EXERCICE 2:

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier naturel n par :
$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$. A_n est le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. a) Vérifie que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

   b) Déduis-en que z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a) Montre que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

   b) Détermine les valeurs de n pour lesquelles les points O ; A_0 et A_1 sont alignés.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

   a) Donne une interprétation géométrique de d_n.

   b) Calcule d_0

   c) Montre que pour tout entier naturel non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$

   d) Déduis-en que la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

   e) Exprime d_n en fonction de n.

4. Démontre que les triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

EXERCICE 2

1 - a -

* Module

$$|1+i\frac{\sqrt{3}}{3}| = \sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\frac{3}{9}}$$

$$|1+i\frac{\sqrt{3}}{3}| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

* Argument

Soit θ un argument :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}/3}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

* Forme expo

Donc : $\boxed{1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6}}$

1 - b -

* z_1

$$z_{0+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0$$

$$z_1 = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\boxed{z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6}}$$

* $\underline{z_2}$

$$z_{1+1} = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1$$

$$z_2 = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 e^{i\,2\pi/6}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{4}{3} e^{i\pi/3}}$$

2-a-

On a : $z_1 = 1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$

$z_2 = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$z_3 = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$

$\vdots$

$z_n = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$ or $\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6}$

Donc : $\boxed{z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}$

2-b-

$$\frac{z_{A_n} - z_0}{z_{A_0} - z_0} = \frac{z_1}{z_0} = z_1 \text{ car } z_0 = 1$$

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\pi/6}$$

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$$

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$z_n \in \mathbb{R}^* \iff \sin\frac{n\pi}{6} = 0$$

$$\iff \sin\frac{n\pi}{6} = \sin k\pi$$

$$\iff \frac{n\pi}{6} = k\pi$$

$$\iff \underline{\underline{n = 6k}} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

Donc les points O ; A_0 et A_1 sont alignés s.s. si n est un multiple de 6.

3-a-

d_n représente la distance A_nA_{n+1}.

3-b-

$$d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3 - c -

$$z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$$

$$z_{n+2} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1}$$

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$$

$$\boxed{z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(z_{n+1} - z_n\right)}$$

3 - d -

$$d_n = |z_{n+1} - z_n|$$

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}|$$

$$= \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n|$$

$$d_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} d_n}{d_n} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$

3 - e -

$$d_n = d_p \, q^{n-p}$$

$$= d_0 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\boxed{d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

EXERCICE 2

4 -

$$\frac{z_O - z_{A_n}}{z_{A_{n+1}} - z_{A_n}} = \frac{0 - z_n}{z_{n+1} - z_n}$$

$$= \frac{-z_n}{\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n - z_n}$$

$$= \frac{-z_n}{z_n\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)}$$

$$= \frac{-z_n}{z_n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$= \frac{-1}{i\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \sqrt{3}\, i$$

Donc le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.