



POLYNOMES

🎓 Jef Bakel

📅 2023-2024

🏠 Collège kidira

✍️ M. Queye

EXERCICE 1

Soit f un polynôme défini par: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

- 1 Calculer $f(2)$. En déduire une factorisation de $f(x)$.
- 2 Résoudre dans \mathbb{R}
 - a L'équation $f(x) = 0$.
 - b L'inéquation $f(x) < 0$

EXERCICE 2

Soit $p(x) = 2x^4 + x^3 - 26x^2 + 11x + 12$

- 1 Vérifier que 1 et 3 sont des racines de $p(x)$
- 2 Factoriser $p(x)$ en un produit de facteurs du premier degré
- 3 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $p(x) \geq 0$.

EXERCICE 3

Soit p un polynôme défini par: $p(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ avec a et b des réels.

- 1 Détermine les réels a et b pour que -1 et 2 soient racines de $p(x)$.
- 2 Étudier le signe du polynôme g tel que $g(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$.

EXERCICE 4

Soit un a un réel. On considère le polynôme g de degré 3 défini par:

$$g(x) = x^3 - (3 + 2a)x^2 + (6a + 2)x - 4a$$

- 1 Prouver que $g(2a) = 0$.
- 2 Écrire $g(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

EXERCICE 5

On considère le polynôme p défini par: $p(x) = -2x^3 - 2x^2 + 20x - 16$.

- 1 Donner la factorisation optimale de $p(x)$.
- 2 Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $p(x) = 0$.

3 En déduire la résolution des équations suivantes

a $-2(x-1)^3 - 2(x-1)^2 + 20(x-1) - 16 = 0$

b $-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{20}{x} - 16.$

EXERCICE 6

Soit a et b deux réels distincts. On définit le polynôme g défini par:

$$g(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b).$$

1 Calcule $g(a)$ et $g(b)$

2 Factorise alors le polynôme $g(x)$.

EXERCICE 7

Soit le polynôme p défini pour réel x par: $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. On suppose que α , β et γ sont des racines du polynôme p.

Démontrer que
$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = -c \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha + \beta + \gamma = -a \end{cases}$$

EXERCICE 8

Soit le polynôme p défini pour réel x par: $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ avec a et b des réels

1 Détermine a et b pour que p(x) soit factorisable par $x^2 + 2x - 3$.

2 On suppose que $a = 3$ et $b = -8$. Résoudre alors l'équation $p(x) \leq 0$.

EXERCICE 9

On suppose que a, b, c et d sont des réels et que f est un polynôme de degré 3 dont les racines sont α , β et γ avec $f(x) = ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d$.

1 Montrer que
$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3c}{a} \\ \alpha + \beta + \gamma = -\frac{3c}{a} \end{cases}$$

2 calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

EXERCICE 10

Soit $p(x) = 10x^3 + 29x^2 - 41x + 12$.

1 Vérifier que $\frac{1}{2}$ est un zéro de p. En déduire une factorisation de p(x).

2 Soit $q(x) = \frac{p(x)}{8x^3 - 1}$.

- a Déterminer le domaine de définition de q
- b Simplifier $q(x)$
- c Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $q(x) \geq 0$.

EXERCICE 11

- 1 Déterminer les polynômes p de degré 2 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}: p(x) - p(x-1) = x$
- 2 En déduire la somme $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
- 3 Déterminer le polynôme p de degré 3 tel que $p(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R} p(x) - p(x-1) = x^2$.
- 4 Démontrer que $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (2n+1)\frac{S_1}{3}$.
- 5 Déterminer les polynômes p de degré 4 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}: p(x) - p(x-1) = x^3$.
- 6 Démontrer que la somme $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (S_1)^2$.

EXERCICE 12

On considère le polynôme $P(x) = (m^2 - m - 2)x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 2)x + 2m - 1$
 Déterminer le réel m pour que

- 1 $d^0 P = 3$.
- 2 $d^0 P = 2$.
- 3 $d^0 P = 1$.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme défini par $P(x) = x^3 + (3 + 2m)x^2 + (6m + 2)x - 4m$.

- 1 Vérifie que $P(2m) = 0$.
- 2 Écris $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
- 3 Résoudre en discutant suivant les valeurs de m l'inéquation $P(x) > 0$.

EXERCICE 13

Étant donné un paramètre réel m , on considère l'équation

$$(E_m) := \frac{1}{2}mx^4 + (m+1)x^3 - mx^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m = 0$$

- 1 Résous dans \mathbb{R} (E_m) pour $m = 0$
- 2 On suppose maintenant que $m \neq 0$.
 - a Montrer que le réel m n'est pas solution de (E_m)

- b** Montrer que (E_m) peut se mettre sous la forme $x^2 f(u)$ avec $u = x + \frac{1}{x}$
- c** Déterminer les réels u solutions de l'équation $f(u) = 0$. En déduire les réels x de (E_m)
- d** Établir une relation simple indépendante de m entre les solutions de (E_m) .

EXERCICE 14

Soit $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 60$.

- 1** Déterminer les réels a, b etc sachant que $P(-2) = 0, P(3) = 0$ et $P(1) = -28$.
- 2** On suppose que $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + -28x - 60$. Factorise complètement $P(x)$.
- 3** On considère le polynôme $Q(x) = x^3 - 4x - 1$, admettant trois racines α, β et γ
 - a** Sans calculer ces racines, calculer les nombres $A = \alpha + \beta + \gamma$
 $B = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
 $C = \alpha\beta\gamma$
 $D = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.
 - b** Effectuer la division de x^7 par $Q(x)$.
 - c** Calculer $F = \alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7$.

EXERCICE 15

Soit m et n deux entières naturels non nuls et soit P un polynôme défini par:

$$P(x) = x^{2m} + (x+1)^n - 1.$$

- 1** Détermine le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + x$. Dans toute la suite on désigne par $A(x)$ un polynôme de degré $d \geq 0$.
- 2** On pose $B(x) = [A(x)]^{2m} + [A(x) + 1]^n - 1$.
 - a** Montrer que $B(x)$ est divisible par $[A(x)]^2 + A(x)$.
 - b** Montrer que si x_0 est une racine de $A(x)$, alors x_0 est aussi une racine de $B(x)$.
- 3** On pose $A(x) = x^2 - 3x + 2; m = 1$ et $n = 2$
 - a** Écrire en produit de facteurs irréductibles de $B(x)$
 - b** Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $B(x) \geq 0$.

EXERCICE 16

- 1** Montrer que 0 n'est pas de (E)
- 2** Montrer que α est solution de (E) , alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E) .

- 3 Monter que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $4x^2 + 8x - 37 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}$.
- 4 En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que (E') est équivalente à l'équation (E'') : $4X^2 + 8X - 45$.
- 5 Résoudre (E'') et en déduire les solutions de (E) .
- 6 Généralisation.
- a Montrer que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ peut se ramener à une équation du second degré par le changement de variable $X = x + \frac{1}{x}$.
- b Résoudre l'équation $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$.

EXERCICE 17

Les questions sont indépendantes

- 1 Déterminer p et q pour que $x^4 + px^2 + q$ soit divisible par $x^2 + x + 1$
- 2 Montrer que $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par $(x + 1)(x - 1)^2 \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
- 3 Soit $f(x) = a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$. Montrer que $f(x)$ est divisible par $(a - b)(b - c)(c - a)$ puis déterminer le quotient
- 4 Montrer que $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme à déterminer
- 5 Forme l'équation du second degré qui a pour racines les carrés des racines de l'équation: $x^2 + px + q = 0$
- 6 Les restes de la division euclidienne d'un polynôme $h(x)$ par $x - 1$ et par $x - 2$ sont respectivement 6 et 18. Déterminer le reste de la division euclidienne de $h(x)$ par $(x - 1)(x - 2)$
- 7 On donne $A(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + 12x^{13} - 12x^{12} + \dots - 12x^2 + 12x - 1$. Calculer $A(11)$.

EXERCICE 18

- 1 On considère l'expression

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right]$$

- a Calculer P pour $n \in \{1; 2; 3\}$
- b Vérifier sur le résultat du a) que:

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0 \quad (n \in \{3; 4\})$$

- 2 On pose $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$
- a Calcule $u + v$ et uv . Exprime $P_n(x)$ en fonction de u et de v .

- b** Calculer $(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v)$.
- c** En déduire que pour entier naturel $n \geq 3$ on a:

$$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0 \quad (n \in \{3; 4\})$$

- 3** Déduire les questions ci-dessus que $P_n(x)$ est un polynôme de degré n

EXERCICE 19

Soit n un entier naturel

- 1** Montrer que le polynôme $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x+1)(2x+1)$.
- 2** Calculer le quotient pour $n = 2$.
- 3** Calculer le quotient et le reste $\forall n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 20

Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x) = ax^{n+1} + bx^n$ soit divisible par $(x+1)^2$

EXERCICE 21

Soit n un entier naturel

- 1** Montrer que le polynôme $P(x) = (x-2)^{2n} - (x-1)^n - 1$ est divisible par $x^2 - 3x + 2$
- 2** Montrer que le polynôme $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ est divisible par $(x-1)^2$.

EXERCICE 22

- 1** Soit $P(x)$ un polynôme de degré n . Quel est le degré du polynôme:

$$Q(x) = P(x) - P(x-1)$$

- 2** On considère s'il en existe, des polynômes $f_k(x)$ tel que:

$$f_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad f_k(x) - f_k(x-1) = x^k$$

- a** Montrer que $f_k(x)$ est un polynôme de degré $k+1$.
- b** Prouve que $f_k(x)$ est divisible par $x^2 + x$.
- c** Détermine $f_4(x)$.
- d** En déduire de l'étude ci-dessus l'expression en fonction de n la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^n i^k = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$$

EXERCICE 23

Soit P un polynôme non nul de degré n , défini par:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Soit Q le polynôme défini sur \mathbb{R} par $Q(x) = P(x)P(x+2) + P(x^2)$.

- 1 Montrer que si $a_n \neq -1$, alors $Q(x)$ est de degré $2n$
- 2 On suppose dans la suite que $P(x)$ vérifie la propriété (r): $Q(x) = P(x)P(x+2) + P(x^2) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$
On se propose de montrer que si $P(x)$ admet une racine a alors $a = 1$. On suppose que $P(x)$ admet une racine a c'est à dire $P(a) = 0$.
 - a Montrer que a^2 et a^4 sont des racines de $P(x)$. En déduire que a^{2k} où $k \in \mathbb{N}$ est une racine de $P(x)$.
 - b Déduire de ce qui précède si $|a| \neq 1$, alors $P(x)$ admet une infinité de racines.
 - c En déduire que $|a| = 1$.
 - d Montrer que $(a-2)^2$ est une racine de $P(x)$ en utilisant (r).
 - e Déduire de d) et c) que $a = 1$

EXERCICE 24

On appelle **polynôme réciproque** de degré n tout polynôme $P(x)$ vérifiant

$$\begin{cases} d^o P = n \\ \forall x \in \mathbb{R}^* \quad P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^n} \end{cases}$$

- 1 Montrer que si α est une racine de $P(x)$, alors α est non nul et $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $P(x)$.
- 2 Montrer que tout polynôme réciproque de degré n impair admet -1 pour racine.
- 3 On suppose que le polynôme P est défini par: $P(x) = (x+1)Q(x)$. Démontrer que si $P(x)$ est un polynôme réciproque, alors $Q(x)$ l'est aussi.
- 4 Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est un polynôme réciproque.
- 5 Déterminer le polynôme réciproque F de degré 5 admettant pour racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2 - \sqrt{3}$ et tel que $F(0) = 2$.
- 6 On pose $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et on pose: $P(x) = 2x^4 - (5 + 2\sqrt{5})x^3 + (4 + 5\sqrt{5})x^2 - (5 + 2\sqrt{5})x + 2$
 - a Vérifie que $P(x)$ est un polynôme réciproque
 - b Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ puis en déduire φ^3 et φ^4 en fonction de φ .
En déduire que φ est une racine de $P(x)$
 - c En utilisant les question précédentes, résoudre simplement \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 25

Soit l'expression suivante :

$$P(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

- 1 Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$
- 2 En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = x^2$.

EXERCICE 26

Les questions sont indépendantes 1) et 2)

- 1
 - a Déterminer les réels a et b pour que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$
 - b En déduire la somme $S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$
- 2
 - a Déterminer les réels a , b et c pour que $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$
 - b En déduire la somme $S'_n = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

EXERCICE 27

On se propose de résoudre une équation de degré 3 ne possédant pas à priori de solution particulière

Partie A:

Soit le polynôme $P(x) = 10x^3 - 9x^2 + 9x + 1$.

- 1 On pose $x = y + a$. Déterminer le polynôme $Q(x)$ obtenu en remplaçant x par $y + a$ dans $P(x)$.
- 2 Montrer que $Q(x) = 10(y^3 + \alpha y + \beta)$ équivaut à $a = \frac{3}{10}$, $\alpha = \frac{63}{100}$ et $\beta = \frac{79}{250}$.

Partie B:

Cette partie a pour but de déterminer les racines de $Q(y)$.

- 1 Déterminer deux réels b et c tels que $\beta = b^3 + c^3$ et $\alpha = -3bc$
- 2 Prouver que $y^3 - 3bcy + b^3 + c^3$ est factorisable par $y + b + c$. Déduire des questions précédentes que $\frac{-2}{5}$ et $\frac{-1}{10}$ sont respectivement solutions de $Q(x)$ et $P(x)$.
- 3 Terminer la résolution de $P(x) = 0$.

