


DRENA ABIDJAN 1  LYCEE CLASSIQUE	DEVOIR DE MATHÉMATIQUES CLASSE : TD₆	ANNEE SCOLAIRE : 2022 - 2023 DUREE : 02 heures DATE : 11/01/2023
---	--	---

Exercice 1: (2 points)

Pour chacune des énoncés suivantes, dis si elle est Vraie(V) ou Fausse(F). Exemple : 5-V.

N°	Enoncés
1	Si $2 \in I, f(2) = 5$ et $(f^{-1})'(5) = -2$ alors $f'(2) = -\frac{1}{2}$
2	L'ensemble de définition de la fonction h définie par : $h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)$ est l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$
3	$\frac{\ln e^{-2}}{\ln e^{-1}} - \ln 2e = 1 - \ln 2$
4	La fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x} + \ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée f' vérifie $f'(x) = \frac{1+x}{x^2}$

Exercice 2: (2 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, trois réponses sont données dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse. Exemple : 1 - B

N°	Affirmations	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est la fonction	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$	$x \mapsto \frac{1}{2(x + \sqrt{x^2 + 1})}$
2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ est égale à :	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
3	L'expression de la fonction h qui est définie sur $] -2; 2[$ est :	$\ln(x^2 - 2)$	$\ln 4 - x^2 $	$\ln(4 - x^2)$
4	$\ln 125 - \ln 81 - \ln \frac{3}{5} + 2 \ln 243 =$	$4 \ln 5 - 5 \ln 3$	$5 \ln 5 - \ln 3$	$4 \ln 5 - \ln 3$

Exercice 3: (4 points)

On donne le polynôme P défini sur \mathbb{R} par : $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - x + 2$; α étant un nombre réel donné.

- Déterminer α pour que -1 soit un zéro de P .
- On pose $\alpha = -2$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 = 0$
 - Déterminer les réels b et c tels que $P(x) = (x + 1)(x^2 + bx + c)$
 - Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation $P(x) \leq 0$
- En déduire les solutions dans \mathbb{R} des inéquations :
 - $2 \ln x + \ln(x - 1) - \ln(x^2 + x - 2) \leq 0$
 - $\ln^3 x - 2 \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x + 2 \leq 0$

Exercice 4 : (7 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x - 3}{\ln x + 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$
 (Unités graphiques : $OI=2\text{cm}$; $OJ=1\text{ cm}$).

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f .
2. Démontrer que f est continue en 0
3. Démontrer que (C) admet une demi- tangente verticale au point d'abscisse 0.
4. a) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f(x)$
 b) Interpréter graphiquement ces résultats .
5. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction, pour $x \in]0; +\infty[\setminus \{e^{-1}\}$.
 b) Déterminer les variations de f et dresser son tableau.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.
7. Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $]\frac{1}{e}; +\infty[$
 a) Démontrer que h est une bijection de $]\frac{1}{e}; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser
 b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h ; h^{-1} est-elle dérivable en -3 ? Si oui calculer $(h^{-1})'(-3)$.
8. Tracer (T) , les éventuelles asymptotes de (C) et (C) elle - même.

Exercice 5 : (5 points)

Ton père souhaite augmenter le salaire de ses mineurs lorsque la production de sa mine d'or sera maximale. Une étude a révélé que la production annuelle de sa mine d'or (mesurée en kg par an) à partir de 2022, pourra être modélisée par la fonction f définie sur $[1; 10]$ par :

$f(t) = -t \left(\ln \frac{t}{7} - 1 \right)$, en fonction du temps t (en années) écoulé depuis l'année 2022. Par exemple, $f(1)$ représente la production annuelle de la mine d'or pour l'année 2023 .

Réponds aux préoccupations de ton père en fournissant les arguments.



Choisir. Ouvrir et former l'abandonneur.

DEVOIR DE NIVEAU n°2 DE MATHÉMATIQUES T¹^e C

Année scolaire : 2022-2023

Date : Lundi, 19 Décembre 2022

Durée : 3 heures

EXERCICE 1 (2 points)

Ecrire le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fautive.

- La fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$ est impaire.
- Soit f la bijection de $]\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $]-\infty; \frac{3}{2}[$ définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2x-1}$. Sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en 1 et $(f^{-1})'(1)$ est égal à -5 .
- La parabole de foyer $F(1; 3)$ et de directrice la droite (D) d'équation $x = -2$ a pour sommet le point S de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 3)$.
- L'une des directrices de l'hyperbole (H) d'équation : $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ est la droite d'équation $y = \frac{4}{5}$.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chaque affirmation du tableau suivant, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Choisis la bonne réponse.

- Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère le plan (P) d'équation $x + 2y + 2z - 3 = 0$ et le point $A(2; -1; -3)$. La distance de A à (P) est :
 a) 2 b) 3 c) $\frac{1}{3}$
- La courbe de la fonction g définie par $g(x) = x(\ln x)^2$ a un point d'inflexion au point d'abscisse :
 a) e^{-1} b) 1 c) e^{-2}
- La fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par $f(x) = \ln|\ln x|$ a pour ensemble de définition
 a) $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ c) $]1; +\infty[$
- Une primitive sur $[0; \frac{\pi}{4}]$ de la fonction f définie par $f(x) = \tan^5 x + \tan^3 x$ est donnée par :
 a) $F(x) = \tan^4 x$ b) $F(x) = \frac{1}{4} \tan^4 x$ c) $F(x) = -\frac{1}{4} \tan^4 x$

EXERCICE 3 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité : 1cm.

On donne les points $A(-1, 0)$ et $\Omega(4; 0)$. On note (E) l'ellipse de centre Ω dont un sommet est A et un foyer est O.

- Détermine les coordonnées des trois autres sommets de (E) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
 - Justifie que l'excentricité de (E) est égale à 0,8.
 - Donne une équation de la directrice (D) de l'ellipse (E) associé au foyer.
- Démontre qu'une équation de (E) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est : $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
 - Construis l'ellipse (E) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

EXERCICE 4 (7 points)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^n}; \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C_n) sa courbe représentative dans le un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit la fonction g_n définie $]0; +\infty[$ par $g_n(x) = \frac{x}{x+1} - n \ln(1+x)$

1- Démontre que g_n est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$,

2. Calcule $g_n(0)$ puis démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, g_n(x) \leq 0$.

3.a) Etudie la continuité de f_n en 0. (On distinguera les cas $n = 1$ et $n > 1$)

b) Etudie la dérivabilité de f_n en 0 puis interprète graphiquement le résultat

4. Calcule les limites de f_n en $+\infty$ puis interprète graphiquement le résultat.

5.a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'_n(x) = \frac{g_n(x)}{x^{n+1}}$.

b) Etudie les variations de f_n puis dresse son tableau de variation.

6.a) Montre que $\forall x \in]0; +\infty[, f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right) \times f_n(x)$

b) Déduis la position relative des courbes (C_{n+1}) et (C_n) puis établis que toutes les courbes (C_n) passent par deux points fixes que tu préciseras.

EXERCICE 5 (5 points)

Les élèves d'une classe de Terminale C du lycée classique d'Abidjan se rendent à L'ASECNA qui est une agence qui s'occupe entre autre de la sécurité aéroportuaire. Le responsable de la tour de contrôle affirme, ils ont la charge de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace (D_1) et (D_2) dont les représentations paramétriques dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j} ; \vec{k})$

(le plan $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ représentant le sol) sont données respectivement par :

$$(D_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad (D_2): \begin{cases} x = 2s \\ y = 1 - s \\ z = 3 + s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Le responsable affirme que deux avions volant simultanément sur ces deux routes aériennes ne peuvent pas entrer en collision. De retour en classe ; les élèves se demandent si l'affirmation du responsable est vraie.

A l'aide d'une démonstration argumentée, répond à leur préoccupation.