



DEVOIR DE NIVEAU DE MATHEMATIQUES

Date : 10/01/2022
 Durée : 4 heures
 Coefficient : 4

SERIE : D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3

Exercice 1 (2pts)

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations ci-dessous. **Exemple : 5V**

1. La fonction $x \mapsto 2x - \sqrt{2x+4}$ est dérivable en -2
2. Si f est une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I tels que $a < b$, $f(a) = 5$ et $f(b) = 12$, alors l'équation $f(x) = 10$ admet au moins deux solutions dans l'intervalle $[a ; b]$
3. La fonction $x \mapsto \ln x$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}
4. La variance d'une variable aléatoire est un nombre réel strictement positif
5. Toute bijection f admet une bijection réciproque notée f^{-1}

Exercice 2 (2pts)

Pour chaque question du tableau, quatre (04) réponses sont proposées dont une seule est exacte. On notera par exemple comme réponse choisie pour l'affirmation 5 : **5B**

	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
1. Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto (2x-3)^4$	$\frac{1}{5}(2x-3)^5$	$\frac{1}{8}(2x-3)^3$	$\frac{1}{10}(2x-3)^5$	$\frac{1}{4}(2x-3)^3$
2. La fonction $x \mapsto x x-2 $	n'est pas dérivable en 2	admet un extremum en 2	est pas dérivable en 2	admet un point d'inflexion en 2
3. Soit x un nombre réel non nul Si $\ln x < 0$ alors ...	$x \in]-\infty ; 1[$	$x \in]0 ; 1[$	$x \in [0 ; 1]$	$x \in]0 ; +\infty[$
4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, son espérance mathématique $E(X)$ est	positive	négative	nulle	une valeur algébrique
5. Si A et B sont deux évènements tels que $A \cap B = \emptyset$ alors	A et B sont indépendants	A et B sont incompatibles	A et B sont contraires	A et B sont opposés

Exercice 3 (2,5pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$ par : $f(x) = \frac{24x}{(x^2-9)^2}$

1a. Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 3\}$,

$$f(x) = \frac{a}{(x-3)^2} + \frac{b}{(x+3)^2}$$

- b. Déduis-en que la fonction $x \mapsto \frac{-2}{x-3} + \frac{2}{x+3}$ est une primitive de f sur $] -3 ; 3[$
2. Détermine la primitive F de la fonction f qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 4 (3pts)

1. Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendants les uns des autres. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$.

Le passage sans faute d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

- Quelle est la nature de la loi de probabilité de X ?
- Calcule l'espérance mathématique de X .
- Déduis-en la durée moyenne du parcours.

2. Ce cavalier doit ensuite effectuer à cheval deux sauts indépendants l'un de l'autre. Pour chaque saut, il lui est attribué 0, 2 ou 5 points. La probabilité d'avoir cinq points est $\frac{2}{3}$, celle d'avoir deux points est $\frac{1}{6}$, celle d'avoir zéro point est $\frac{1}{6}$.

On considère la variable aléatoire Y qui, aux deux sauts effectués, associe le nombre de points totalisés.

- Quelles sont les valeurs prises par Y ?
- Justifie que $P(Y=2) = \frac{1}{18}$
- Détermine la loi de probabilité de Y .
- Déduis-en la probabilité de l'événement $(Y \geq 5)$.

Exercice 5 (5,5pts)

Soit la fonction g définie sur $] -\infty ; 1[$ par $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1-x)$

On admet que : $\forall x \in] -\infty ; 0[$, $g(x) > 0$, $\forall x \in] 0 ; 1[$, $g(x) < 0$ et $g(0) = 0$

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 1[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ Unité : 2 cm

- Calcule la limite de f à gauche en 1 puis interprète le résultat.
- Justifie que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$
- Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$
 - Etudie la position de (C) par rapport à (D) .
- On admet que f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$ et on note f' sa fonction dérivée.

- 1
- Justifie que : $\forall x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$
 - Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x puis dresse le tableau de variation de f .
5. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 0[$
- Démontre que h est une bijection de $]-\infty; 0[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
- On admet que l'équation (E) : $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que : $-1,37 < \alpha_1 < -1,36$ et $0,51 < \alpha_2 < 0,52$.
- Vérifie que si un nombre réel α est solution de l'équation (E) alors on a :
 $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$
6. On désigne par (C') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère $(O; I; J)$
Construis (D) , (C) et (C') dans le même repère

Exercice 6(5pts)

Lors d'une conférence, prononcée au LCA par un médecin du sport, les élèves de Terminale D ont noté les informations suivantes :

« La capacité pulmonaire d'un être humain est la quantité d'air présente dans les poumons, mesurée à des fins diagnostiques lors d'une exploration fonctionnelle respiratoire.

Elle est exprimée en litres et dépend de plusieurs facteurs dont l'âge.

On peut la modéliser par la fonction f définie par $f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$ où x désigne l'âge et $x \in [10; 90]$

La capacité pulmonaire reste supérieure à 4,4 litres entre 12 et 45ans.»

Enthousiasmés par les propos du médecin, les élèves cherchent, à partir de leurs connaissances mathématiques, à confirmer les propos de ce dernier sur la tranche d'âge pour laquelle la capacité pulmonaire reste supérieure à 4,4litres.