EXERCICE 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. a) Calculer z_1 et z_2.

   b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

a) Calculer l_n.

b) En déduire la limite de l_n.

EXERCICE 4 :

EXERCICE 3

1 - a -

* z_1

$$z_{0+1} = \frac{1+i}{2} z_0$$

$$z_1 = \frac{1+i}{2} \times 2$$

$$\underline{\underline{z_1 = 1+i}}$$

* z_2

$$z_{1+1} = \frac{1+i}{2} z_1$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} \times 1+i$$

$$= \frac{(1+i)^2}{2}$$

$$\underline{\underline{z_2 = i}}$$

1 - b -

faire un schéma.

2 -

2-a-

$$U_n = |z_{n+1} - z_n|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right|$$

$$= \left|z_n \left(\frac{1+i}{2} - 1\right)\right|$$

$$= \left|z_n \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} i\right)\right|$$

$$= \left|z_n \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right)\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right| \times |z_n|$$

$$\boxed{U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|}$$

2-b-

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_{n+1}|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left|\frac{1+i}{2} z_n\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right| \times |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$$

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} U_n}{U_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $u_0 = \sqrt{2}$

2-c-

$u_n = u_0\, q^n$

$$\boxed{u_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}$$

3-a-

On pose : $I_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \text{---} + A_{n-1}A_n$

$I_n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + - + |z_n - z_{n-1}|$

$I_n = u_0 + u_1 + \text{---} + u_{n-1}$

$$I_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$I_n = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$I_n = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{I_n = 2\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2 - \sqrt{2}}}$$

3 - b -

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} 2\sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \text{ car } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$