

LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN NIVEAU : Terminale D	DEVOIR DE MATHÉMATIQUES Durée : 4h	Année scolaire 2020-2021 11/02/2021
--	---------------------------------------	---

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Si $z = (1 - \sqrt{5}) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ alors un argument de z est $\frac{\pi}{3}$
2	Pour tous nombres complexes z et z' , $ z = z' $ équivaut à $z = z'$ ou $z = -z'$
3	f et g sont des fonctions telles que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} fog(x) = 2$
4	La fonction $x \mapsto 2 + \cos^5 x$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto -5 \sin x \cos^4 x$

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque affirmation du tableau, choisis la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		a	b	c
1	X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$. La probabilité à 10^{-3} près de l'événement $X \geq 1$ est égale à :	0,8	0,908	0,992
2	On admet que $\forall x \in]0; 10]$, $f'(x) = \ln x - \frac{x}{2} + 1$. La courbe (C_f) admet sur l'intervalle $]0; 10]$ un point d'inflexion d'abscisse :	1,2	0,9	2
3	Le nombre complexe $u = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ est une	racine huitième de l'unité	racine sixième de l'unité	racine quatrième de l'unité
4	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{2}{x} \right)$ est égale à	0	2	$+\infty$

EXERCICE 3 (3,5 points) Commun à tous sauf les classes de TD2 et TD3

1. Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$.

2. On donne le nombre complexe $u = \frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}$.

a) Ecris u sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

b) Déduis – en les valeurs exactes de $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 3 cm.

A, B et C sont les points d'affixes respectives $1 + i$, $\sqrt{3} + i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

a) Justifie que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Déduis-en la construction des points B et C .

c) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A .

d) Démontre que les droites (OA) et (BC) sont perpendiculaires

4. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z - \sqrt{3} - i}{z - 1 - \sqrt{3}i}$.

Détermine l'ensemble (D) des points du plan tels que $|z'| = 1$. Construis (D) .

EXERCICE 4 (5 points)

I. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$. (en 0 on pourra poser $x = \sqrt{x}$).
2. Etudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = -(2 + \ln x)\ln x$
 b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
4. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2,1$.
 b) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

II. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x \ln x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4cm. On admet que $\forall x \in]0; +\infty[, 1 + x \ln x > 0$.

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement les résultats.
2. a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1 + x \ln x)^2}$
 b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$
4. Soit h la restriction de f à $]0, \alpha]$.
 a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1} .
 b) h^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}$? Justifie ta réponse.
5. Construis (G) . On prendra $f(\alpha) = 0,3$

EXERCICE 5 (3,5 points)

Cinq amis nommés A, B, C, D et E achètent en commun une photocopieuse.

Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée chez A ou B.

On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun des cinq amis fait un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B.

Le résultat d'un vote noté (A, B, B, A, A) signifie que : A a voté pour A, B a voté pour B, C a voté pour B, D a voté pour A et E a voté pour A.

1. Justifie qu'il y a 32 résultats possibles.
2. On désigne par X la variable aléatoire qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A.

a) Justifie que $p(X = 0) = p(X = 5) = \frac{1}{32}$

b) Etablis la loi de probabilité de X .

c) Justifie que l'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{5}{2}$

d) Vérifie que la probabilité p_1 que la photocopieuse soit entreposée chez A est égale à $\frac{1}{2}$

3. A chaque début d'année, on effectue un vote, dans les mêmes conditions. On suppose que les votes sont des événements indépendants. Calcule la probabilité p_2 pour que A soit choisi pendant trois années consécutives.

EXERCICE 6 (4 points)

Lors de la fête de fin d'année, une enquête faite par le conseil scolaire du lycée classique auprès d'un échantillon d'élèves de Terminales C et D révèle que :

- 25% des élèves aiment jouer au basketball sachant qu'ils sont en Terminale C.
- Un tiers des élèves aiment jouer au basketball sachant qu'ils sont en Terminale D.
- Trois élèves sur dix aiment jouer au basketball.

Eric, le responsable des jeux et loisirs du conseil scolaire, choisit au hasard un élève de cet échantillon.

On note les événements suivants :

D : « L'élève choisi est en Terminale D »

B : « L'élève choisi aime jouer au basketball »

Eric ne se souvient pas de la probabilité de choisir un élève de terminale D.

Pour écrire son rapport il vient te voir et te sollicite afin que tu l'aides à trouver cette valeur.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en Mathématique, détermine la probabilité de choisir un élève de Terminale D.

EXERCICE 7 (Uniquement pour la TD2 et la TD3)

I.

1. Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive sur l'intervalle K de la fonction f.

a) $f(x) = \frac{-4x - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$; $K = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^3}} + \frac{1 - 2x}{\sqrt{3x^2 - 3x + 5}}$; $K = \mathbb{R}$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$ par $g(x) = \frac{-3x^2 + 4x + 5}{(2x + 1)^2}$

a) Détermine trois réels a, b et c tels que $g(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{(2x+1)^2}$

b) En déduis la primitive G de g sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ qui prend la valeur 1 en 0

II.

On considère les fonctions h et k définies sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = x^2 \ln x$ et $h(x) = x \ln x$

1) Calcule $k'(x)$ pour $x > 0$

2) Vérifie que $\forall x > 0, k'(x) - x = 2h(x)$