DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

Exercice 1 :

Dans tout le problème, on néglige les frottements et on prend pour l'intensité de pesanteur $g = 10 \text{ m/s}^2$. Un pendule simple est constitué par une bille ponctuelle M_1 de masse $m_1 = 200 \text{ g}$ suspendue au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur $\lambda = 0{,}9 \text{ m}$.

1 On écarte le pendule d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre verticale et on le lâche sans vitesse initiale. La vitesse de la bille M_1 lors de son passage à la position d'équilibre est $v = 3 \text{ m/s}$. Calculer la valeur de l'angle α.

2 Lors de son passage à la position d'équilibre la bille M_1 heurte, au cours d'un choc parfaitement élastique, une autre bille ponctuelle M_2 immobile de masse $m_2 = 100 \text{ g}$. (figure 2)
La vitesse de la bille M_2, juste après le choc, est $v_A = 4 \text{ m/s}$.
Calculer la vitesse de la bille M_1 juste après le choc en appliquant la conservation de la quantité de mouvement.

3 La bille M_2 est propulsée avec la vitesse V_A sur une piste qui comporte trois parties :

- Une partie horizontale AB,
- Une certaine courbe BC,
- Un arc de cercle CD, de rayon r et de centre O.

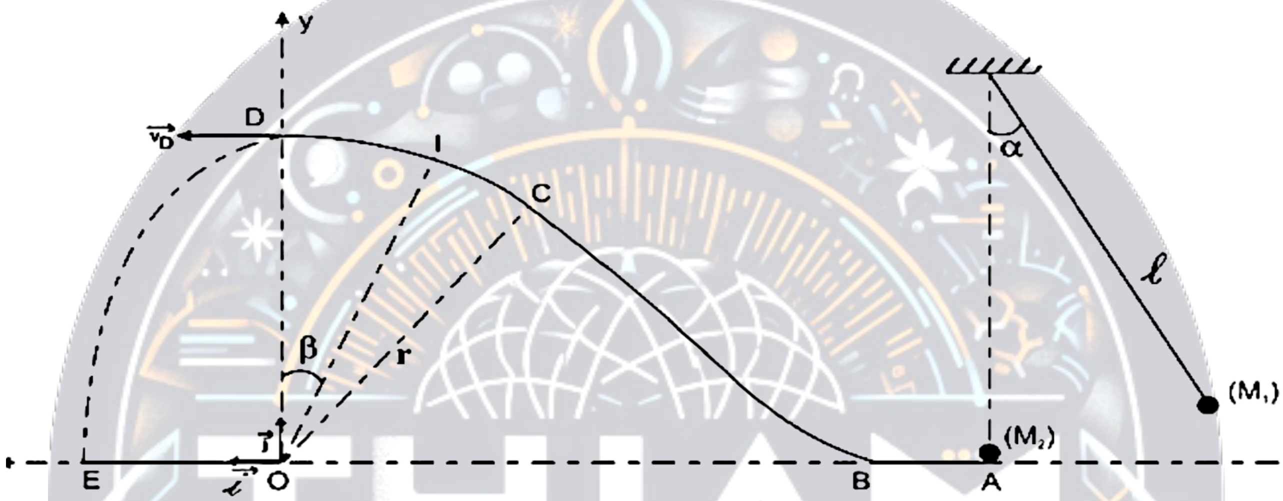
Les points O, A, B et E se trouvent dans un même plan horizontal.
3.1. Exprimer, en fonction de g, r, β et V_A, la vitesse de la bille M_2 au point I
3.2. Exprimer, en fonction de m_2, g, r, β et V_A, l'intensité de la réaction de la piste sur la bille M_2 au point I.

3.3. La bille M_2 arrive au point D avec une vitesse horizontale de valeur $V_D = 1\ m/s$. Calculer la valeur de r.

3.4. Arrivée au point D, la bille M_2 quitte la piste avec la vitesse V_D précédente et tombe en chute libre.

3.5. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire de la bille M_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

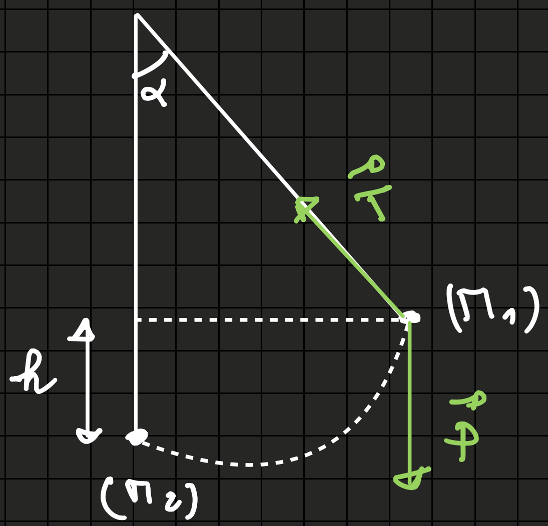
3.6. Calculer la distance OE.



Dynamique du point matériel

1) Calculons α

On a :



Système : bille (M_1)

RTSG :

BFA : $\vec{P}$; $\vec{T}$.

TEC : $\Delta E_c = \sum W(\vec{F})_{ext}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_f^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m V_i^2}}_{0} = W(\vec{P}) + \underbrace{\cancel{W(\vec{T})}}_{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V^2 = mgh \ , \quad \text{avec } h = \lambda(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V^2 = mg\lambda(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow V^2 = 2g\lambda(1-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow 1-\cos\alpha = \frac{V^2}{2g\lambda}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{V^2}{2g\lambda}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{V^2}{2g\lambda}\right)$$

AN $\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{3^2}{2\times 10\times 0{,}9}\right) = 60°$

D'où,

$$\alpha = 60°$$

2) Calculons la vitesse de la bille M_1.

On a :

+ Avant le choc :

$$\vec{P}_{avant} = m_1 \vec{V}$$

+ Après le choc :

$$\vec{P}_{après} = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_A$$

+ Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P}_{avant} = \vec{P}_{après}$$

$$\Rightarrow m_1 \vec{V}_1 = m_1 \vec{V}_1' + m_2 \vec{V}_A$$

Dans le sens du mouvement,

$$m_1 V_1 = m_1 V_1' + m_2 V_A$$

$$\Rightarrow V_1' = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_A}{m_1} = V_1 - \frac{m_2}{m_1} V_A$$

AN

$$V_1' = 3 - \frac{100}{200} \times 4 = 1\,m/s$$

D'où,

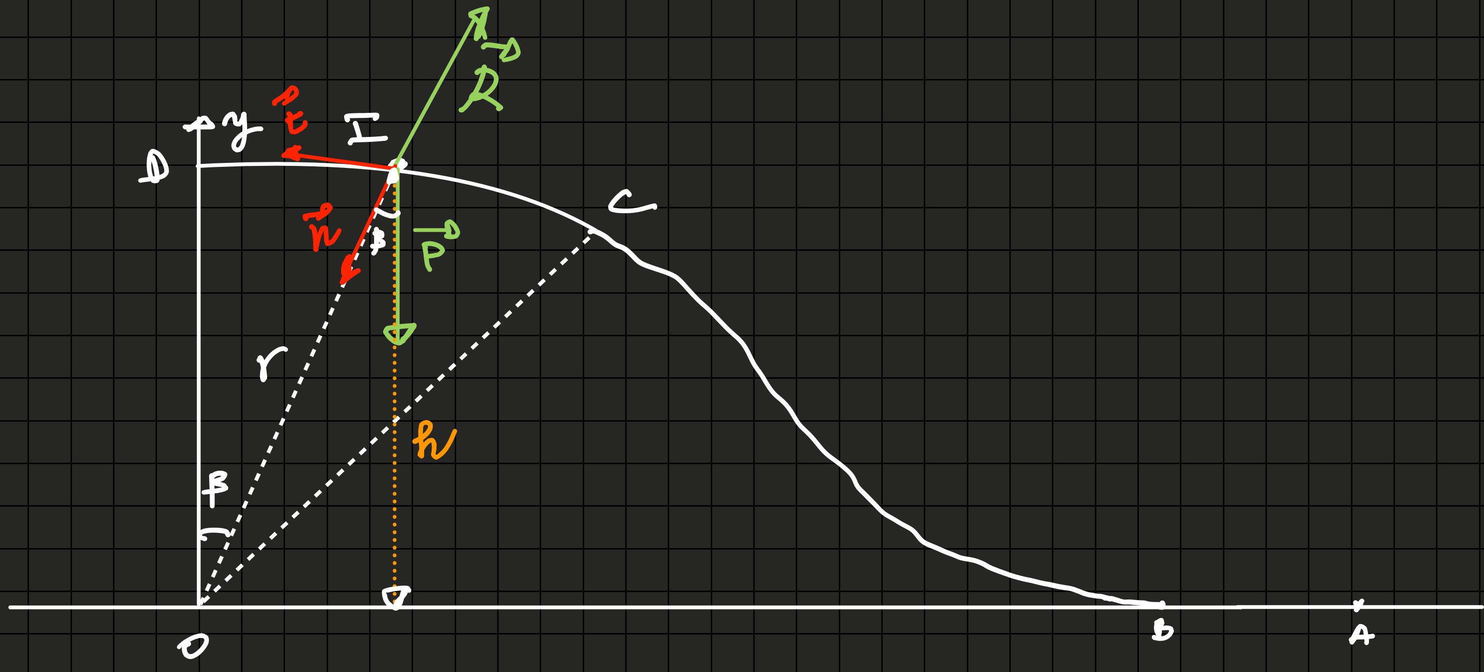
$$V_1' = 1\,m/s$$

3) 3.1) Expression de la vitesse de la bille M_2 au point I.

Appliquons le TEC entre A et I.

On a :

$$\frac{1}{2} m V_I^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = -mgh \quad ; \quad h = ?$$



Ainsi,
$$h = r\cos\beta$$

Donc,
$$V_I^2 - V_A^2 = -2gr\cos\beta$$
$$\Rightarrow \underline{V_I = \sqrt{V_A^2 - 2gr\cos\beta}}$$

3.2) Expression de l'intensité de R au point I.

TCI : $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

Suivant $\vec{n}$: $P\cos\beta - R = ma_n$
$$\Rightarrow mg\cos\beta - R = m\frac{V_I^2}{r}$$
$$\Rightarrow R = mg\cos\beta - m\frac{V_A^2 - 2gr\cos\beta}{r}$$
$$= m\left(g\cos\beta - \frac{V_A^2 - 2gr\cos\beta}{r}\right)$$
$$= m\left(\frac{gr\cos\beta - V_A^2 + 2gr\cos\beta}{r}\right)$$
$$= m\left(3g\cos\beta - \frac{V_A^2}{r}\right)$$

D'où,
$$\underline{R = m\left(3g\cos\beta - \frac{V_A^2}{r}\right)}$$

3.3) La valeur de r.

Appliquons le TEC entre A et D.

On a :

$$\frac{1}{2}mV_D^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = -mgh \text{ , avec } h = r$$

Ainsi,

$$V_D^2 - V_A^2 = -2gr$$

$$\Rightarrow r = \frac{V_A^2 - V_D^2}{2g}$$

AN

$$r = \frac{4^2 - 1}{2 \times 10} = 0{,}75 \text{ m}$$

D'où,

$$\underline{r = 0{,}75 \text{ m}}$$

3.4)

3.5) L'équation horaire

TCI : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix} \qquad \vec{v}\begin{vmatrix} V_x = V_D \\ V_y = -gt \end{vmatrix} \qquad \vec{OG}\begin{vmatrix} x = V_D t & (1) \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + r & (2) \end{vmatrix}$$

(1) $\Rightarrow t = \frac{x}{V_D}$ (3)

(3) dans (2) $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_D}\right)^2 + r$

D'où,

$$\underline{y = \frac{-g}{2V_D^2}x^2 + r}$$

3.6) Calculons OE.

Lorsque la bille est au sol ; $y = 0$

Ainsi,

$$\frac{-g}{2V_D^2}x^2 + r = 0$$

$$\Rightarrow x = V_D\sqrt{\frac{2r}{g}}$$

Ainsi,

$$x = OE = V_D\sqrt{\frac{2r}{g}}$$

AN

$$OE = \sqrt{\frac{2\times 0{,}75}{10}} = 0{,}39\,m$$

d'où,

$$OE = 0{,}39\,m$$

N.B: Le paiement est unique; il n’y aura pas de mensualités juste une inscription 😉😉