BACCALAUREAT BLANC
SESSION : AVRIL 2014

COEFFICIENT : 4
DUREE : 4H

MATHEMATIQUES

SERIE :F2

Cette épreuve comporte 2 pages numérotées 1/2, et 2/2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.
Le candidat devra se munir de 2 papiers millimétrés (les graphiques des exercice 2 et problème doivent être faits sur le même papier au cas échéant)

EXERCICE 1

Soit $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$.

Soit la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.

1) a) Calculer la dérivée de la fonction f
   b) Calculer la valeur de I.
2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$.
   b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K,montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   c) En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE 2

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2+3)Q(z)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

5. Soit Δ la transformation du plan dans lui-même de la forme z'=az+b, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que l'image par Δ de A est B et celui de C est D.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de Δ

PROBLEME

Le pan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).unité graphique : 2cm

On considère la fonction f de R dans R définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

C désigne la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$

1. Vérifier que pour tout x élément de R, $f'(x)=\dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ et $f''(x)=\dfrac{2e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$
2. Calculer g'(0) et g(0)
3. a. Etudier le sens de variation de la fonction g
   b. Expliciter le signe de g'(x) suivant les valeurs de x
4. Expliciter le signe de g(x) suivant les valeurs de x

PARTIE B

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. a. Démontrer que la fonction f est impaire.
   b. Interpréter graphiquement le résultat précédent
3. a. Etudier le sens de variation de f
   b. Etablir le tableau de variation de f .
4. a. Vérifier que la droite (T) : $y=\frac{1}{2}x$ est tangente à (C) au point 0
   b. Etudier la position relative de (C) et (T). (On pourra utiliser la partie A)
5. Tracer (T) puis construire (C) avec soin.
6. a. Démontrer que f définit une bijection de R dans $\left]-1;1\right[$
   b. Calculer $(h^{-1})(0)$ où h^{-1} est la bijection réciproque de h.
7. a. Construire la courbe représentative (C') de h^{-1} dans le même repère que (C).
   b. Pour tout y de $\left]-1;1\right[$ exprimer $h^{-1}(y)$ en fonction de y.

PARTIE C

1. a. Vérifier que pour tout x de R : $f(x)=1-2\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

   b) En déduire une primitive F de f de f sur R

1) Calculer l'aire $\mathbf{A_1}$ du domaine du plan compris entre (C), la droite (OI), la droite (OJ) et la droite d'équation x=1
3. Hachuré sur le graphique, le domaine du plan dont les coordonnées (x ; y) des points vérifient : $0\le x\prec 1,\ 0\le y\prec 1$ et $f(x)\le y\le h^{-1}(x)$
4. Calculer l'aire $\mathbf{A_2}$ du domaine précédent. (On utilisera $\mathbf{A_1}$ et un carré précis).