Lycée Classique d'Abidjan

Année Scolaire : 2021-2022
Durée : 2 heures
T^le D

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Exercice 1

Réponds par Vrai (V) ou Faux (F) aux affirmations suivants :

N°	Questions	Réponses
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle I, alors f est bijective et sa réceproque a le même sens de variation que f.	
2	Si f est une fonction continue sur intervalle I, alors pour tout $m \in f(I)$ l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans I.	
3	Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$; alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).	
4	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$	
5	Soient a et b deux nombres réels si une fonction f est croissante et majorée sur $]a; b[$, alors f admet une limite finie en b.	

Exercice 2

Pour chaque ligne du tableau, trois réponses sont proposées dont une et une seule est exacte, indique la réponse exacte en notant par exemple : 1a ou 1b ou 1c.

N°	Affirmations	a	b	c
1	$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 1} - 3x$	$+\infty$	0	$-\infty$
2	$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{16x^2 + 1} + 4x + 1$	1	$-\infty$	0
3	Si f et g sont des fonctions telles que $f \leq g$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	$-\infty$	0	$+\infty$
4	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x+4}} =$	2	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
5	$f(x) = x^2 + 2$ $f([2 ; +\infty[) =$	$[6, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[1 ; +\infty[$

Exercice 3

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

Calculer :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{6x^2}$
2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$

Exercice 4

Soit la fonction g définie par $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\,;1\} \\ g(x) = \frac{2x^2-x-1}{|x+1|-2} \\ g(1) = 3 \end{cases}$

Etudier la ~~construite~~ de g en 1.
continuité

Exercice 5

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	5	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1) Détermine Df l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles suivants :
$]3;+\infty[\ ;\ ]1\,;3[\ ;\ ]-\infty\,;\,-2]$ *et* $[-2\,;1]$.
3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]3\,;\,+\infty[$.

4 a) Justifie que la restriction h de f à $[1\,;3]$est une bijection dans un intervalle k à préciser

b) La restriction de f à intervalle $]-2\,;3[$ est-elle une bijection ?

I

Correction du DS N°1 du 30/09/2021

Exercice 1 (2,5pts)

1°) V 0,5pt
2°) F 0,5pt
3°) V 0,5pt
4°) F 0,5pt
5°) V 0,5pt

Exercice 2 (3,5pts)

1°) $-\infty$ (1c) ~~Ep~~ 0,5pt
2°) a) 1pt
3°) a) 0,5pt
4) c) 0,5pt
5°) a) 1pt

Exercice 3 (3pts)

1°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{6x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$ 1pt

$= \lim\limits_{X\to 0}\dfrac{1}{6}\times\dfrac{\sqrt{1+X}-1}{X} = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}$ avec $X=x^2$

2°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\times\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1pt $= \frac{1}{2}$, Car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sqrt{1+X}-1}{X}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 1pt

Exercice 4 : (3pts)

x	$-\infty$ -3	-1	1 $+\infty$
$x+1$	$-$	$-$ 0 $+$	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$ 0 $x+1$	$x+1$
1,5 pt $g(x)$	$\frac{2x^2-x-1}{-x-3}$	$\frac{2x^2-x-1}{-x-3}$	$\frac{2x^2-x-1}{x-1}$	$\frac{2x^2-x-1}{x-1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x+1}{1} = 3$ 0,5 pt

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3$ 0,5 pt

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = g(1) = 3$ d'où g est continue en 1 0,5 pt

Coller

Exercice 5 (8 pts)

1°) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ 1pt

2°) * Sur $]3;+\infty[$ f est strictement croissante

d'où $f(]3;+\infty[) =]\lim_{x\to 3} f(x); \lim_{x\to +\infty} f(x)[$

$=]-\infty;+\infty[$ 0,5pt

* Sur $]1;3[$ f est strictement décroissante

d'où $f(]1;3[) =]\lim_{x\to 3} f(x); f(1)[=]-\infty;5[$ 0,5pt

* $f(]-\infty;-2[) =]-1;+\infty[$ 0,5pt

* Sur $[-2;1]$ f est croissante

d'où $f([-2;1]) = [f(-2); f(1)] = [-1;5]$ 0,5pt

3°) f est continue et strictement croissante sur $]3;+\infty[$

d'où f réalise une bijection de $]3;+\infty[$ sur $f(]3;+\infty[)$

$=]-\infty;+\infty[$ or $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation

$f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]3;+\infty[$

1,5 pt

4°) a) f est continue et strictement décroissante sur $]1;3[$ d'où la restriction de f à $]1;3[$, g est une bijection de $]1;3[$ sur $f(]1;3[)$ $=]-\infty;5[= K$. 1,5pt

b) non car f n'admet pas une seule variation sur $]-2;3[$. 1pt