

PROBLEME 1

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$. On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}) en $+\infty$.
2. a. Montrer que pour tout réel x on a l'égalité suivante : $f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$
b. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (on utilisera le fait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).
3. a. Déterminer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} .
b. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$. Donner une valeur approchée de α .
5. On considère le point A de la courbe (\mathcal{C}) d'abscisse $-\ln 3$.
a. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.
b. On note (T) la tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point A. Montrer que le coefficient directeur de la droite (T) est -1 . Déterminer l'équation de (T) .
6. Construire avec soin la courbe (\mathcal{C}) et les droites (D) .

PARTIE B

1. Vérifier que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = -e^{-x} + x^2 - 3x$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Soit (E) le domaine du plan délimité par la courbe (\mathcal{C}) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. Hachurer le domaine (E) . Soit (A) l'aire du domaine (E) en unités d'aire, calculer la valeur exacte de (A) . Donner une valeur approchée de (A) à 10^{-2} près.

PROBLEME 2

PARTIE A : ETUDE D'UNE FONCTION

On note f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + e^{-2x}$. On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unités 4 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

1. Étude des limites de la fonction f

- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b. Justifier que $f(x) = e^{-2x} \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + 1 \right)$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
- c. Démontrer que la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$, et préciser la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite D .

2. Étude des variations de la fonction f

- a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
- b. Résoudre l'inéquation $e^{-2x} > \frac{1}{4}$ et en déduire le tableau des variations de la fonction f .
- c. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 0.
- d. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ possède une unique solution sur l'intervalle $[1; 2]$. Justifier avec précision et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

3. Tracer, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les droites D et T , puis tracer la courbe \mathcal{C} .

PARTIE B : CALCUL D'UNE AIRE

1. Soit m un nombre réel strictement supérieur à $\ln 2$. On note $A(m)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la droite D et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = m$. Déterminer $A(m)$ en fonction de m .
2. Calculer la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.