



## DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES Tle D

Durée : 2 h

### Exercice 1

Pour chaque affirmation, écris **VRAI** si l'affirmation est vraie ou **FAUX** si l'affirmation est fausse.  
Aucune justification n'est demandée

| N° | Affirmations                                                                                                     | Réponses |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1  | Deux nombres complexes ayant le même module sont égaux                                                           |          |
| 2  | La fonction $\ln$ est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 |          |
| 3  | La fonction $\ln$ strictement décroissante sur $]0; +\infty[$                                                    |          |
| 4  | Tout nombre complexe non nul admet deux racin <sup>es</sup> carrées opposées                                     |          |

### Exercice 2

Pour chaque énoncé, une seule réponse est juste.

Recopie sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

| N° | Enoncés                                                                                                                           | Réponses                                |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1  | L'inéquation (I) : $x \in \square$ , $\ln x - 1 \leq 0$ , a pour ensemble de solutions                                            | A $]-\infty; e]$                        |
|    |                                                                                                                                   | B $]0; e]$                              |
|    |                                                                                                                                   | C $[e; +\infty[$                        |
|    |                                                                                                                                   | D $\emptyset$                           |
| 2  | On pose $z = -\sqrt{3} + i$ . On note $r$ le module de $z$ et $\theta$ l'argument principal de $z$ .<br>$r$ et $\theta$ vérifient | A $r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$  |
|    |                                                                                                                                   | B $r = 2$ et $\theta = \frac{-5\pi}{6}$ |
|    |                                                                                                                                   | C $r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$  |
|    |                                                                                                                                   | D $r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$  |
| 3  | Le nombre entier minimal $n$ tel que $1 - (0.8193)^n \geq 0,9999$ est :                                                           | A 46                                    |
|    |                                                                                                                                   | B 47                                    |
|    |                                                                                                                                   | C 48                                    |
|    |                                                                                                                                   | D 50                                    |
| 4  | Les racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$ sont :                                                                            | A $2 - i$ et $-2 + i$                   |
|    |                                                                                                                                   | B $2 + i$ et $-2 - i$                   |
|    |                                                                                                                                   | C $2 + i$ et $1 + i$                    |
|    |                                                                                                                                   | D $1 + 2i$ et $1 - 2i$                  |

### Exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Unité graphique : 2cm

- 1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $8 - 6i$ .
- 2) On considère le polynôme  $P$  défini par  $P(z) = z^3 + (-1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + 8i$ .
  - a) Démontrer que  $P(z)$  admet une unique racine imaginaire pure  $ai$  qu'on déterminera
  - b) Déterminer les complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $P(z) = (z - ai)(az^2 + bz + c)$
  - c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$
- 3) On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-1 - i, 2 - 2i$  et  $2i$ .
  - a) Placer les points  $A, B$  et  $C$
  - b) Quelle est la nature du triangle  $ABC$ ? Justifier votre réponse
  - c) Déterminer l'axe du point  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme
- 4) On considère le point  $E$  d'axe  $2 + 2i$ .
  - a) Placer le point  $E$
  - b) Démontrer que les points  $A, B, C$  et  $E$  sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon

### Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 1 cm.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1. a) Étudie le sens de variation de  $g$  et dresse son tableau de variation.
- b) Démonstre que  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$

2. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère  $(O, I, J)$ .

- a) Détermine les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$
- b) Démonstre que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$
- c) On suppose que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

Démonstre que pour tout nombre réel  $x$  de  $]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

- d) Dresse le tableau de variation de  $f$ .
- e) Construis  $(C)$  et  $(D)$ .

### Exercice 5

Une entreprise fabrique et commercialise des engins mécaniques. Sa capacité de production est comprise entre 200 et 1.000 engins. On suppose que toute la production est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier exprimé en millions de francs, réalisé pour la production et la vente de  $x$  centaines d'engins est modélisé sur l'intervalle  $[2; 10]$  par la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4).$$

Le directeur veut savoir le nombre minimal d'engins à produire pour que l'entreprise soit bénéficiaire. N'ayant pas les compétences requises pour effectuer les calculs, le comptable te demande de l'aide. A l'aide d'une production argumentée basée sur les connaissances en mathématiques, détermine le nombre minimal d'engins à produire pour être bénéficiaire.