DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES Tle D :

Durée : 2h

25 /10/2021

Ce sujet comporte deux pages

EXERCICE1 : (2 points) Pour chacune des affirmations suivantes recopie le numéro de la ligne suivi de **Vrai** si l'affirmation est vraie ou **Faux** si l'affirmation est fausse.

1. Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
   Si E et F sont deux évènements de U de probabilités non nulles, alors $P_F(E) = P_E(F)$.
2. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[-2 ; 3]$ et si $f(-2) \times f(3) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]f(3) ; f(-2)[$.
3. A et B étant deux évènements indépendants d'un univers Ω , on a $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
4. Soit f une fonction d'un intervalle I sur un intervalle J. Si f est continue et strictement décroissante sur I alors sa bijection réciproque g est strictement décroissante sur I .

EXERCICE2 : (2 points) *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.*

<table>
<tr><th>N°</th><th>ENONCES</th><th colspan="2">Réponses</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">Soit f une fonction et $\propto$ un nombre réel. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $]\propto ; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=$</td><td>A</td><td>0</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\propto$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">
<table>
<tr><th></th><th>Fait la maladie</th><th>Ne fait pas la maladie</th></tr>
<tr><td>Vacciné</td><td>15</td><td>25</td></tr>
<tr><td>Non vacciné</td><td>18</td><td>12</td></tr>
</table>
Ce tableau donne les résultats d'une enquête effectuée dans une population de 70 personnes. On choisit au hasard un individu. La probabilité que cet individu fasse la maladie sachant qu'il est vacciné est</td><td>A</td><td>$\frac{15}{70}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\frac{15}{33}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\frac{15}{40}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\frac{33}{40}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">$a \in IR_+ , b \in IR_+ , \sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} =$</td><td>A</td><td>$a^5 b^5$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>ab</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$a^{12} b^{11}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$a^4 b^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">$\lim\limits_{x \to +\infty} x \cos\left(\frac{\pi x + 15}{x - 1}\right) =$</td><td>A</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>π</td></tr>
<tr><td>D</td><td>n'existe pas</td></tr>
</table>

EXERCICE3 : (7 points)

f est une fonction continue sur son ensemble de définition, de représentation graphique (C_f) dans un repère orthonormé (O,I,J) et admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		2		$4,5$		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$9,5$ ‖ $9,5$	↘	1

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
2. Précise les asymptotes éventuelles à (C_f). Justifie ta réponse.
3. f est – elle prolongeable par continuité en 2 ? en 4,5 ? Si oui définis ces prolongements.
4. Détermine les images par des intervalles $]-\infty; 2[$ et $]4,5; +\infty[$ par f.
5. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]2; 4,5[$.
6. Détermine le signe de f sur D_f.
7. Soit g la restriction de f à $]-\infty; -3[$.

   a) Justifie que g réalise une bijection de $]-\infty; -3]$ dans un intervalle J à déterminer.

   b) Dresse le tableau de variation de g^{-1}, bijection réciproque de g sur son ensemble de définition.
8. Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(2 - \frac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2f(x)-3}{5-3f(x)}$

EXERCICE4 (4 points) Une urne contient 5 boules : 3 blanches et 2 noires.

On tire au hasard une boule de l'urne, puis sans la remettre dans l'urne, on en tire une seconde.

On note : B_1 l'évènement « la 1ère boule tirée est une boule blanche » ;
N_1 l'évènement « la 1ère boule tirée est une boule noire » ; B_2 l'évènement « la seconde boule tirée est une boule blanche » ; N_2 l'évènement « la seconde boule tirée est une boule noire ».

1. Construis l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Donne les probabilités suivantes :

   a) $P(N_1)$ b) $P_{N_1}(B_2)$.
3. a) Justifie que $P(N_1 \cap B_2) = 0,3$

   b) Calcule $P(B_2)$.

EXERCICE5 (Situation complexe) (3 points) :
Un cordonnier fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la fonction
$B(x) = x^3 - \frac{75}{2}x^2 + 450x + 150$, x représentant le nombre de sacs fabriqués et vendus.
Il aimerait connaître l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabriqués compris entre 5 et 17.
En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement cohérent, aide ce cordonnier à répondre à sa préoccupation.

Exercice 5 : (5 pts)

CM1 : 0,75

Utilisation de la leçon sur les limites et continuité.

Recherche de l'image d'un intervalle par une fonction continue.

CM2 : 2,5

Etude des variations et tableau de variation de la fonction bénéfice :

$\forall x \in [5; 17], B'(x) = 3x^2 - 75x + 450 = 3(x-10)(x-15)$

B est strictement croissante sur $[5; 10]$ et sur $[15; 17]$

B est strictement décroissante sur $[10; 15]$

x	5		10		15		17
$B'(x)$		+	0	-	0	+	
$B(x)$	1587,5	↗	1900	↘	1837,5	↗	1875,5

Cherchons l'image de [5 ;17] par $B(x)$

B est continue et strictement croissante sur $[5; 10]$, $B([5; 10]) = [1587{,}5 ; 1900]$

B est continue et strictement décroissante sur $[10; 15]$, $B([10; 15]) = [1837{,}5 ; 1900]$

B est continue et strictement croissante sur $[15; 17]$, $B([15; 17]) = [1837{,}5 ; 1875{,}5]$

Donc $B([5; 17]) = [1587{,}5 ; 1900]$.

CM3 (cohérence de la production) 1,25

CP 0,5

Donc pour un nombre de sacs compris entre 5 et 17 il aura un bénéfice entre 158750 frs et 190000 frs.

CORRIGE ET BAREME DU DEVOIR COMMUN TD DU 25/10/2021

Exercice1 : (4 x 0,5pts)

1.F / 2.V / 3.F /4.F

Exercice2 : (4 x 0,5 pts)

1.C / 2. C / 3.B / 4.A

Exercice3 : (7 pts)

1) $D_f = IR \setminus \{2;4,5\}$ 0,25

2)

- Asymptote verticale d'équation $x = 2$ $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ .... 0,25 + 0,25
- Asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$ .... 0,25 + 0,25
- Asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ .... 0,25 + 0,25

3)

- f n'est pas prolongeable par continuité en 2 0,25
- f est prolongeable par continuité en 4,5. Ce prolongement est h: $\begin{cases} h(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ h(4,5) = 9,5 \end{cases}$ .... 0.25+ 0,5

4) $f(]-\infty;2[) =]-\infty;0]$ et $f(]4,5;+\infty[) =]1;9,5[$ .... 0,25 + 0,25

5) f est continue et strictement croissante sur]2 ;4,5[, elle réalise une bijection de]2 ;4,5[dans $]-\infty;9,5[$ et $0 \in]-;9,5[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]2;4,5[$ 0,75

6) $x \in]-\infty;2[\cup]2;\alpha]$ $f(x) \le 0$; $x \in]\alpha;4,5[\cup]4,5;+\infty[$ $f(x) > 0$ 0,75

7) a. f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;-3]$ donc sa restriction g à $]-\infty;-3]$ réalise une bijection de $]-\infty;-3]$ dans $J =]-1;0]$........ 0,75

b.

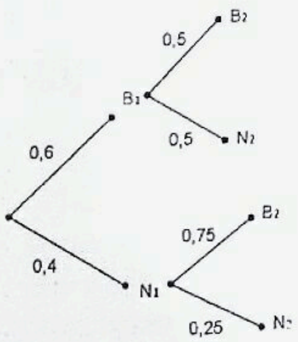
x	-1	0
$g^{-1}(x)$	$-\infty$ ↗	-3

.... 0.5

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(2-\frac{1}{x}) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2f(x)-3}{5-3f(x)}$ .... 0,5 + 0,5

Exercice 4 : (4pts)

1)



.... 1

2) a. $p(N_1) = 0,4$ et b. $p_{N_1}(B_2) = 0,75$ .... 0,5 + 0,5

3) a. $p(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = 0,3$ 1

b. $p(B_2) = p(B_2 \cap N_1) + p(B_2 \cap B_1) = 0,3 + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 0,6$ 1