DRENET-FP YAMOUSSOUKRO EXAMENBLANC REGIONAL 2021

BACCALAUREAT BLANC REGIONAL 2021	MATHEMATIQUE SERIE : D	DUREE : 4 H COEFFICIENT : 4

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.
Les tables trigonométriques et logarithmiques et les règles à calculs sont aussi autorisées

EXERCICE 1

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Pour le bien-être de ses clients, une société immobilière a décidé de contrôler les climatiseurs de leurs appartements afin d'initier une prise en charge à la portée de leurs bourses.
L'état des lieux effectué donne les résultats suivants :

- 20% des climatiseurs sont sous garantie et la probabilité qu'un climatiseur sous garantie soit défectueux est $\frac{1}{100}$.
- Parmi les climatiseurs qui ne sont pas sous garantie, la probabilité qu'un climatiseur soit défectueux est de $\frac{1}{10}$.

On désigne par D et G les évènements suivants :
G l'évènement : « le climatiseur est sous garantie »
D l'évènement : « le climatiseur est défectueux »

1.a) Démontre que la probabilité de l'évènement : « le climatiseur est sous garantie et est défectueux » est égale à $\frac{1}{500}$.
b) Détermine la probabilité de l'évènement : « le climatiseur n'est pas sous garantie et est défectueux »
c) Déduis – en que la probabilité de l'évènement « le climatiseur est défectueux » est égale à $\frac{41}{500}$.

2.) Dans un appartement, le climatiseur est défectueux.
Démontre que la probabilité qu'il soit sous garantie est $\frac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si le climatiseur est sous garantie. Il coûte 8000F si le climatiseur n'est pas sous garantie et n'est pas défectueux. Il coûte 28000F si le climatiseur n'est pas sous garantie et est défectueux.
On note X la variable aléatoire représentant le coût du contrôle d'un climatiseur.
a) Détermine la loi de probabilité de X
b) Détermine le coût moyen du contrôle d'un climatiseur

4.) Au cours de la période de contrôle, on a trouvé cinq climatiseurs défectueux.
Détermine la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit sous garantie.

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ telle que $f(0) = -\frac{1}{2}$ et $\forall x \in [0; 1]$,
$f'(x) = -(f(x))^2$.

On admet également que la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur $[0; 1]$.

1. Démontre que la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. *En utilisant la formule de dérivation de la fonction* $\frac{1}{f}$, démontre que la fonction $(\frac{1}{f})'$ est une fonction constante.
3. Déduis – en l'expression de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), d'unité graphique : 2cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur [0 ; +∞[par : $\begin{cases} g(x) = -1 + x\ln x \text{ si } x > 0 \\ g(0) = -1. \end{cases}$ 1. a) Justifie que la fonction g est continue au point 0.

b) Justifie que g n'est pas dérivable au point 0.Interprète graphiquement la situation au point d'abscisse 0 pour la courbe(Cg) de la fonction g.

Dans la suite, on admettra que g est dérivable sur l'intervalle] 0 ; +∞[.

2. a) Calcule g'(x) pour x ∈] 0 ; +∞[.

b) Démontre que g est strictement décroissante sur $[0 ; \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e} ; +\infty[$.

c) Sachant que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, dresse le tableau de variation de g.

3.a) Démontre que l'équation : x ∈] 0 ; +∞[, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Vérifie que $1 < \alpha < 2$.

c) justifie que : $\forall$ x∈]0 ; α[,$g(x) < 0$ et ∀x∈] α; +∞ [, $g(x) > 0$

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable et définie sur] 0 ; +∞[$par : f(x) = 1 - x + (x-1)\ln x$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O ; I ; J).

1.a) Calculer la limite de f en 0 puis interprète le résultat obtenu.

b) Calcule la limite de f(x) puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ en +∞ . Interprète le résultat obtenu.

2.a) Démontre que ∀ x ∈] 0 ; +∞[, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

b) Détermine le sens de variation de la fonction f.

c) Justifie que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

d) Dresse le tableau de variation de f

3.a) Démontre que la droite (T) d'équation $y = -x + 1$ est la tangente à (C) en son point d'abscisse 1.

b) Démontre que (C) est au-dessus de la droite (T) sur] 0 ; +∞[,

4.) On donne $\alpha = 1{,}7$ et $f(\alpha) = -0{,}3$
Représente graphiquement la fonction f et construis la droite (T) dans le repère (O ; I ; J).

5.) Soit h la restriction de f à l'intervalle [2 ; +∞[.

a) Justifie que h est une bijection de l'intervalle [2 ; +∞[vers un intervalle I à préciser.

b) Dresse le tableau de variation de la réciproque h^{-1} de la fonction h.

c) Représente graphiquement h^{-1}dans le repère (O ; I ; J). On notera (H) la courbe de h^{-1}.

d) Vérifie que h(e) = 0 puis justifier que h^{-1} est dérivable au point 0 et calculer $(h^{-1})'(0)$.

PARTIEC

On considère la fonction F dérivable et définie sur] 0 ; +∞[par:
$F(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x)\ln x$

1. Justifier que F est une primitive de f sur] 0 ; +∞[.
2. Déterminer la primitive G de f sur] 0 ; +∞[qui prend la valeur 0 au point 1.

Lycée Classique d'Abidjan — Année scolaire 2019/2020

DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES N°2

Niveau : terminale D — Durée : 03 heures

EXERCICE

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92% des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95% réussissent le test de solidité ;
- 2% des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1- Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation
   a) Traduis les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités
   b) Démontre que $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\frac{1}{4}$
   c) Construis l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2- Calcul de probabilités
   a) Démontre que $P(S)=0,934$
   b) Un jouet a réussi le test de solidité.
   Calcule la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième)

3- Étude d'une variable aléatoire X.
   Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 1000 francs, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont rejetés, les autres jouets rapportent un bénéfice de 500 francs
   On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   a) Justifie que les valeurs prises par X sont $\{0;500;1000\}$
   b) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calcule l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

4- Étude d'une nouvelle variable aléatoire.
   On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité.
   a) Calcule la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité (résultat arrondi à 10^{-4} près)
   b) Soit un lot de n jouets où n est un entier supérieur ou égal à 2.
   On note P_n la probabilité qu'au moins un des jouets subit avec succès le test de solidité.
   Détermine la valeur minimale de n pour que $P_n \geq 0,99$.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $g(x)=\frac{2}{e}x-1-\ln x$

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Étudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.
3. a) Justifie sur $\left]\frac{1}{e};\frac{e}{2}\right[$ l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α

   b) Donne un encadrement de α à 10^{-1} près.

   d) Calcule $g(e)$, puis justifier que : $\forall x\in\left]0;\alpha\right[\cup\left]e;+\infty\right[, g(x)>0$ et $\forall x\in\left]\alpha;e\right[, g(x)<0$

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{e}-x\ln x \text{ si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité graphique : 1cm.

1. Détermine l'ensemble de définition D_f de f
2. a) Calcule la limite de f en $+\infty$

   b) Montre que f est continue en 0.
3. a) Étudie la dérivabilité de f en 0

   b) Donne une interprétation graphique du résultat
4. a) Démontre que pour tout nombre réel x strictement positif, on a $f'(x)=g(x)$

   b) Donne le signe de $f'(x)$

   c) Donne le sens de variations de f

   d) Dresse le tableau de variation de f.
5. Calcule la limite en $+\infty$ du quotient $\frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat.
6. a) Démontre que $f(\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{e}$

   b) Construis la courbe (C). (On prendra $\alpha=0,5$ et $f(\alpha)=0,4$)

PARTIE C

Soit la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{2}x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$

1. Justifie que $h'(x)=x\ln x$
2. En déduis une primitive F de f sur $]0;+\infty[$
3. Soit un nombre réel t tel que $0<t<1$

   a) Calcule $A(t)=F(1)-F(t)$

   b) Détermine la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers 0