

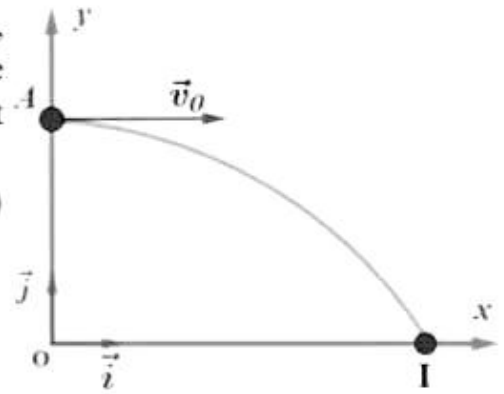
Exercice 1

On lance, à un instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale, un solide (S) de petites dimensions, de masse m , d'un point A qui se trouve à la hauteur h du sol. Le solide (S) tombe sur le sol au point d'impact I (figure).

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) lié à la terre supposé galiléen.

Données :

- Tous les frottements sont négligeables ;
 $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $h = OA = 1 \text{ m}$

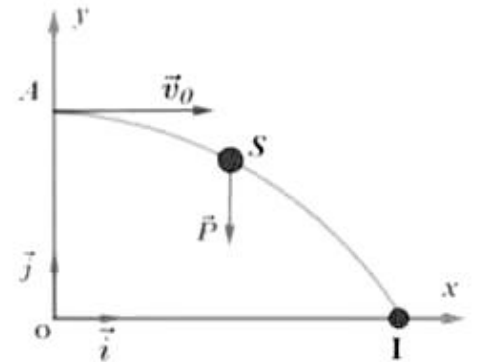


- 1 En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les expressions littérales des équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G .
- 2 En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire du mouvement de G .
- 3 Calculer la valeur de t_I , l'instant d'arrivé de (S) au sol en I .
- 4 On lance de nouveau, à un instant $t_0 = 0$, le solide (S) du point A avec une vitesse initiale $\vec{v}'_0 = 3 \cdot \vec{v}_0$. Déduire la valeur de l'instant d'arrivé de (S) au sol.

Solution

- 1 Équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de G :

- Système à étudier : $\{\text{corps}(S)\}$
- Bilan des forces extérieures :
- Poids du corps : \vec{P}
- Dans un référentiel terrestre suppose galiléen on applique la 2^{ème} loi de newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$



$$\begin{cases} m \cdot a_x = P_x = 0 \\ m \cdot a_y = P_y = -P = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x = cte = v_0 & (v_{0x} = v_0) \\ \frac{dy}{dt} = v_y = -g \cdot t & (v_{0y} = 0) \end{cases}$$

Donc : $x(t) = v_0 \cdot t$ et $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h$

- 2 L'expression littérale de l'équation de la trajectoire du mouvement de G :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 + h$$

- 3 La valeur de t_I l'instant d'arrivé de (S) au sol en I :

Dans ce cas : $y(t_I) = 0$ c.à.d $-\frac{g}{2v_0^2} \cdot x_I^2 + h = 0$ ou bien : $x_I = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$

$$\text{Or : } t_f = \frac{x_f}{v_0} \quad \text{alors} \quad t_f = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2 \times 1}{9,8}} = 0,45 \text{ s}$$

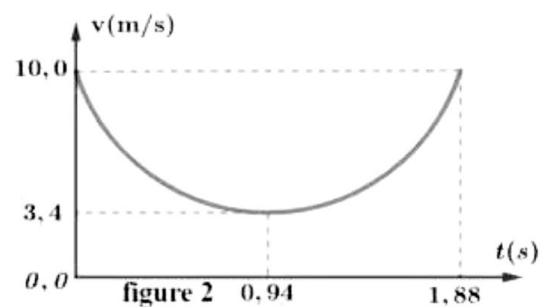
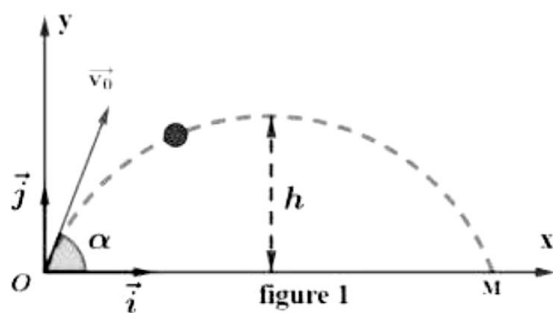
4 la durée de la chute ne dépend pas de la vitesse de lancée. Donc $t' = t_f = 0,45 \text{ s}$

Exercice 2

On lance un corps solide S de masse m et de centre d'inertie G avec une vitesse v_0 d'un point O comme l'indique la figure (1). Le mouvement du corps se fait dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) lié au référentiel terrestre et que l'on considère Galiléen. (figure 1) On néglige la poussée d'Archimède et les frottements de l'air. On donne l'expression du vecteur position et celle du vecteur vitesse à l'instant $t = 0$ dans le repère.

$$\vec{V}_o = v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} \quad \text{et} : \quad \vec{OG}_0 = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$$

La figure (2) représente les variations de la vitesse du projectile en fonction du temps entre les positions O et M .



- En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer la nature du mouvement selon Ox et selon Oy .
- Déterminer graphiquement :
 - La valeur de la vitesse v_0 .
 - La valeur de la composante v_{0x} du vecteur vitesse \vec{v}_0 .
- Déterminer la valeur de l'angle α et la valeur de v_{oy} .
- Représenter $v_x(t)$ et $v_y(t)$ dans le domaine $0 \leq t \leq 1,88 \text{ s}$
- Déduire la valeur de OM et celle de h .

Solution

1 la nature du mouvement

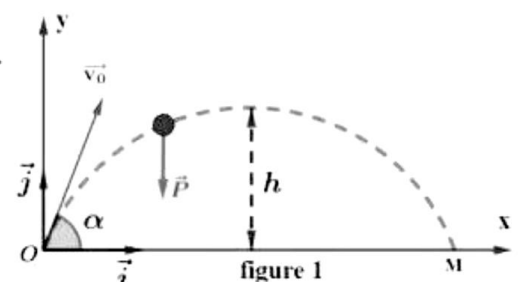
- Système étudié { le corps S }

- Bilan et représentation des forces : après le lancement est soumis à de son poids : \vec{P} .

- Les conditions initiale : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{ox} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{oy} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$

- Application de la deuxième loi de Newton sur le corps S :
 $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$

- Projection sur l'axe dans le repère (O, x, y) : $\begin{cases} 0 = m \cdot a_x \\ -P = m a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$



Selon l'axe Ox le mouvement de S est **rectiligne uniforme.**

Selon l'axe Oy le mouvement de S est rectiligne uniformément varié.

2 (a) Graphiquement la valeur de la vitesse initiale : $v_0 = 10 \text{ m/s}$

(b) la composante v_{0x} du vecteur vitesse \vec{v}_0 .

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \text{ d'où : } \begin{cases} \frac{dV_x}{dt} = 0 \\ \frac{dV_y}{dt} = -g \end{cases}$$

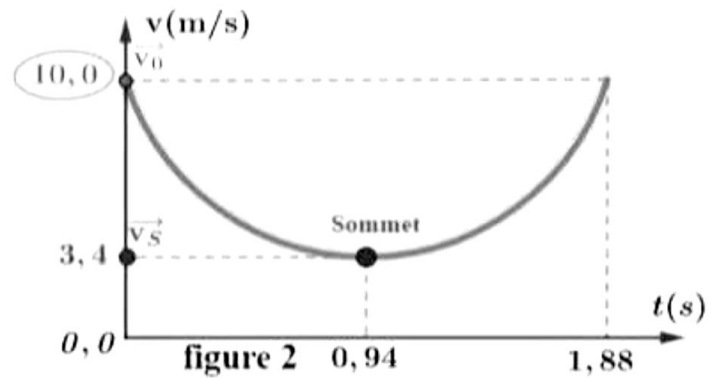
par intégration on trouve les composante du vecteur vitesse :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = C^{te} = v_{0x} \\ v_y = -g \cdot t + v_{0y} \end{cases}$$

Au sommet S de la trajectoire : $V_y = 0$

donc : $v_S = v_x = 3,4 \text{ m/s}$

Or la vitesse selon ox est constante sa valeur est égale à v_{0x} La valeur de la composante v_{0x} du vecteur vitesse \vec{v}_0 est : $v_{0x} = 3,4 \text{ m/s}$



3 la valeur de l'angle α et la valeur de v_{0y} :

$$\text{On a : } v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} = \frac{3,4}{10} = 0,34 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,34) \approx 70^\circ$$

$$\Rightarrow \text{à } t = 0 : v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha \Rightarrow v_{0y} = 10 \cdot \sin 70 = 9,4 \text{ m/s}$$

4 Représentations de $v_x(t)$ et $v_y(t)$ dans le domaine $0 \leq t \leq 1,88 \text{ s}$:

• La vitesse $v_{0x} = 3,4 \text{ m/s}$ est constant :

$$\bullet v_y = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

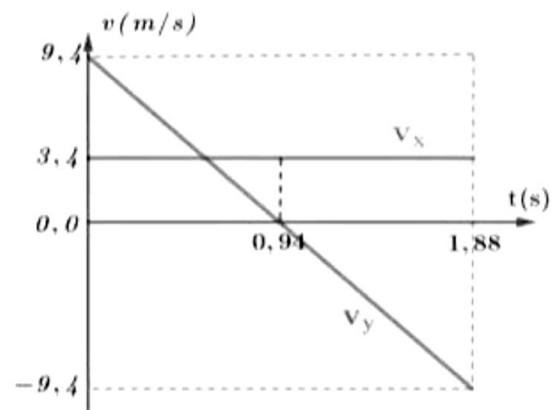
$$\text{A.N : } v_y = -10 \cdot t + 10 \cdot \sin 70$$

$$\Rightarrow \text{Donc : } v_y = -10 \cdot t + 9,4$$

$$\bullet \text{à } t = 0 : v_y = 9,4 \text{ m/s}$$

$$\bullet \text{à } t = 0,94 \text{ s : } v_y = 0$$

$$\bullet \text{à } t = 1,88 \text{ s : } v_y = -9,4 \text{ m/s}$$



5 Déterminons la valeur h .

• A l'instant $t = 0,94 \text{ s}$, au sommet S de la trajectoire : $y_s = h$

Remplaçons dans l'équation horaire $y = f(t)$:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot (\sin \alpha) \cdot t \quad \text{car : } y_0 = 0$$

$$\text{Donc : } h = y_s = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^2 + v_0 \cdot (\sin \alpha) \cdot t_s \Rightarrow \text{A.N :}$$

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 10 \times 0,94^2 + 10 \cdot (\sin 70) \cdot 0,94 = 4,42 \text{ m}$$

Déterminons la valeur de OM :

On peut s'assurer que $t = 1,88 \text{ s}$ est l'instant d'arrivée du projectile au point M en remplaçant dans

$$\text{l'équation horaire } y = f(t). \text{ En effet : } y = -\frac{1}{2} \cdot 10 \times 1,88^2 + 10 \cdot (\sin 70) \cdot 1,88 = 0$$

Donc $t_s = 1,88 \text{ s}$ est le temps de chute du projectile au point M.

$$\text{Remplaçons dans l'équation horaire } x = f(t) : \text{ On a : } v_{0x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow x = v_0 (\cos \alpha) \cdot t$$

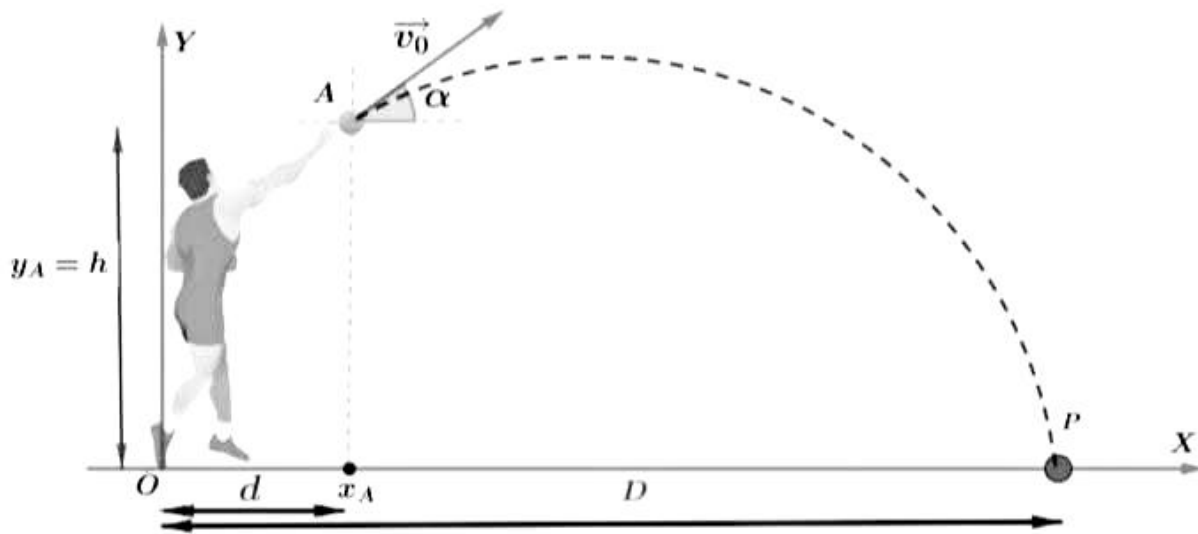
$$\text{Donc : } OM = x_s = v_0 (\cos \alpha) \times t_s = 10 \cdot \cos(70) \times 1,88 = 6,43 \text{ m}$$

Exercice 3

Une boule de masse m est lancée avec une vitesse initiale inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale depuis une position $A(x_A, y_A)$ à l'instant $t = 0$ (voir la figure), Pour simplifier les raisonnements, on ne travaillera que sur le centre d'inertie G de la boule et négligera la résistance de l'air .

Données :

$$\alpha = 45^\circ, h = 2,22 \text{ m}, d = 0,5 \text{ m}, D = 23,63 \text{ m}; g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$



- 1 Montrer que le mouvement est plan. Préciser le plan du mouvement.
- 2 Établir les équations horaires du mouvement de la boule dans le repère (O, x, y)
- 3 En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire et donner sa nature
- 4 Établir, en fonction de D, g, d, α et h , la valeur de la vitesse initiale \vec{v}_0 à communiquer à la boule pour réussir le jet. Faire l'application numérique
- 5 Calculer la hauteur maximale (par rapport au sol) atteinte par la boule
- 6 La boule arrive au point P avec un vecteur vitesse
 - a Déterminer les coordonnées de \vec{v}_p'
 - b En déduire la norme et la direction de \vec{v}_p

Solution

1 La nature du mouvement

- Système étudié { boule }
- Bilan des forces : ★ \vec{P} Son poids

Conditions initiales :
$$\begin{cases} x_0 = x_A = d \\ y_0 = y_A = h \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \\ V_{0z} = 0 \end{cases}$$

★ Dans un référentiel terrestre supposé galiléen, On applique la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{p} = m\vec{a}_G \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}_G$$

★ Projection sur les axes OX, OY, et OZ :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = -g = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z = 0 = \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad \text{Intégral 1+ les conditions I} \quad \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha = \frac{dx}{dt} \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha = \frac{dy}{dt} \\ v_z = 0 = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

$$\text{Intégral 2+ les conditions I} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + d \\ y(t) = -g \times \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t + h \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Donc $Z(t) = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est plan ,se fait sur le plan XOY

2 les équations horaires du mouvement de la boule dans le repère (O , x , y) sont :

$$\text{Selon question 1 on a} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + d \\ y(t) = -g \times \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t + h \end{cases}$$

3 l'équation cartésienne de sa trajectoire et sa nature

$$\begin{cases} t = \frac{x-d}{v_0 \cos \alpha} \\ y(t) = -\frac{1}{2}g \times \frac{(x-d)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (v_0 \sin \alpha) \frac{x-d}{v_0 \cos \alpha} + h \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}g \times \frac{(x-d)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (x-d) \cdot \tan \alpha + h$$

Donc il s'agit d'une trajectoire parabolique

4 L'expression et la valeur de la vitesse initiale \vec{v}_0 :

Au point P la portée : $y_p = 0$ et $x_p = D$

Donc l'équation de sa trajectoire devient : $y_p = 0 = -\frac{1}{2}g \times \frac{(x_p - d)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (x_p - d) \cdot \tan \alpha + h$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g \times \frac{(x_p - d)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = (x_p - d) \cdot \tan \alpha + h \quad \Rightarrow V_0^2 = \frac{g(x_p - d)^2}{(h + (x_p - d) \cdot \tan \alpha) 2 \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \times (D - d)^2}{2 \cos^2 \alpha (h + \tan \alpha \times (D - d))}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{10 \times (23,63 - 0,5)^2}{2 \cos^2 45 (2,22 + \tan 45 \times (23,63 - 0,5))}}$$

$$\Rightarrow v_0 = 14,5 \text{ m/s}$$

5 la hauteur maximale (par rapport au sol) atteinte par la boule :

On a au point S le sommet : $y_s = h_{\max}$ et $V_{ys} = 0$

$$\text{On sait que : } v_{ys} = 0 = -gt_s + v_0 \sin \alpha \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Remplaçons dans l'équation horaire de mouvement :

$$y_s = -g \times \frac{t_s^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t_s + h \quad \Rightarrow y_s = -\frac{g}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + h$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + h \quad \Rightarrow y_s = \frac{(14,5)^2 \times \sin^2 45}{2 \times 10} + 2,22 \quad \Rightarrow h_{\max} = y_s = 7,5 \text{ m}$$

6 a) Les coordonnées de \vec{v}_p au point P :

$$\text{On a : } \Rightarrow x_p = (v_0 \cos \alpha) t_p + d \quad \Rightarrow t_p = \frac{x_p - d}{v_0 \cos \alpha} \quad \Rightarrow t_p = \frac{D - d}{v_0 \cos \alpha}$$

Remplaçons dans les composante vitesse :

$$\Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_{px} = v_0 \cos \alpha \\ v_{py} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_{px} = v_0 \cos \alpha \\ v_{py} = -g \cdot \frac{(D - d)}{v_0 \cos \alpha} + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{A.N : } \vec{v} \begin{cases} v_{px} = 14,5 \times \cos 45 \\ v_{py} = -10 \times \frac{(23,63 - 0,5)}{14,5 \cos 45} + 14,5 \times \sin 45,5 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_{px} = 10,25 \text{ m/s} \\ v_{py} = -12,30 \text{ m/s} \end{cases}$$

b) La norme et la direction de \vec{v}_p

$$\|\vec{V}_p\| = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2} \Rightarrow \|\vec{V}_p\| = \sqrt{(10,25)^2 + (12,3)^2} \Rightarrow v_p = 16 \text{ m/s}$$

La direction : la droite est inclinée par rapport à l'axe OX avec un angle β

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{v_{py}}{v_{px}} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \frac{|v_{py}|}{v_{px}} = \tan^{-1} \frac{12,3}{10,25}$$

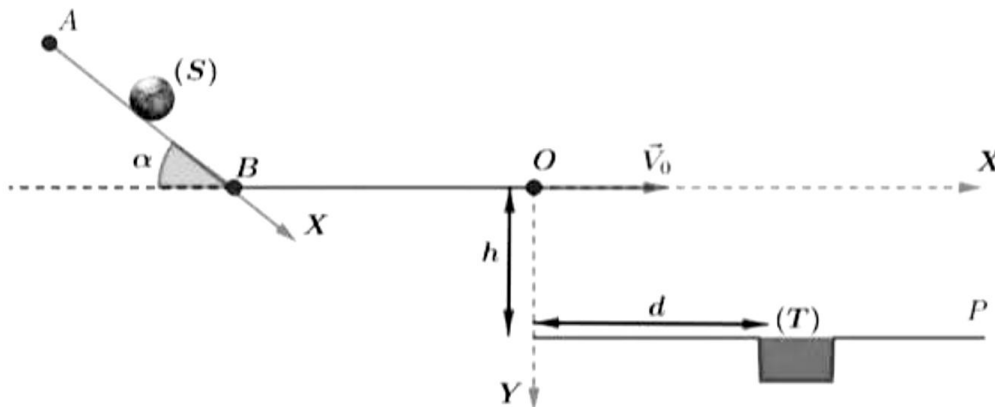
Exercice 4

un corps S ponctuel de masse $m = 0,2 \text{ kg}$ peut glisser sur une raille formée de deux portions :

- AB : une portion rectiligne de longueur $AB = L = 0,4 \text{ m}$ inclinée d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale.

- BO : une portion horizontale.

Le corps S est abandonné du point A sans vitesse initiale à une date prise comme origine des temps.



On néglige les frottements et l'action de l'air et on prend $g = 10 \text{ m/s}^{-2}$

1 Étude du mouvement sur la portion AB

- Trouver l'expression de l'accélération en fonction de g et α ; calculer sa valeur.
- Écrire dans le repère $(A; x)$ l'équation horaire du mouvement.
- Montrer que la vitesse de passage de S par le point B a pour valeur : $V_B = 2 \text{ m/s}$.

2 Étude du mouvement sur BO

Le corps (S) poursuit son mouvement sur la portion BO .

- Quelle est la nature du mouvement sur la portion BO .
- Déduire la valeur de V_o vitesse de passage de S par le point O .

3 Étude de la chute parabolique

Le corps S quitte la raille au point O originé du repère galiléen $(0; \vec{i}; \vec{j})$ à une date prise comme nouveau origine des temps.

- Trouver les équations horaires du mouvement.
- Déduire l'équation de la trajectoire.
- Sur un plan horizontal (P) situé à une hauteur h du point O se trouve un trou éloigné de l'axe $(0, y)$ d'une distance $d = 1$ m. Trouver la valeur de h pour que le corps S tombe dans ce trou.

Solution

- 1 a L'accélération en fonction de g et α

• système étudié le corps $\{S\}$

• Bilan des forces

★ \vec{P} : Son poids ★ \vec{R} : réaction du plan

• Dans un référentiel terrestre suppose galiléen, On applique la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

• projection sur $(0x)$: $P_x + R_x = m \cdot a_x \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha + 0 = m a_{Gx} \Rightarrow a_{Gx} = g \cdot \sin \alpha$

A.N : $a_x = 5 \text{ ms}^{-2}$

- b L'équation horaire du mouvement : condition initiale ($v_0 = 0, x_0 = x_A$)

On sait que : $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ Par primitive + condition initiale $\Rightarrow V_x(t) = a_x \cdot t + V_{0x} \Rightarrow v_x(t) = a_x \cdot t$

on sait que : $V_x = \frac{dx}{dt}$ Par primitive + condition initiale :

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 + x_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 + x_A$$

- c La valeur de la vitesse V_B :

Au point B :

$$\begin{cases} V_B = a_x \cdot t_B \\ x_B - x_A = AB = \frac{1}{2} a_x \cdot t_B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B = a_x \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{a_x}} \\ t_B = \sqrt{\frac{2 \cdot AB}{a_x}} \end{cases} \Rightarrow V_B = 2 \text{ ms}^{-1}$$

- 2 Étude du mouvement sur BO

- a • système étudié le corps $\{S\}$

• Bilan des forces

★ \vec{P} : Son poids

★ \vec{R} : réaction du plan

• Dans un référentiel terrestre suppose galiléen, On applique la 2ème loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G$$

• projection sur $(0x)$: $P_x + R_x = m \cdot a_x \Rightarrow R_x + R_x = m \cdot a_x \Rightarrow 0 + 0 = m \cdot a_x \Rightarrow m \cdot a_x = 0$ La vitesse donc est constant, le mouvement rectiligne uniforme

- b La valeur de V_0 vitesse de passage de S par le point O :

Le mouvement uniforme : $V_0 = V_B = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- 3 a les équations horaires du mouvement : **Les conditions initiale**

$$\begin{cases} x_0 = 0 & v_{0x} = v_0 \\ y_0 = 0 & v_{0y} = 0 \end{cases}$$

• système étudié le corps $\{S\}$

• Bilan des forces

★ \vec{P} : Son poids

★ Dans un référentiel terrestre suppose galiléen, On applique la 2ème loi de Newton :

$$\Rightarrow \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

★ Projection sur $(Ox)(Oy)$:
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = +g \end{cases}$$

Les équations horaires de la vitesse : On sait que
$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

Par primitive +CI $\Rightarrow \begin{cases} V_x = V_{0x} = V_0 \\ V_y(t) = g \cdot t + V_{0y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x = V_{0x} = V_0 \\ V_y(t) = g \cdot t \end{cases}$

L'équation horaires du mouvement :

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \text{Par primitive+CI} \begin{cases} x(t) = V_0 \cdot t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

b) L'équation de la trajectoire :
$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{V_0} \\ y = \frac{g}{2V_0^2} \cdot x^2 \end{cases}$$

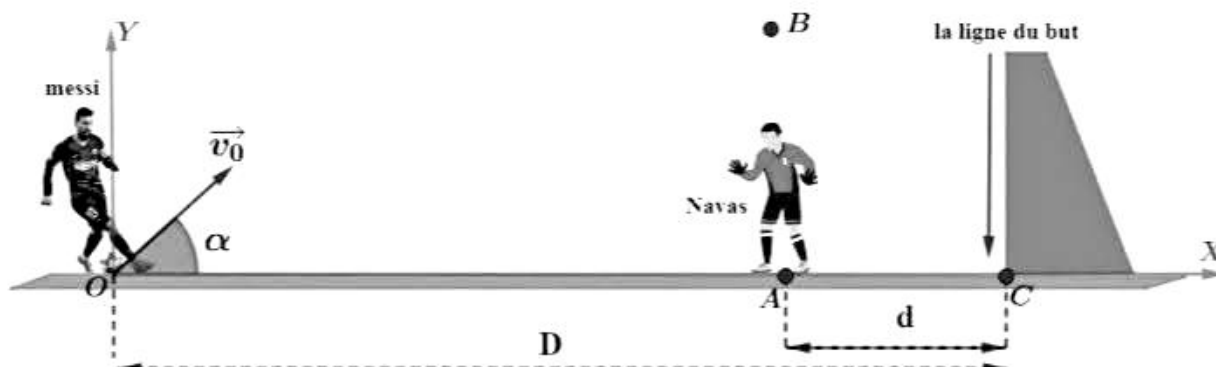
c) Les coordonnées de trou T sont :
$$\begin{cases} x_T = d \\ y_T = h \end{cases}$$

On sait que $y = \frac{g}{2V_0^2} \cdot x^2 \Rightarrow h = \frac{g}{2V_0^2} \cdot d^2 \Rightarrow h = \frac{10}{2 \times 2^2} \cdot 1^2 \Rightarrow h = 1,25m$

Exercice 6

Au cours du "classico" qui est un match de football entre les deux grands équipes Réal Madrid et Barcelone, et à la minute 92 quand le résultat entre les deux équipes était 2-2, Messi a vu que le gardien de but de real Madrid Navas est en une position avancée par rapport à son but alors Messi a décidé de marquer un but en envoyant la balle au-dessus de Navas qui se trouve en un point A à une distance $d = 7m$ de la ligne de but.

A $t_0 = 0$, Messie a reçu le ballon en un point O à une distance $D = 33 m$ de la ligne du but et il est lancé avec une vitesse \vec{V}_0 faisant un angle α avec le plan horizontal.



- 1 En utilisant la deuxième loi de Newton établir l'équation de la trajectoire du mouvement de la balle en fonction de v_0 , α et g
- 2 Quand Navas a vu que le ballon s'approche de lui, il a enlevé sa main et du point A, il a sauté verticalement vers le haut pour essayer de rattraper le ballon.

- a) Démontrer que la vitesse de la balle $V_0 = 20 \text{ m/s}$ et son angle $\alpha = 24.5$ pour qu'elle passe en un point B de coordonnées $(X_B = D - d; Y_B = 3\text{m})$, au-dessus des doigts de Navas et atteint la ligne du but au point C $(X_C = D; Y_C = 0)$?
- b) Démontrer que le point B ne représente pas le point le plus haut atteint par la balle? déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle
- c) Calculer la date t pour la balle atteint la point C?
- d) Calculer la vitesse V_c du ballon lorsqu'atteint le point C et déduire l'angle que fait V_c avec la direction positive de $X'X$
- 3 A la date $t_0 = 0$ quand Messie a lancé la balle, Sergio Ramos le défenseur de Real Madrid se trouve juste à côté de Navas à la distance de d de la ligne du but, élance sans vitesse initiale vers le but avec une accélération $\mathbf{a} = 3.2 \text{ m.s}^{-2}$ et suivant l'axe (OX) . Il a souhaité d'empêcher le but. Pour cela, il doit arriver avant que le ballon arrive sur la ligne de but.
- a) Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de Sergio selon l'axe (OX) .
- b) Déterminer la distance parcourue par Sergio pendant t .
- c) Est-ce que Messie doit marquer le but et Barcelona gagne, ou comme d'habitude la chance doit être à côté de Real Madrid et Ramos doit empêcher le but? justifier ta réponse

Solution

1 système étudié {Laballe}

- Bilan des forces
- Son poids \vec{P}

★ Conditions initiale : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha \\ V_{0y} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$

★ Dans un référentiel terrestre suppose galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{g}$$

★ Projection sur les axes OX et OY :

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = -g = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \text{intégrale + Condition I} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \Rightarrow \text{intégrale + Condition I} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

2 a) La valeur de la vitesse et son angle α :

★ Au point B des coordonnées $(X_B = D - d; Y_B = 3\text{m})$: On a

$$y_B = -\frac{1}{2}g \frac{x_B^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x_B \tan \alpha \Rightarrow y_B = -\frac{1}{2}g \frac{(D-d)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + (D-d) \tan \alpha \Rightarrow$$

$$3 = -5 \frac{26^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 26 \tan \alpha = \frac{-3380}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 26 \tan \alpha \Rightarrow \frac{-3380}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 3 - 26 \tan \alpha \quad (1)$$

★ au point C des coordonnées $(X_C = D; Y_C = 0)$: on a

$$y_C = -\frac{1}{2}g \frac{x_C^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_C \tan \alpha \Rightarrow y_C = -\frac{1}{2}g \frac{(D)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (D) \tan \alpha \Rightarrow$$

$$0 = -5 \frac{33^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 33 \tan \alpha = \frac{-5445}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + 33 \tan \alpha \Rightarrow \frac{-5445}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -33 \tan \alpha \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\frac{-3380}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}{\frac{-5445}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{3 - 26 \tan \alpha}{-33 \tan \alpha} \Rightarrow \frac{3380}{5445} = \frac{3 - 26 \tan \alpha}{-33 \tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{16335}{253110}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16335}{253110}\right) \Rightarrow \alpha = 24.5$$

★ La valeur de la vitesse initiale v_0 :

$$\frac{-5445}{v_0^2 \times \cos^2 \alpha} + 33 \times \tan \alpha = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{5445}{33 \times \tan \alpha \times \cos^2 \alpha} \Rightarrow v_0 = 20 \text{ m/s}$$

b) On a au point B : $x_B = v_0 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x_B}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow t = \frac{26}{20 \cdot \cos 24,5} = 1,43 \text{ s}$

Donc : $v_{yB} = -gt + v_0 \sin \alpha \Rightarrow v_{yB} = |-10 \times 1,43 + 20 \sin 24,5| \Rightarrow v_{yB} = 6 \text{ m/s}$

★ $v_{yB} \neq 0$ le point B ne représente pas le point le plus haut atteint par la balle

★ Lorsque la balle atteint la hauteur maximale (Sommet S) la vitesse est nulle $v_y = 0$

$$v_y = 0 = -g \cdot t_1 + v_0 \sin \alpha \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{20 \sin 24,5}{g} = 0.82 \text{ s}$$

Donc : $y_{\max} = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t_1 \Rightarrow y_{\max} = -5 \times 0.82^2 + 20 \sin 24,5 \times 0.82$

$$\Rightarrow y_{\max} = 3.42 \text{ m}$$

c) La date t_2 pour la balle atteint la point C de coordonnées ($X_C = D; Y_C = 0$) :

$$x_c = D = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{D}{v_0 \cos \alpha} = \frac{33}{20 \times \cos(24,5)} \Rightarrow t_2 = 3.97 \text{ s}$$

d) la vitesse V_c du ballon lorsqu'il atteint le point C :

$$\Rightarrow \vec{v}_c \begin{cases} v_{x,c} = v_0 \cos \alpha \\ v_{y,c} = -gt_2 + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_c \begin{cases} v_{x,c} = 20 \times \cos 24,5 \\ v_{y,c} = |-10 \times t_2 + 20 \times \sin 24,5| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_c \begin{cases} v_{x,c} = 18.2 \\ v_{y,c} = 10.93 \end{cases} \Rightarrow v_c = \sqrt{v_{x,c}^2 + v_{y,c}^2} = \sqrt{18.2^2 + 10.93^2} \Rightarrow v_c = 21.22 \text{ m/s}$$

3 a) L'équation horaire $x(t)$ du mouvement de Sergio selon l'axe (OX) :

On a l'accélération $a = 3.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est constant, donc le mouvement rectiligne uniformément varie

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \text{intégrale} + \text{Condition I } (v_0 = 0) \Rightarrow v(t) = a \cdot t + v_0 \Rightarrow v(t) = a \cdot t$$

$$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{intégrale} + \text{Condition I } (v_0 = 0, x_0 = 0) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 1.6t^2$$

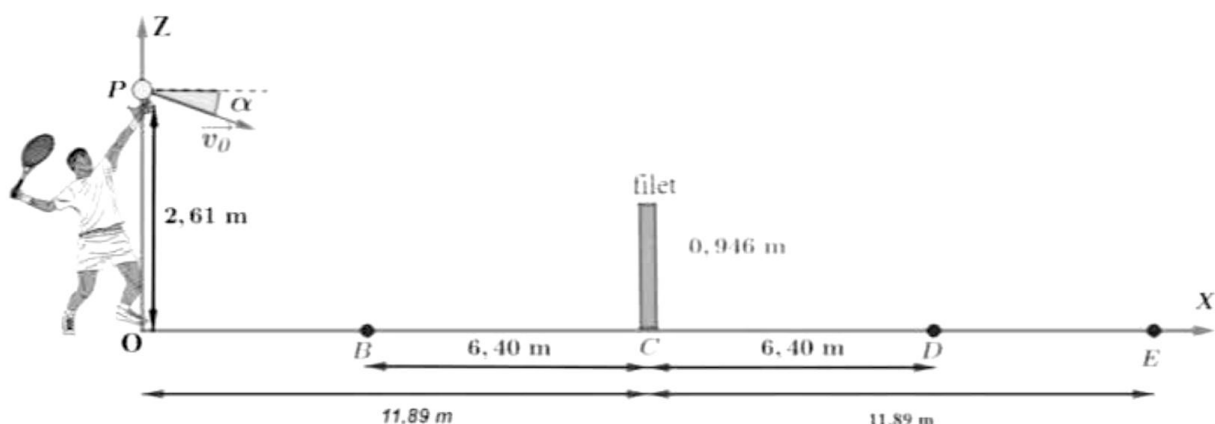
b) la distance parcourue par Sergio pendant t_2 :

$$\text{On a : } d = x(t_2) = \frac{1}{2} a \cdot t_2^2 = 1.6 \times 3,97^2 \Rightarrow d = 25.2 \text{ m}$$

c) La distance que Ramos peut parcourir pour que le ballon arrive au but est 25.2 m, alors il peut arriver à la ligne de but avant le ballon, et par suite Ramos empêche le but.

Exercice 8

Au tennis, un service est correct si la balle touche le sol derrière le filet sur une distance allant du filet jusqu'à 6,40 m, c'est-à-dire, par rapport au schéma, qu'une balle frappée par un joueur en P à la verticale de O doit toucher le sol entre C et D. De plus, une balle de tennis a un rayon de 3,2 cm, et elle ne doit pas toucher le filet qui est haut de 0,914 m; donc le centre d'inertie de la balle doit passer au moins à 0,946 m au-dessus du sol lorsqu'elle passe le filet.



On considère que la trajectoire de la balle se passe dans un plan vertical (xOz). On négligera les frottements de l'air. La balle est touchée au point P situé à $z_0 = 2,61$ m à la verticale de A avec la vitesse initiale \vec{v}_0 et faisant un angle α avec l'horizontale. On prendra pour l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

- 1 La balle est jugée bonne si et elle touche le sol entre C et D. Quelles sont les abscisses x_C et x_D ?
- 2 Donner les composantes de la vitesse initiale : V_{0x} et V_{0z}
- 3 Établir les équations horaires de : $x(t)$ et $y(t)$.
- 4 En déduire l'équation de la trajectoire dans le plan (xoz).
- 5 De l'équation précédente, exprimer la vitesse V_0 .
- 6 L'angle de départ est $\alpha = 7^\circ$
 - a) Quelle doit être la vitesse V_0 pour que la balle touche le sol en D? Passe t-elle au dessus du filet sans le touche.
 - b) Quelle doit être la vitesse V_0 pour que la passe juste au dessus du filet? Touche t-elle le sol entre C et D

Solution

- 1 D'après le schéma, on voit de manière évidente :

$$x_C = 11,89\text{m} \text{ et } x_D = OC + CD = 11,89 + 6,40 = 18,29\text{m}$$

- 2 D'après le schéma, on a les composantes du vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 :

$$\vec{v} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0z} = -v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

- 3 • Le système étudié la balle de tennis :
 - Les forces qui agissent sur le système sont :

★ le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

★ les frottements de l'air sur la balle, mais qui sont négligés (voir énoncé).

Il s'agit donc d'un mouvement de chute libre.

★ Pour faire l'étude de son mouvement on choisit de prendre un référentiel terrestre (supposé galiléen)

On applique la 2^{ème} loi de Newton sur le système :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 = dv_x/dt \\ a_z = -g = dv_z/dt \end{cases} \Rightarrow \text{intégrale + Condition I} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_z = -gt - v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = dx/dt \\ v_z = dz/dt \end{cases} \Rightarrow \text{intégrale + Condition I} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin \alpha t + z_0 \end{cases}$$

4 l'équation de la trajectoire dans le plan (xOz)

Pour écrire l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les composantes du vecteur position. on utilise la composante x pour exprimer le temps sous la forme :

$$\Rightarrow x = v_0 \cos \alpha \quad \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Remplaçons l'expression de t dans la composante Z :

$$z = \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 - v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + z_0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \tan \alpha + z_0$$

5 De l'équation de la trajectoire, on obtient :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \tan \alpha + z_0 \Rightarrow \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -x \tan \alpha + z_0 - z$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{gx^2}{(z_0 - z) - x \tan \alpha}}$$

6 L'angle de départ est $\alpha = 7^\circ$

- (a) lorsque la balle touche le sol en D, $z = 0$ à $x_D = 18,29m$

Remplaçons dans l'expression de la vitesse v_0 on obtient :

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{gx^2}{(z_0 - z) - x \tan \alpha}} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos(7^\circ)} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{9,81 \times (18,29)^2}{(2,61 - 0) - 18,29 \times \tan(7^\circ)}}$$

$$v_0 = 67,619 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 243,43 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Avec cette vitesse, à la distance $x_C = 11,89m$, la hauteur de la balle est de :

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} - x \tan \alpha + z_0$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} \times 9,81 \times \frac{(11,89)^2}{(67,619)^2 \cos^2(7^\circ)} - 11,89 \tan(7^\circ) + 2,61$$

$$\Rightarrow z = 211,41 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

La hauteur de la balle est supérieure à la hauteur de filet $0,946m$: elle passe au-dessus du filet.

- (b) au point c la hauteur $z = 0,946 \text{ m}$ à $x_C = 11,89 \text{ m}$,

Remplaçons dans l'expression de la vitesse v_0 on obtient :

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{gx^2}{(z_0 - z) - x \tan \alpha}} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{\cos(7^\circ)} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{9,81 \times (11,89)^2}{(2,61 - 0) - 11,89 \times \tan(7^\circ)}}$$

$$\Rightarrow v_0 = 58,727 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 211,41 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Si elle touche le sol, on a $z = 0$ pour x donnée par :

$$\Rightarrow z = 0 = -\frac{1}{2} \times 9,81 \times \frac{x^2}{(58,727)^2 \cos^2(7^\circ)} - x \tan(7^\circ) + 2,61$$

Soit l'équation du second degré : $-1,444 \times 10^{-3}x^2 - 0,1228x + 2,61 = 0$

On résout cette équation du deuxième degré en calculant le discriminant :

$$\Delta = (-0,1228)^2 - 4(-1,444 \times 10^{-3}) \times 2,61 = 0,03015$$

et les deux racines : $x_1 = \frac{-(-0,1228) - \sqrt{0,03015}}{2(-1,444 \times 10^{-3})} = 17,603 \text{ m}$

et $x_2 = \frac{-(-0,1228) + \sqrt{0,03015}}{2(-1,444 \times 10^{-3})} = -102,644 \text{ m}$

Seule la position positive est à retenir, soit $x_1 = 17,603 \text{ m}$, et elle se trouve entre $x_C = 11,89 \text{ m}$ et $x_D = 18,29 \text{ m}$. La balle touche bien le sol dans les limites.

Exercice 9

Étude du mouvement du centre d'inertie d'un système mécanique

Le saut en longueur à moto est une épreuve sportive de performance où il y a un véritable défi de sauter le plus loin à partir d'un espace défini.

Cet exercice se propose d'étudier le mouvement du centre d'inertie G d'un système (S) formé d'un motard et d'une moto se déplaçant sur une piste de compétition.

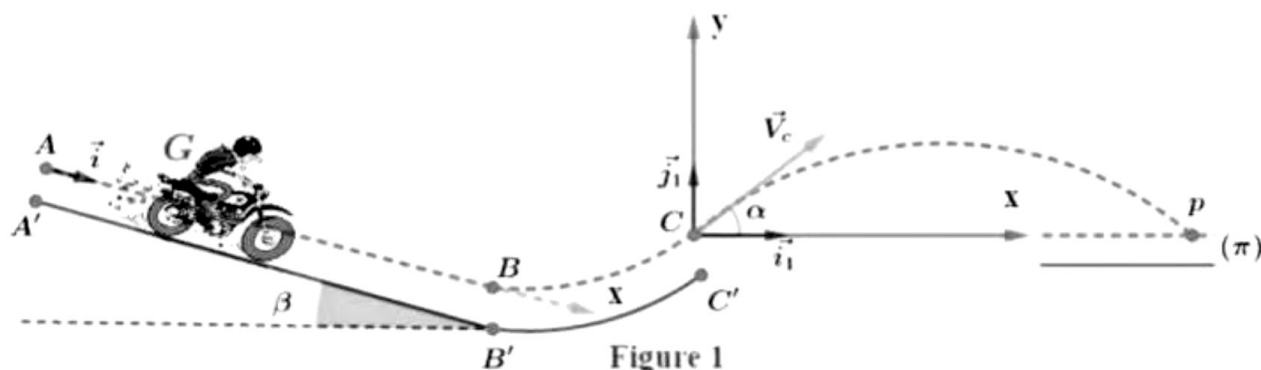
Cette piste est formée :

- d'une partie rectiligne A'B' inclinée d'un angle β par rapport à l'horizontale ;
- d'un tremplin B'C' circulaire ;
- d'une zone d'atterrissage (π) plane et horizontale. (figure 1).

Dans tout l'exercice, les frottements sont négligés et l'étude du mouvement du centre d'inertie G est réalisée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Données :

- L'angle $\beta = 10^\circ$
- Intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ ms}^{-2}$
- Masse du système (S) : $m = 190 \text{ kg}$



I- Étude du mouvement sur la partie A'B'

A un instant choisi comme origine des dates ($t = 0$), le système (S) s'élance sans vitesse initiale, d'une position où le centre d'inertie G est confondu avec le point A.

Le système est soumis, au cours de son mouvement sur la partie A'B', à la réaction du plan incliné, à son poids et à une force motrice \vec{F} constante, dont la ligne d'action est parallèle à la trajectoire de G et le sens est celui du mouvement. Pour étudier le mouvement de G au cours de cette phase, on choisit un repère d'espace (A, \vec{i}) parallèle à A'B' (figure 1) et on repère la position de G par son abscisse x.

1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'expression de l'accélération a_G du mouvement de G est : $a_G = \frac{F}{m} + g \cdot \sin \beta$

2 La courbe de la figure 2 représente les variations de la vitesse instantanée V_G du centre d'inertie G en fonction du temps.

En exploitant cette courbe, trouver la valeur de l'accélération a_G

3 Dédurre l'intensité F de la force motrice.

4 Écrire l'expression numérique de l'équation horaire $x = f(t)$ du mouvement de G.

5 Sachant que $AB = 36\text{m}$, déterminer l'instant t_B de passage de G par le point B.

6 Calculer la vitesse V_B de passage de G par le point B.

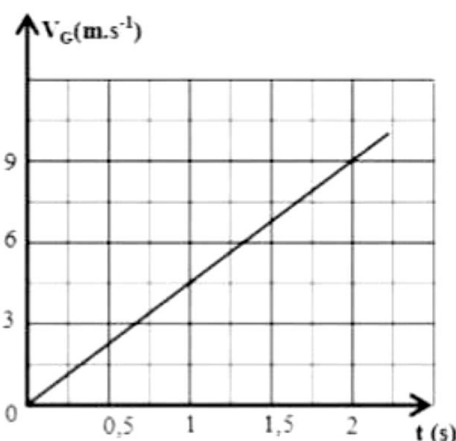


Figure 2

II- Étude du mouvement de G lors de la phase du saut

A un instant choisi comme nouvelle origine des dates ($t = 0$), le système (S) quitte le tremplin lors du passage de G par le point C avec une vitesse \vec{V}_C formant un angle $\alpha = 18^\circ$ avec l'horizontale. (S) retombe en une position où le point G se confond avec le point P. On suppose que le système n'est soumis qu'à son poids au cours de cette phase. L'étude du mouvement est effectuée dans le repère orthonormé $(C, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ indiqué sur la figure 1.

1 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que les équations différentielles vérifiées par les coordonnées $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du centre d'inertie G dans le repère $(C, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$ s'écrivent ainsi :

$$\frac{dx_G}{dt} = V_C \cdot \cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{dy_G}{dt} = -g \cdot t + V_C \cdot \sin \alpha$$

2 Les expressions numériques des équations horaires $x_G(t)$ et $y_G(t)$ du mouvement de G s'écrivent ainsi :

$$x_G(t) = 19,02 \cdot t$$

et

$$y_G(t) = -5 \cdot t^2 + 6,18 \cdot t$$

(x_G et y_G exprimées en mètre et t en seconde)

Vérifier que la vitesse de G au point C est : $V_C = 20\text{m.s}^{-1}$

3 On considère qu'un saut est réussi si la condition $CP \geq 30\text{m}$ est vérifiée.

- a) Montrer que le saut effectué dans ce cas n'est pas réussi.
- b) Déterminer la vitesse minimale V_{\min} avec laquelle doit passer G par le point C pour que le saut soit réussi.

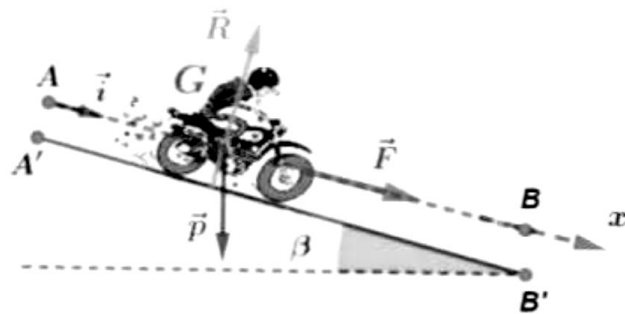
Solution

I- Étude du mouvement sur la partie A'B' :

1 Le système (S) est soumis au forces suivantes :

- ★ Le poids \vec{P}
 - ★ La réaction du plan incliné \vec{R}
 - ★ La force motrice \vec{F}
- D'après la deuxième loi de Newton

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$



La projection sur l'axe (Ax) : $P_x + R_x + F_x = m \cdot a_x \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \beta + 0 + F = m \cdot a_G$

$$\Rightarrow a_G = \frac{F + m \cdot g \sin \beta}{m} \Rightarrow a_G = \frac{F}{m} + g \cdot \sin \beta$$

2 La courbe $V_G = f(t)$ est une fonction linéaire $\Rightarrow V_G = kt$

$$\text{Avec : } k = \frac{\Delta V_G}{\Delta t} = \frac{9 - 0}{2 - 0} = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \Rightarrow V_G = 4,5t$$

$$\text{Et d'autre part on a : } a_G = \frac{dV_G}{dt} = \frac{d(4,5t)}{dt} \Rightarrow a_G = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3 D'après le résultat de la question 1 : $m \cdot g \cdot \sin \beta + F = m \cdot a_G$

$$\Rightarrow F = m \cdot [a_G - g \sin \beta] \Rightarrow F = 190 \cdot [4,5 - 10 \times \sin 10] \Rightarrow F = 525,07 \text{ N}$$

4 Puisque la trajectoire est rectiligne et $a_G = Cte \neq 0$ Donc : le mouvement est rectiligne uniformément varié (uniformément accéléré). D'où l'expression de l'équation horaire s'écrit sous la forme :

$$\blacksquare x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \quad \text{avec : } a_G = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad v_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \times 4,5 \cdot t^2 + 0 \times t + 0 \Rightarrow x(t) = 2,25t^2$$

5 On a : $x(t) = 2,25 \cdot t^2$ à l'instant t_B : $x(t_B) = 2,25 \cdot t_B^2$ avec $x(t_B) = x_B = AB$

$$\Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{AB}{2,25}} \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{36}{2,25}} \Rightarrow t_B = 4 \text{ s}$$

6 On a : $V_G = 4,5 \cdot t$ à l'instant t_B : $V_B = 4,5 \cdot t_B$

$$\Rightarrow V_B = 4,5 \times 4 \Rightarrow V_B = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

II- Etude du mouvement de G lors de la phase du saut :

1 Le système (S) est soumis à son poids \vec{P}

D'après la deuxième loi de Newton : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\star \text{ La projection sur l'axe } Ox : P_x = m \cdot a_x \Rightarrow 0 = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = c_1$$

$$\text{À l'instant } t = 0 : v_{x0} = c_1 = v_C \cdot \cos \alpha \quad \text{d'où : } v_x = v_C \cdot \cos \alpha \quad \text{Alors : } \frac{dx}{dt} = v_C \cdot \cos \alpha$$

$$\star \text{ La projection sur l'axe } Oy : P_y = m \cdot a_y \Rightarrow -mg = m \cdot a_y \Rightarrow a_y = -g$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y = -gt + c_3$$

$$\text{À l'instant } t = 0 : v_{y0} = c_3 = v_C \cdot \sin \alpha \quad \text{d'où : } v_y = -g \cdot t + v_C \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Alors : } \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_C \cdot \sin \alpha$$

2 On a : $\frac{dx_G}{dt} = v_C \cdot \cos \alpha \Rightarrow x_G(t) = (v_C \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_3$

À l'instant $t=0$: $x_G(0) = c_3 + 0$ d'où : $x_G(t) = (v_C \cdot \cos \alpha) \cdot t$

Et d'après la donnée : $x_G(t) = 19,02 \cdot t$ on déduit : $v_C \cdot \cos \alpha = 19,02$

$\Rightarrow v_C = \frac{19,02}{\cos \alpha} \Rightarrow v_C = \frac{19,02}{\cos 18} \Rightarrow v_C = 20m \cdot s^{-1}$

3 a) Au point P : $y_P = 5t_P^2 + 6,18t_P$ et $y_P = 0$ $5t_P^2 + 6,18t_P = 0$
 $\Rightarrow 5t_P + 6,18 = 0 \Rightarrow t_P = 1,236s$

Et d'autre part : $x_P = 19,02 \cdot t_P \Rightarrow x_P = 19,02 \times 1,236 \Rightarrow x_P = 23,51 m$

Or : $x_P = 23,51m < 30m \Rightarrow$ la saut effectué n'est pas réussi.

b) On a : $x_G(t) = (v_C \cdot \cos \alpha) \cdot t$ et $y(t) = \frac{-1}{2} \cdot gt^2 + (V_C \cdot \sin \alpha) \cdot t$

$\Rightarrow t = \frac{x}{V_C \cdot \cos \alpha} \Rightarrow y = \frac{-g}{2 \cdot V_C^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha$

À la position P : On a $x_P = CP = 30m$ et $y_P = 0$

$\Rightarrow \frac{-g}{2 \cdot V_{\min}^2 \cdot \cos^2 \alpha} x_P^2 + x_P \cdot \tan \alpha = 0 \Rightarrow V_{\min} = \sqrt{\frac{g \cdot x_P}{\sin(2\alpha)}}$

A.N : $V_{\min} = \sqrt{\frac{10 \times 30}{\sin(2 \times 18)}} \Rightarrow V_{\min} = 22,59m \cdot s^{-1}$

Exercice 10

Étude de mouvement plan d'un corps solide

Le saut d'obstacles et des tranchées par les voitures ou par les motos est considéré l'un des défis qu'affrontent les aventurières.

Cet exercice a pour objectif de connaître quelques conditions qui doivent être satisfaites pour valider ce défi.

Une course d'aventure est constituée d'une piste rectiligne AB et d'une piste BO inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal AC et un fossé de largeur D (figure 1).

On modélise {voiture + Conducteur} par un système S indéformable de masse m et de centre d'inertie G.

On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans un repère géocentrique considéré Galiléen et on néglige l'action de l'air sur le système (S), ainsi que les dimensions de ce dernier par rapport aux distances parcourus.

Données :

-La masse du système (S) : $m = 1200kg$

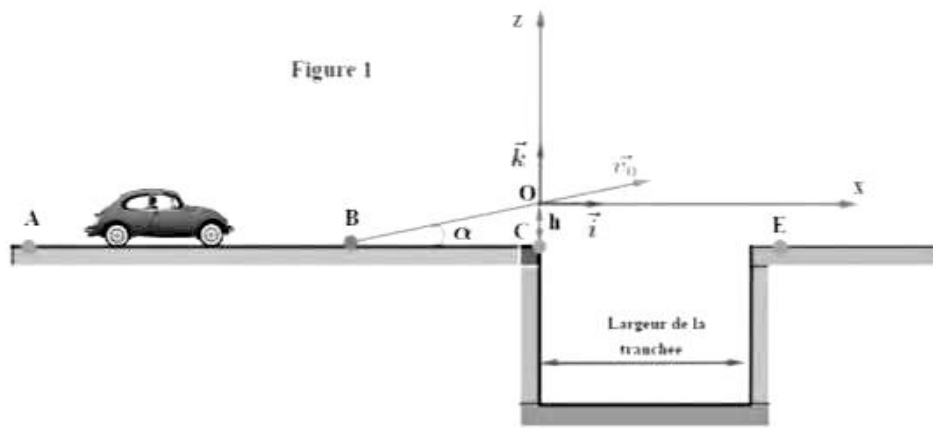
- L'angle $\alpha = 10^\circ$

-L'intensité de pesanteur $g = 9,80ms^{-2}$

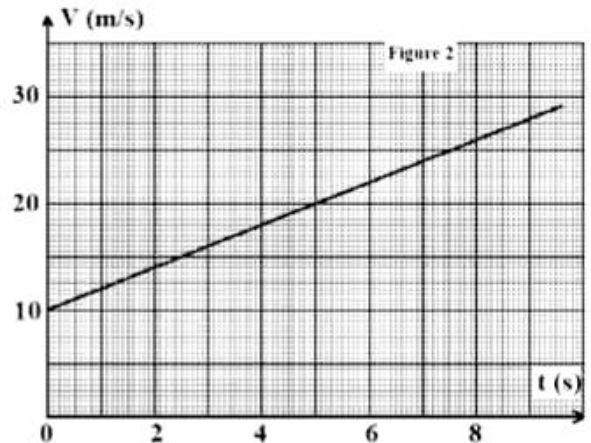
1 l'étude du mouvement rectiligne du système (S)

Le système (S) passe par le point A à l'instant $t_0 = 0$ et par le point B à l'instant $t_1 = 9,45s$.

La figure 2 représente les variations de la vitesse v du mouvement de G sur la piste AB en fonction du temps



- Quelle est la nature du mouvement de G sur la piste AB? Justifier.
- Déterminer graphiquement la valeur de l'accélération a du mouvement de G.
- Calculer la distance AB.
- Sur la piste BO, le système (S) est soumis à la force \vec{F} du moteur et à une force de frottements \vec{f} d'intensité $f = 500\text{N}$. On considère que les deux forces sont constantes et parallèles à la piste BO.
Trouver en appliquant la deuxième loi de Newton, l'intensité F de la force poussant pour que le système ait la même valeur d'accélération a durant son mouvement sur la piste AB.



2- Étude du mouvement du système (S) dans le champ de pesanteur uniforme.

Le système (S) arrive au point O avec une vitesse \vec{v}_0 de valeur $v = 30\text{ms}^{-1}$ et poursuit son mouvement pour qu'il tombe au point E éloigné du point C par une distance $CE = 43\text{m}$. On prend l'instant où le système (S) commence à dépasser le fossé comme nouvelle origine du repère du temps, tel que G est coïncidé avec O l'origine du repère (\vec{Ox}, \vec{Oz}) (Figure 1)

- Établir les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de G dans le repère (\vec{Ox}, \vec{Oz})
- En déduire l'équation de la trajectoire et déterminer les coordonnées de son sommet.
- Déterminer la hauteur h entre les points C et O.

Solution

1 l'étude du mouvement rectiligne du système (S)

- La fonction $v = f(t)$ est une fonction affine donc le mouvement de G sur AB est rectiligne uniformément varié.
- $v = a.t + v_0$ avec : $v_a = 10\text{ m/s}$ et $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 10}{5 - 0} = 2\text{ m/s}^2$
- Équation de la trajectoire s'écrit sous la forme

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_a \cdot t = t^2 + 10.t$$

■ A l'instant $t=0 \Rightarrow v_0 = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $x_0 = x_A \Rightarrow t^2 + 10.t + x_A$

■ A l'instant $t_1 = 9,45\text{s} \Rightarrow x(t_1) = t_1^2 + 10.t_1 + x_A = x_B$

Donc $AB = t_1^2 + 10t_1 = 9,25^2 + 9,25 \cdot (10) = 183,8m$

d) ♣ Systeme étudié (conducteur+voiture) :

♣ Bilan des forces :

\vec{P} poids de S.

\vec{R} : Réaction du plan de contact .

\vec{F} : force motrice.

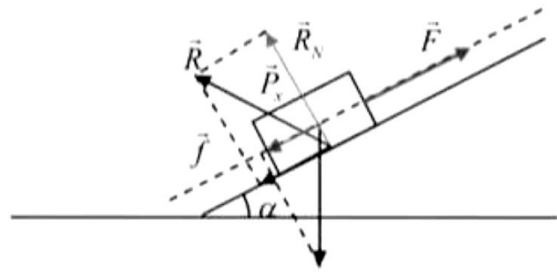
♣ appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f} + \vec{R}_N + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

♣ Projection selon l'axe (\vec{OX}) :

$$P_x + f_x + R_{Nx} + F_x = m \cdot a_x \Rightarrow -mg \cdot \sin \alpha - f + F = m \cdot a$$

$$F = m \cdot a + f + mg \cdot \sin \alpha \Rightarrow F = 500 + 1200 \cdot (9,8) \cdot \sin 10 + 1200 \cdot (2) \Rightarrow F \approx 4942N$$



1 Étude du mouvement du système (S) dans le champ de pesanteur uniforme.

a) les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement de G dans le repère (\vec{Ox}, \vec{Oz})

♣ Système étudié (corps S)

♣ Bilan des forces : \vec{P} : poids de S

♣ appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

♣ Conditions initiales : $O \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{array} \right.$ et $\vec{v}_0 \left\{ \begin{array}{l} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{array} \right.$

On a $\vec{a} = \vec{g} \left\{ \begin{array}{l} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{array} \right.$ ■ Projection sur (O, \vec{i}) : $0 = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = 0$

$$\Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow \text{par intégration : } v_x = C^{te} = v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow x(t) = (v_0 \cdot \cos \alpha)t + x_0 \quad (x_0 = 0) \Rightarrow x(t) = (v_0 \cdot \cos \alpha)t \Rightarrow x = 29,54t$$

■ projection sur oz : $a_z = \frac{dv_z}{dt} = -g$ par intégration $\Rightarrow v_z = -g \cdot t + v_{0z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha$

$$\Rightarrow v_z = \frac{dz}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \Rightarrow \text{par intégration } z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t + z_0$$

$$A(t=0, z_0=0) \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \Rightarrow \text{A.N : } z = -4,9t^2 + 5,21t$$

b) En éliminant la Variable "t" entre x et z on trouve l'équation de la trajectoire :

$$\text{On a : } \left\{ \begin{array}{l} x = (v_0 \cdot \cos \alpha)t \quad (1) \\ z = \frac{1}{2} \cdot g t^2 + (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t \quad (2) \end{array} \right. \Rightarrow (1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \text{On remplace dans (2) } z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha \Rightarrow z = -5,61 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 0,176 \cdot x$$

Déterminons les coordonnées du sommet :

$$\text{Au sommet de la trajectoire } v_z = 0 \quad \text{donc : } -gt_1 + v_0 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} \approx 0,53 \text{ s}$$

$$\text{On remplace dans } x \text{ et } z \quad x_F = 29,54t_1 \approx 15,7 \text{ m} \quad z_F = -4,9t_1^2 + 5,21t_1 \approx 1,38m$$

c) On a : C = 43 cm et l'équation de la trajectoire : $z = -5,61 \cdot 10^{-3}x^2 + 0,176 \cdot x$

$$\text{Lorsque le projectile arrive au point E : } x_E = CE = 43 \text{ cm} \quad \text{et } z_E = -h \text{ en remplaçant dans l'équation de la trajectoire } -h = -5,61 \cdot 10^{-3}CE^2 + 0,176 \cdot CE = -2,8m \Rightarrow h = 2,8m$$

Étude du mouvement du centre de gravité d'une balle.

Pendant un match de volley-ball, un élève a enregistré une séquence vidéo du mouvement de la balle à partir de l'instant de l'exécution du service à partir d'un point A situé à une hauteur H du sol. Le joueur ayant exécuté le service se trouve à une distance d du filet (Figure 1).

Pour que le service soit bon, la balle doit vérifier les deux conditions suivantes :

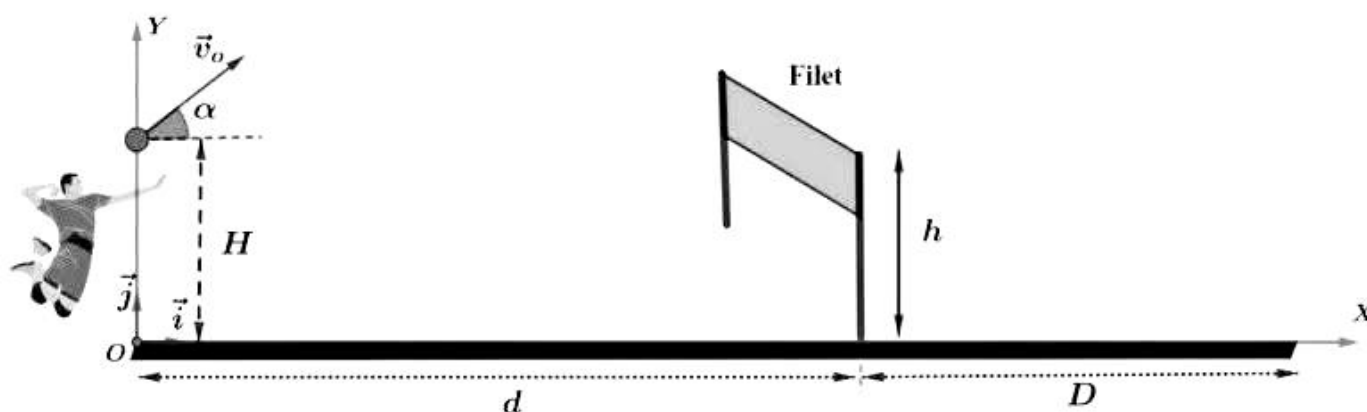
- Passer au-dessus du filet dont la partie supérieure se trouve à une hauteur h du sol ;
- Tomber dans le terrain de l'adversaire de longueur D.

Données :

- On néglige les dimensions de la balle ainsi que l'action de l'air.
- On prendra l'intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- $H = 2,60 \text{ m}$, $d = D = 9 \text{ m}$, $h = 2,50 \text{ m}$

On étudie le mouvement de la balle dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) lié à la terre et supposé galiléen.

A l'instant $t = 0$, la balle se trouve en A, et le vecteur vitesse initiale \vec{V}_0 constitue l'angle α avec l'horizontal. (Figure 1)



Un traitement informatique de la vidéo avec un logiciel convenable, a permis d'obtenir les courbes représentées sur la figure 2.

Les courbes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ représentent les variations des composantes du vecteur vitesse du ballon dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

- 1 Par application de la deuxième loi de Newton, établir l'expression de $v_x(t)$ en fonction de : V_0 , α , et l'expression de $v_y(t)$ en fonction de : V_0 , α , g et t .
- 2 En exploitant les deux courbes (Figure 2), montrer que la valeur de la vitesse initiale est $V_0 = 13,6 \text{ m.s}^{-1}$, et que l'angle α est $\alpha = 17^\circ$.
- 3 Établir l'équation de la trajectoire de G dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 4 Sachant que la balle n'est interceptée par aucun joueur, a-t-elle vérifié les deux conditions nécessaires pour valider le service? Justifier.

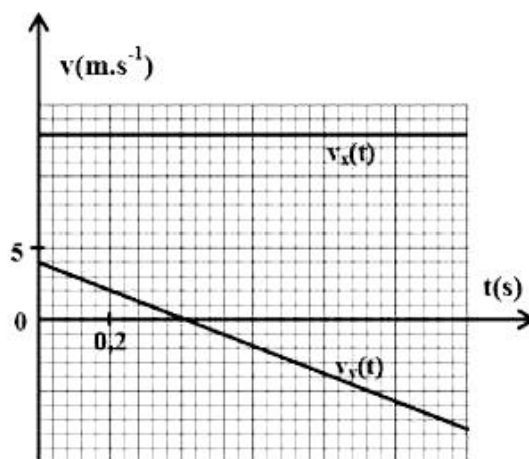


Figure 2

1 L'expression de $v_x(t)$ en fonction de : V_0, α , et l'expression de $v_y(t)$ en fonction de : V_0, α, g et t .

★ le système étudier : { la balle }

★ Bilan des forces : La balle n'est soumise qu'à son propre poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

★ appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}_G$$

■ Projection sur l'axe **OX** : $0 = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = 0 \Rightarrow$ Donc : $\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C^{te} = v_{0x}$

■ Projection sur l'axe **OY** : $-P = m \cdot a_y \Rightarrow a_y = -g \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \Rightarrow v_y(t) = -gt + v_{0y}$

♣ Selon les conditions initiales : $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$

On remplace dans les équations horaires de la vitesse : $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$

2 la valeur de la vitesse initiale et l'angle α

Graphiquement : $v_x = 13 \text{ m/s}$ et $v_y = \alpha \cdot t + 4$ avec $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-0}{0-0.4} = -10$ Donc $v_y = -10 \cdot t + 4$

selon les équations horaires de la vitesse on obtient : $\begin{cases} v_0 \cdot \cos \alpha = 13 \\ -gt + v_0 \sin \alpha = -gt + 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_0 \cdot \cos \alpha = 13 & (1) \\ v_0 \cdot \sin \alpha = 4 & (2) \end{cases} \Rightarrow \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{v_0 \cdot \cos \alpha} = \frac{4}{13} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{13} \Rightarrow \alpha = 17,1^\circ$$

et $v_0 = \frac{v_x}{\cos \alpha} = \frac{13}{\cos 17} = 13,6 \text{ m/s}$

3 Établir l'équation de la trajectoire de G dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

On a $v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha \Rightarrow x = v_0 \cdot (\cos \alpha) \cdot t \Rightarrow x = v_0 \cdot (\cos \alpha) \cdot t$, Avec : $x_0 = 0$,

Donc : $t = \frac{x}{v_0 \cdot (\cos \alpha)}$

et on a $v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot (\sin \alpha) \cdot t + H$,

Donc l'équation de la trajectoire : $y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \tan \alpha + H$

A,N : $y = -\frac{1}{2} \times \frac{10 \cdot x^2}{13,6^2 \cdot \cos^2 17} + x \cdot \tan 17 + 2,6 \Rightarrow y = -0,03 \cdot x^2 + 0,3x + 2,6$

4 les conditions nécessaires pour valider le service :

♣ 1^{er} condition : Pour que la balle passe au-dessus du filet de hauteur h , la condition suivante doit être vérifiée : $y(d) > h$

On remplace x par d dans l'équation de la trajectoire on obtient :

$$y(d) = -0,03d^2 + 0,31d + 2,60 \Rightarrow y(d) = -0,03 \times 9^2 + 0,31 \times 9 + 2,60 = 2,96 \text{ m}$$

Puisque : $h = 2,50 \text{ m}$ donc : $y(d) > h$, première condition vérifiée.

♣ 2^{ème} condition : Pour que la balle tombe dans le terrain de l'adversaire, la condition suivante doit être vérifiée : $d < x < d + D \Rightarrow 9 \text{ m} < x < 18 \text{ m}$

Lorsque la balle tombe : $y = 0 \Rightarrow$ Donc :

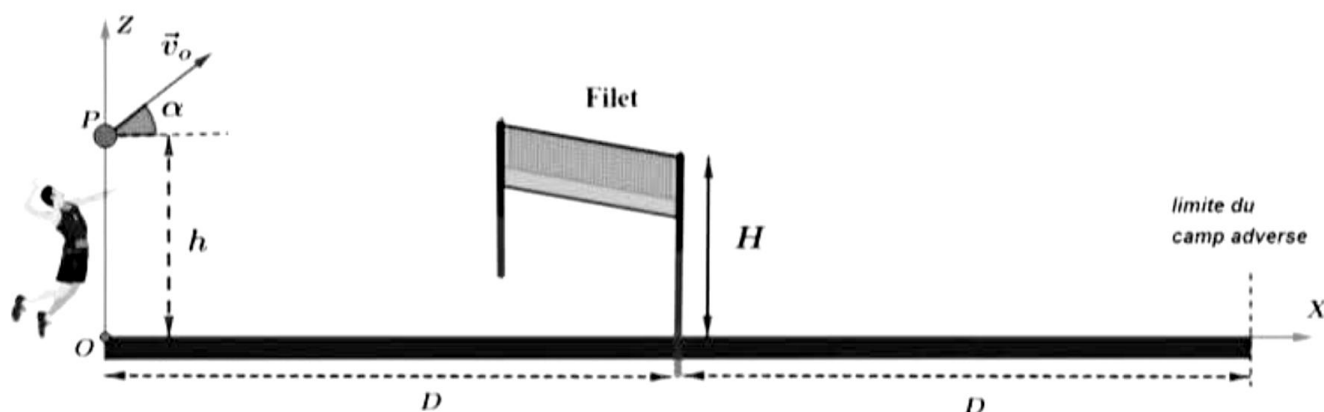
$$y(x) = 0 \Rightarrow -0,03x^2 + 0,31x + 2,60 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0,3^2 - (-4 \times 0,03 \times 2,6) = 0,402 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-0,3 \pm \sqrt{0,402}}{-2 \times 0,03} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15,8m \\ x_2 < 0 \end{cases}$$

Donc : $d < x < d + D \Rightarrow 9m < x = 15,8m < 18m$ la balle tombe dans le terrain de l'adversaire ,la deuxième condition vérifiée.

Exercice 10

Un joueur de volley-ball est au service d'un ballon qu'il lance avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec le plan horizontal (voir schéma ci-dessous). Le ballon est frappé avec la main à la hauteur $h = 0,50$ m du sol et à la distance $D = 9$ m du filet. La hauteur du filet est $H = 2,43$ m, et la limite du camp adverse est à la distance D du filet. Pour que le service soit bon, le ballon doit passer par-dessus le filet et doit toucher le sol dans le camp adverse entre le filet et la limite du camp adverse.



Pour simplifier, on considère que le mouvement se fait dans un plan vertical orthogonal au filet et contenant \vec{v}_0 . L'étude du mouvement se fera dans le repère (O, x, z) , où l'axe Ox est horizontal et l'axe Oz est vertical dirigé vers le haut. Le centre d'inertie G du ballon est initialement au point $P(x = 0; z = h)$. Les frottements de l'air sont négligés et on prendra $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- 1 Caractériser le vecteur accélération \vec{a} du centre d'inertie G du ballon.
- 2 Déterminer les composantes de l'équation horaire du vecteur vitesse \vec{v} du ballon.
- 3 Déterminer les composantes de l'équation horaire du vecteur position \vec{OG} du ballon.
- 4 Mouvement de G .
 - a Déterminer l'équation de la trajectoire du ballon.
 - b Quelle est la trajectoire du ballon?
 - c Comment appelle-t-on ce type de mouvement? Pourquoi?
- 5 La vitesse initiale v_0 doit être comprise entre deux valeurs pour que le service soit bon : une valeur minimale v_{\min} telle que le ballon arrive au sol en passant juste au dessus du filet (soit pour $x = D, z = H$), et une valeur maximale v_{\max} telle que le ballon arrive au sol à la limite du camp adverse (soit pour $x = 2D, z = 0$).
 - a Donner la relation littérale de v_{\min} . Calculer numériquement v_{\min} .
 - b Donner la relation littérale de v_{\max} . Calculer numériquement v_{\max} .
 - c Donner l'encadrement de vitesse de v_0 .
- 6 Déterminer d la distance depuis le filet jusqu'au point de chute du ballon si la vitesse initiale du ballon est de $v_0 = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

- 1 • Le système étudié est le ballon de volley-ball.
 • Le référentiel choisi est terrestre (supposé galiléen).
 • Les forces extérieures qui agissent sur le système sont :

★ le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

★ les frottements de l'air, mais que l'on néglige (dit dans l'énoncé).

★ On applique la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Le vecteur accélération \vec{a} du centre d'inertie G du ballon est donc : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

- 2 les composantes de l'équation horaire du vecteur vitesse \vec{v} du ballon.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} \end{cases} \quad \text{On intègre} \Rightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = K_1 \\ v_z = -gt + K_2 \end{cases}$$

Les conditions initiale $\vec{v}(t=0) \begin{cases} v_x(t=0) = v_0 \cos \alpha \\ v_z(t=0) = v_0 \sin \alpha \end{cases}$

Par intégration et les conditions initiale on obtient

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (-gt + v_0 \sin \alpha) \vec{k}}$$

- 3 Les composantes de l'équation horaire du vecteur position \vec{OG} du ballon.

$$\text{On a } \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{On intègre} \Rightarrow \vec{OM} \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha + K'_1 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + K'_2 \end{cases}$$

Or d'après l'énoncé, le ballon est lancé d'un point P de coordonnées $(x; z) = (0; h)$, soit :

$$\vec{OM}(t=0) \begin{cases} x(t=0) = 0 = K'_1 \\ z(t=0) = h = K'_2 \end{cases}$$

Ce qui donne pour les coordonnées du vecteur position :

$$\vec{OM} \begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + h \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = (v_0 t \cos \alpha) \vec{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + h\right) \vec{k}}$$

- 4 Mouvement de G.

a) l'équation de la trajectoire du ballon :

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \sin \alpha + h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h}$$

b) la trajectoire du ballon : Cette expression est de la forme $z = ax^2 + bx + c$, c'est donc l'équation d'une parabole. La trajectoire du ballon est parabolique.

c) Ce type de mouvement est appelé mouvement de chute libre, car la seule force en jeu dans le mouvement est le poids.

- 5 a) Si le ballon atteint la vitesse v_{\min} , il doit passer exactement par la position $x = D, z = H$, soit, en reportant cette condition dans l'équation de la trajectoire :

$$h = -\frac{1}{2}g \frac{D^2}{v_{\min}^2 \cos^2 \alpha} + D \cdot \tan \alpha + h \Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{D^2}{(D \cdot \tan \alpha + h - H) \cos^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow v_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 9,81 \times \frac{9^2}{(9 \times \tan(45^\circ) + 0,5 - 2,43) \cos^2(45^\circ)}} = 10,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) Si le ballon atteint la vitesse v_{\max} , il doit passer exactement par la position $x = 2D, z = 0$, soit, en reportant cette condition dans l'équation de la trajectoire :

$$0 = -\frac{1}{2}g \frac{4D^2}{v_{\max}^2 \cos^2 \alpha} + 2D \tan \alpha + h \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{4D^2}{2D \cdot \tan \alpha + h) \cos^2 \alpha}}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 9,81 \times \frac{4 \times 9^2}{2 \times 9 \tan(45^\circ) + 0,5) \cos^2(45^\circ)}} = 13,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- c) Pour que le ballon tombe dans les limites du terrain après service, il faut que la vitesse initiale soit dans l'encadrement :

$$10,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \leq v_0 \leq 13,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 6 Le point de chute du ballon est donné par la condition $z = 0$, soit, en reportant cette condition dans l'équation de la trajectoire :

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha + h$$

On résout cette équation en calculant le discriminant : $\Delta = 1 - 4(-0,068125)0,5 = 1,13625$

$$\bullet x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1,13625}}{2(-0,068125)} = 15,163m \quad \text{et} \quad \bullet x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1,13625}}{2(-0,068125)} = -0,484m$$

Seule la solution $x_1 = 15,163m$ est valable. Mais on cherche d , la distance depuis le filet jusqu'au point de chute du ballon, c'est-à-dire :

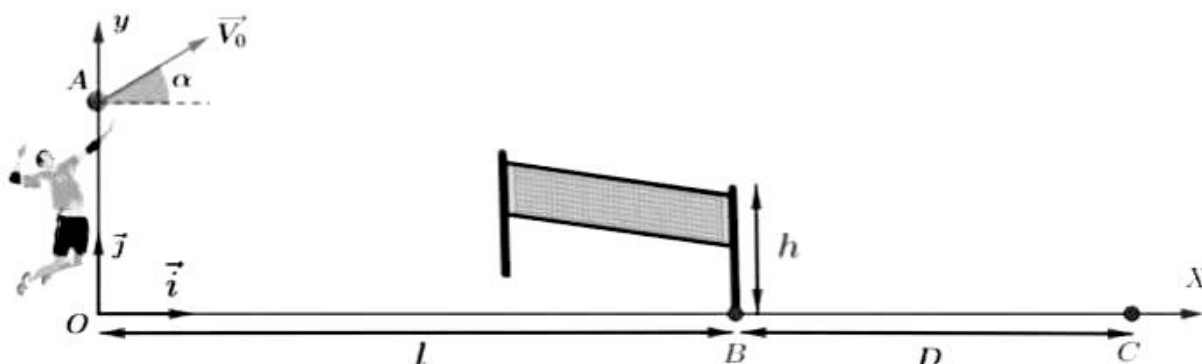
$$d = x_1 - D = 15,163 - 9 = 6,163m$$

Exercice 7

On néglige les frottements de l'air et de poussée d'Archimède et on considère la balle ponctuelle et son mouvement plan. Lors d'un match de volley-ball, un joueur lance la balle du point A situé à la hauteur $OA = 3,5m$ de la surface de la terre avec une vitesse initiale \vec{V}_0 , faisant un angle $\alpha = 8^\circ$ avec l'axe horizontal passant par A à $t = 0$.

Lors du service le joueur se trouve à la distance $l = 12m$ du filet, celle dernière se trouve à la hauteur $h = 2,43m$ de la terre.

Pour que le service soit adéquat, il faut que la balle passe au-dessus du filet et tombe dans un domaine BC de longueur $D = 9m$.



- 1 Établir les équations horaires du mouvement de la balle dans le repère $R(O, x, y)$.
- 2 En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire et donner sa nature.
- 3 Montrer que la balle passe au-dessus de filet, si et seulement si la vitesse V_0 est supérieur à une valeur minimale V_{\min} à déterminer et calculer.
- 4 Pour la valeur $V_0 = 18\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ la balle passe au-dessus du filet.
 - a Déterminer l'instant de chute de la balle dans le domaine BC si aucun joueur n'intercepte la balle.
 - b Le joueur a-t-il réussi son service?
- 5 Soit S le sommet de la trajectoire.
 - a Déterminer l'expression des coordonnées du point S dans le repère $R(O, x, y)$.
 - b Calculer au point S le rayon de courbure ρ de la trajectoire.

Exercice 3

Étude du mouvement d'une balle de golf dans le champs pesanteur uniforme

Un circuit dans le terrain de golf est constitué de trois parties :

- Partie horizontale OA de longueur $OA = 2,2\text{m}$.
- Partie AB de longueur $AB = 4\text{m}$, inclinée d'un angle $\alpha = 24^\circ$ par rapport au plan horizontal.
- Partie BC horizontale contenant un trou de centre T situé à la distance $BT = 2,1\text{m}$ du point B .

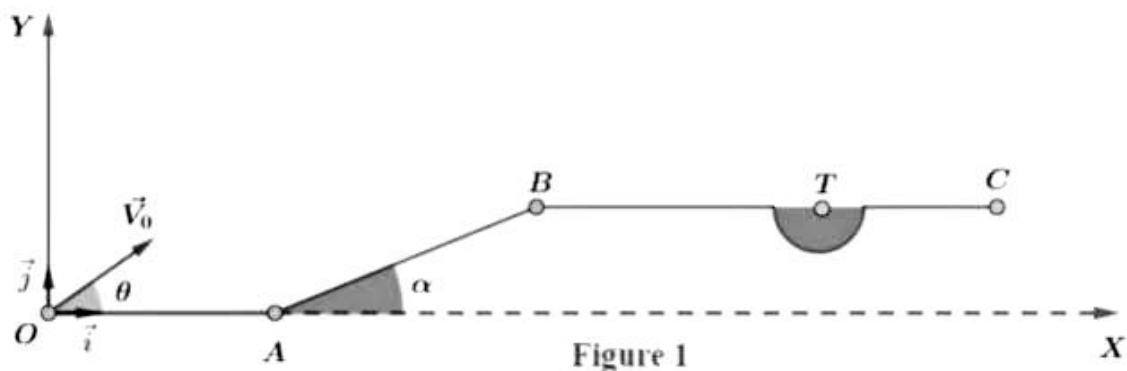
Les points B, T et C sont alignés.

On néglige l'action de l'air et les dimensions de la balle. On prendra $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

L'étude du mouvement de la balle se fait dans un repère (O, i, j) lié à la terre et supposé galiléen.

On lance, à l'instant $t = 0$, à partir du point O , la balle vers le trou T , avec une vitesse initiale de valeur $V_0 = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Le vecteur \vec{V}_0 est incliné d'un angle $\theta = 45^\circ$ par rapport à l'axe horizontal (O, x) . (Figure 1)



- 1 Par application de la deuxième loi de Newton, établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de la balle.
- 2 En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.
- 3 Déterminer la valeur de x_s , abscisse du sommet de la trajectoire de la balle.
- 4 S'assurer que la balle passe au centre T du trou.