 3$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 2x - 3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'où :

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 2x - 3 = 0^-$$

On a :

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 - x - 3 = -3$$

Donc :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \quad \text{Car} \quad \lim_{X \to 0^-} \frac{1}{X} = -\infty \quad \text{et} \quad -3 < 0$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$$

On a :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{-\sqrt{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}-\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}=-\infty$$

Car :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}x-2=-1\\ \lim\limits_{x\to1^-}x-1=0^-\\ \lim\limits_{X\to0^-}\frac{-1}{X}=+\infty\end{cases}$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{8x-1}{\sqrt{1-x}}$$

On a :

$$\lim_{x\to1^-}8x-1=7$$

et

$$\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}=0^+$$

Donc :

$$\lim_{x\to1^-}\frac{8x-1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$$

Car :

$$\lim_{X\to0^+}\frac{7}{X}=+\infty$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to4^+}\frac{x}{2-\sqrt{x}}$$

On a :

$$\lim_{x\to4^+}x=4$$

et

$$\lim_{x\to4^+}2-\sqrt{x}=0^-$$

Donc :

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x}{2-\sqrt{x}} = -\infty$$

Car :

$$\lim_{X \to 0^-} \frac{4}{X} = -\infty$$

- Calculons :

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x-4}}{x^2-8x+16}$$

On a:

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x+12}-\sqrt{3x-4} = 4-2\sqrt{2}$$

et

$$\lim_{x \to 4^+} x^2-8x+16 = \lim_{x \to 4^+} (x-4)^2$$

$$= 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{3x-4}}{x^2-8x+16} = +\infty$$

Car

$$\lim_{X \to 0^+} \frac{4-2\sqrt{2}}{X} = +\infty$$

- Calculons :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

On a:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{x^2-4}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x+2)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} + \frac{1}{\sqrt{(x+2)}}$$

Donc :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2}$$

On a :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}+1\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{-\sqrt{(x-2)^2}}+1\right)$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left(-\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}+1\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}+x-2}{x-2} = -\infty$$

Car :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} 2-x = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{4}{X} = +\infty \\ \lim\limits_{Y\to +\infty} \sqrt{Y} = +\infty \end{cases}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{(x+1)^3(x-2)}$$

On a :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{(x+1)^3(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3-(-1)^3}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^3(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2(x-2)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{(x+1)^3(x-2)} = -\infty$$

Car :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} x^2-x+1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to -1} (x+1)^2(x-2) = 0^- \\ \lim\limits_{X\to 0^-} \dfrac{1}{X} = -\infty \end{cases}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}}$$

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{2x}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}\left(1-\sqrt{2x}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{2x}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x^2}} = 0$$

Car :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} -x\sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} \left(1-\sqrt{2x}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right) = 4 \end{cases}$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^3}{|x^2-9|}$$

On a :

$$\lim_{x\to -3^-} x^3 = -27$$

et $$\lim_{x\to -3^-} |x^2-9| = 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^3}{|x^2-9|} = -\infty$$

Car : $$\lim_{X\to 0^+} \frac{-27}{X} = -\infty$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x^2-x-1}{4x^2-1}$$

On a :

$$\lim_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} 3x^2-x-1 = \frac{1}{4}$$

et

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 4x^2 - 1 = 0^+$$

Donc :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x^2 - x - 1}{4x^2 - 1} = +\infty$$

Car :

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}}{X} = +\infty$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 5\sqrt{x})$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 5\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 5)$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} (2x - 5\sqrt{x}) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x - 5} + x + 3\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x - 5} + x + 3\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(9 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + x + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{\left(9 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + x + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{\left(9 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + x + 3\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[x\left(-\sqrt{\left(9 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + 1\right) + 3\right]$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x - 5} + x + 3\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)}-\sqrt{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)}-\sqrt{x}\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=-\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-x+4\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-x+4\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-(x-4)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+2}-(x-4)\right)\left(\sqrt{x^2+5x+2}+(x-4)\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x+2}+(x-4)\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{13-\frac{14}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{4}{x}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+2}-x+4\right)=\frac{13}{2}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=0$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=+\infty$$

et

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}=0$$

➤ Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x-3\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x-3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+(2x-3)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+3}+(2x-3)\right)\left(\sqrt{4x^2+x+3}-(2x-3)\right)}{\left(\sqrt{4x^2+x+3}-(2x-3)\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(13-\frac{6}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2+\frac{3}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{13-\frac{6}{x}}{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}-2+\frac{3}{x}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+3}+2x-3\right)=-\frac{13}{4}$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\times\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\left(1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5x-3}}{x}=-1$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+3}{x^2+8x}}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3}{x^2+8x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}4$$

$$=4$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2+3}{x^2+8x}}=2$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = 0$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+6\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}-3}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+6\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{6}{\sqrt{x}}}{2+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+6\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}-3} = \frac{1}{2}$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right) = \sqrt{3}-1$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt{x^4-x^3}+x^2\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{x^2\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^3}-x^2\right)=-\infty$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2}{5\sqrt{x^2+3}}+\frac{x}{5\sqrt{x^2+3}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(3x\sqrt{x^2+x}-3x^2\right)\left(3x\sqrt{x^2+x}+3x^2\right)}{5\sqrt{x^2+3}\left(3x\sqrt{x^2+x}+3x^2\right)}+\frac{1}{5\times\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(3x\sqrt{x^2+x}-3x^2\right)\left(3x\sqrt{x^2+x}+3x^2\right)}{5\sqrt{x^2+3}\left(3x\sqrt{x^2+x}+3x^2\right)}+\frac{1}{5\times\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^3}{5x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\times x^2\left(3\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3\right)}+\frac{1}{5\times\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9}{5\times\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\left(3\sqrt{1+\frac{1}{x}}+3\right)}+\frac{1}{5\times\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+x}-3x^2+x}{5\sqrt{x^2+3}}=\frac{1}{2}$$

- Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x+1}-x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x(1+\frac{1}{x})}}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2}{x+1}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{(1+\frac{1}{x})}}+x\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{(x+1)\left(x\times\sqrt{\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}}+1\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)=-\frac{1}{2}$$

➢ Calculons :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x-2}\right)\left(x\sqrt{x+2}+x\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\left(x\sqrt{x+2}+x\sqrt{x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2\times\sqrt{1-\frac{2}{x}}\sqrt{1+\frac{2}{x}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\sqrt{1+\frac{2}{x}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)=0$$