EXERCICE 1 On considère l'équation

(E) : $z \in \mathbb{C}$; $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) Démontre que (E) admet une unique solution imaginaire pure z_0

2) Détermine les nombres complexes a ; b et c tels que $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = (z-2i)(az^2+bz+c)$

3) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b) En déduis les solutions de (E)

4) Ecris sous forme trigonométrique les nombres complexes $\sqrt{3}-i$; $\sqrt{3}+i$ et $2i$

5) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 2i$, $z_1 = \sqrt{3}-i$ et $z_2 = \sqrt{3}+i$

a) Ecris sous forme trigonométrique z_0, z_1 et z_2

b) Représente dans le plan les points M_0, M_1, M_2 et M_3 d'affixe $z_3 = -\sqrt{3}+i$

c) Calcule le quotient $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$ et en déduis la nature du triangle $M_1M_2M_3$

d) En déduis que les points M_0, M_1 ; M_2 et M_3 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

e) Démontre que le quadrilatère $OM_1M_2M_0$ est un losange

Exercice N°2 z est un nombre complexe différent de 1.
On note M le point du plan complexe d'affixe z.
On pose $Z = \frac{2iz+1}{z-1}$

1) Détermine l'ensemble
 a) S_1 des points M d'affixe z tels que $Z \in \mathbb{R}$
 b) S_2 des points M d'affixe z tels que $Z \in i\mathbb{R}$

2) Détermine l'ensemble M_3 des points M d'affixe z tels que $|Z| = 2$

Exercice N°3 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} f(x)$
3) Interprète chaque limite
4) a) Montre que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$
 b) Détermine le sens de variation de f et dresse le tableau de variation de f.
5) Trace la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]\frac{1}{e}; +\infty[$
 a) Démontre que g est une bijection de $]\frac{1}{e}; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer
 b) Démontre que la bijection réciproque g^{-1} est dérivable en 0 et calcule $(g^{-1})'(0)$