Lycée de Sambsin
Prof : SAM Osé
Classes: 3èA et B

Année scolaire 2020 - 2021
Date :--- /12/2020
Durée : 2h

Devoir de mathématiques

L'épreuve comporte deux parties

PREMIERE PARTIE (10 pts)

1. Sachant que $x \in]-2;5[$ et $y \in]-8;-1[$, déterminer un encadrement de $x+y$ et de $x-2y$. (1 pt)
2. On donne: $-3 < 4x-5 \leq 4$ et $\frac{1}{3} < 5-y < \frac{1}{2}$.
   Trouver un encadrement de x et de y, puis donner les intervalles auxquels ils appartiennent. (1,5 pts)
3. Soit $A = \sqrt{75} \times \sqrt{3}$
   Montrer que $A = 15$. (1 pt)
4. Ecrire l'ensemble suivant sous forme d'un intervalle: (1 pt)
   $x \epsilon [-4;7] \cap]2;+\infty[$.
5. Soient quatre points A, B, C et D du plan et un vecteur $\vec{u}$ tels que:
   $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$.
   Montrer que $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ que l'on déterminera la valeur du réel k. (0,5 pt)
6. Soit les nombres réels a et b tels que: $a = \frac{m-1}{2}$ et $b = \frac{m-2}{2}$

   Trouver les valeurs des réels a et b pour que a et b soient opposés. (1,5 pts)
8. Soit deux points A et B distincts du plan tels que $AB = 2{,}5$ cm.
   Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$. (0,5pt)
   Que peut-t-on dire des points A, B et M ? (0,5pt)
9. Considérons les $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :
   $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\vec{v} = -4\vec{w}$.
   Exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{w}$. (1 pt)
   En déduire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires. (0,5pt)
10. Réduire l'expression suivante :
    $A = 2\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$. (1pt)

Deuxième partie (10 pts)

Exercice n°1 **(3, 5 pts)**

On pose $a = 3 - 2\sqrt{5}$.

1) Comparer 3 et $2\sqrt{5}$ puis préciser le signe de a. (1 pt)

2) Calculer a^2. (0,5 pt)

3) Simplifier le réel $b = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$. (1 pt)

4) Sachant que $2{,}236 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}237$.

   Donner un encadrement de a au $\frac{1}{100}$ près de. (1 pt)

Exercice N°2 **(3 pts)**

Soit un champ rectangulaire de longueur y et de largeur x telles que :

$25 \leq y \leq 50$ et $10 \leq x \leq 25$.

Donner un encadrement du périmètre et de la surface de ce rectangle. (2pts)

En déduire la valeur minimale et la valeur maximale du périmètre de ce champ. (1pt)

NB: Les dimensions sont en mètre (m).

Exercice N°3 **(3,5 pts)**

Soit un parallélogramme ABCD de centre O.

1. Placer les points E et F tels que:

   $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CO}$. (1 pt)

2. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$. (2 pts)

   En déduire que le quadrilatère BEDF est un parallélogramme. (0,5 pt)

1. Détermination d'un encadrement de de $x + y$ et de $x - 2y$.

- $x \in]-2; 5[$ signifie que $-2 < x < 5$; et $y \in]-8; -1[$ signifie que $-8 < y < -1$.

- Encadrement de $x + y$
  On a: $-2 < x < 5$ et $-8 < y < -1$, alors: $-2 + (-8) < x + y < 5 + (-1)$. Par conséquent, $-2 - 8 < x + y < 5 - 1$. Ce qui signifie que: $-10 < x + y < 4$.
  Donc, l'encadrement de $\boldsymbol{x + y}$ est: $\boldsymbol{-10 < x + y < 4}$.

- Encadrement de $x - 2y$.
  Encadrons d'abord $-2y$.
  On a: $-8 < y < -1$ alors $-2 \times (-8) > -2y > -2 \times (-1)$. Par conséquent, $16 > -2y > 2$. Ce qui signifie aussi que: $2 < -2y < 16$.
  Encadrons $x - 2y$.
  On a: $-2 < x < 5$ et $2 < -2y < 16$, alors: $-2 + 2 < x - 2y < 5 + 16$. Par conséquent, $0 < x - 2y < 21$. Ce qui signifie que: $0 < x - 2y < 21$.
  Donc, l'encadrement de $\boldsymbol{x - 2y}$ est: $0 < \boldsymbol{x - 2y < 21}$.

2. Trouvons un encadrement de x et de y, puis donnons les intervalles auxquels ils appartiennent.

- On a: $-3 < 4x - 5 \leq 4$ alors: $-3 + 5 < 4x - 5 + 5 \leq 4 + 5$. Par conséquent, $2 < 4x \leq 9$.
  On a: $2 < 4x \leq 9$ alors: $\frac{2}{4} < \frac{4x}{4} \leq \frac{9}{4}$. Par conséquent, $\frac{2}{4} < x \leq \frac{9}{4}$. Ce qui signifie que $\frac{1}{2} < x \leq \frac{9}{4}$.
  Donc, $\boldsymbol{\frac{1}{2} < x \leq \frac{9}{4}}$ est un encadrement de $\boldsymbol{x}$.
  L'écriture $\boldsymbol{\frac{1}{2} < x \leq \frac{9}{4}}$ signifie que $\boldsymbol{x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right]}$.

- On a: $\frac{1}{3} < 5 - y < \frac{1}{2}$ alors: $-5 + \frac{1}{3} < -5 + 5 - y < -5 + \frac{1}{2}$. Par conséquent, $\frac{-5 \times 3}{3} + \frac{1}{3} < -y < \frac{-5 \times 2}{2} + \frac{1}{2}$. Ce qui signifie que:
  $\frac{-15}{3} + \frac{1}{3} < -y < \frac{-10}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-15 + 1}{3} < -y < \frac{-10 + 1}{2}$. Donc, $\frac{-14}{3} < -y < \frac{-9}{2}$.
  On a: $\frac{-14}{3} < -y < \frac{-9}{2}$ alors: $-\left(\frac{-14}{3}\right) > -(-y) > -\left(\frac{-9}{2}\right)$. Par conséquent, $\frac{14}{3} > y > \frac{9}{4}$. Ce qui signifie que: $\frac{9}{4} < y < \frac{14}{3}$.
  Donc, $\boldsymbol{\frac{9}{4} < y < \frac{14}{3}}$ est un encadrement de $\boldsymbol{y}$.
  L'écriture $\boldsymbol{\frac{9}{4} < y < \frac{14}{3}}$ signifie que $\boldsymbol{x \in \left]\frac{9}{4}; \frac{14}{3}\right[}$.

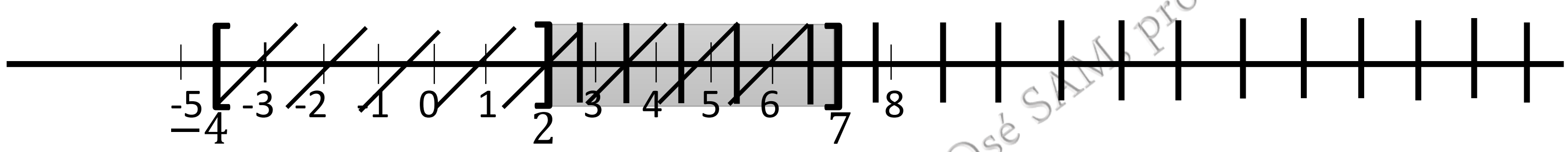
Montrons que A $= 15$.

$A = \sqrt{75} \times \sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} \times \sqrt{3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5^2} \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5 \times 3 = 15$

Donc, $\mathbf{A = 15}$.

4. Ecrivons l'ensemble des nombres réels x tel que $x \in [-4; 7] \cap]2; +\infty[$ sous forme d'un intervalle.

   Pour se faire, représentons les deux intervalles sur la même droite graduée.



   À partir de la représentation ci-dessus, on a: $[-4; 7] \cap]2; +\infty[=]2; 7]$.

   Donc, $x \in [-4; 7] \cap]2; +\infty[$ signifie que $x \in]2; 7]$.

<u>NB:</u>

Le symbole ∪ se lit « union» et le symbole ∩ se lit « inter ». L'intersection des éléments de deux intervalles signifient que l'on veut uniquement les éléments qui sont à la fois dans chacun des deux intervalles.

5. Montrons que $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ que l'on déterminera la valeur du réel k.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \left(-\overrightarrow{DA}\right) + 4\left(-\overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} - 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AB}\right) - 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\
&= -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \\
&= (-2 - 1 - 4 + 1)\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$\vec{u} = -6\overrightarrow{AB}$.

6. Pour que a et b soient opposés l'un de l'autre, il faut que:

   $a + b = 0$, alors $\frac{m-1}{2} + \frac{m-2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{m-1+m-2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow 2m = 3$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

   Remplaçons m par sa valeur pour calculer la valeur de a et de b.

On a: $a = \frac{m-1}{2}$ et $b = \frac{m-2}{2}$, alors:

$$a = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{2}}{2} = \frac{\frac{3-2}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

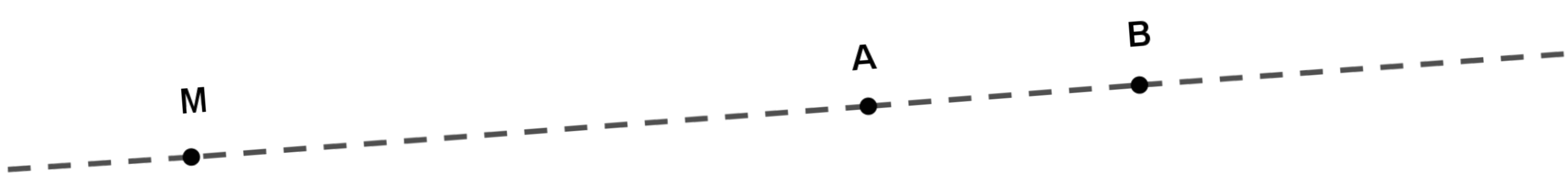
$$b = \frac{\frac{3}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{2} = \frac{\frac{3-4}{2}}{2} = \frac{\frac{-1}{2}}{2} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{-1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{-1}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{4} \text{ et } b = \frac{-1}{4}}$$

8. Ce qu'il faut savoir afin de bien placer le point M.

Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ signifie que:

- le point M apparient à la droite (AB);
- les deux vecteurs sont opposés;
- AM= $\left|-\frac{5}{2}\right| \times$ AB= $\frac{5}{2} \times 2{,}5 = \frac{12{,}5}{2} = 6{,}25$ cm.



Les points A, B et M sont alignés.

9. Exprimons le vecteur $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\vec{w}$

On a $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v}$ et $\vec{v} = -4\vec{w}$, alors:

$\vec{u} = \frac{3}{2} \times (-4\vec{w}) = \left(-\frac{3 \times 4}{2}\right)\vec{w} = -\frac{12}{2}\vec{w} = -6\,\vec{w}$.

Donc, $\vec{u} = -6\,\vec{w}$.

Déduisons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

On a $\vec{u} = -6\,\vec{w}$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

10. Réduisons l'expression suivante :

$A = 2\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$ = (2 - 12 + 3 - 1)\sqrt{5}$

$A = -8\sqrt{5}$

Deuxième partie

Exercice N°1

a. Comparons 3 et $2\sqrt{5}$

$3^2 = 9$

$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{5}\right)^2 = 4 \times 5 = 20.$

On a: $9 < 20$, alors $3 < 2\sqrt{5}$.

Déduisons le signe de a.

On a: $3 < 2\sqrt{5}$, alors $3 - 2\sqrt{5} < 0$. Or, $\mathrm{a} = 3 - 2\sqrt{5}$.

Ce qui signifie que $a < 0$. Donc, a est négatif.

b. Calculons a^2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}^2 &= \left(3 - 2\sqrt{5}\right)^2 \\
&= 3^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 \\
&= 9 - 12\sqrt{5} + 20 \\
\mathrm{a}^2 &= 29 - 12\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c. Simplifions le réel $\mathrm{b} = \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{b} &= \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} \\
&= \sqrt{\mathrm{a}^2} \\
&= \sqrt{\left(3 - 2\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \left|3 - 2\sqrt{5}\right| \\
&= -\left(3 - 2\sqrt{5}\right) \\
&= -3 + 2\sqrt{5}, \text{ car a est négatif.}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{b} = -3 + 2\sqrt{5}$.

Exercice N°2

Donnons un encadrement du périmètre et de la surface de ce rectangle.

Soit P le périmètre, et S la surface de ce rectangle.

P$= 2(x+y)$ et S$= xy$.

On a: $25 \leq y \leq 50$ et $10 \leq x \leq 25$ alors:

$$\begin{aligned}
25 + 10 \leq y + x \leq 50 + 25 &\Leftrightarrow 35 \leq y + x \leq 75 \\
&\Leftrightarrow 2 \times 35 \leq 2(y+x) \leq 2 \times 75 \\
&\Leftrightarrow 70 \leq 2(y+x) \leq 150
\end{aligned}$$

Donc, l'encadrement du perimètre est: $70\ m \leq \mathrm{P} \leq 150\ m$.

On a: $25 \leq y \leq 50$ et $10 \leq x \leq 25$ alors: $10 \times 25 \leq xy \leq 25 \times 50$.

Ce qui signifie que $250 \leq xy \leq 1250$.

Donc, l'encadrement de la surface est: $250\ m^2 \leq \mathrm{S} \leq 1250\ m^2$.

Déduisons le périmètre minimal et le périmètre maximal de ce champ.

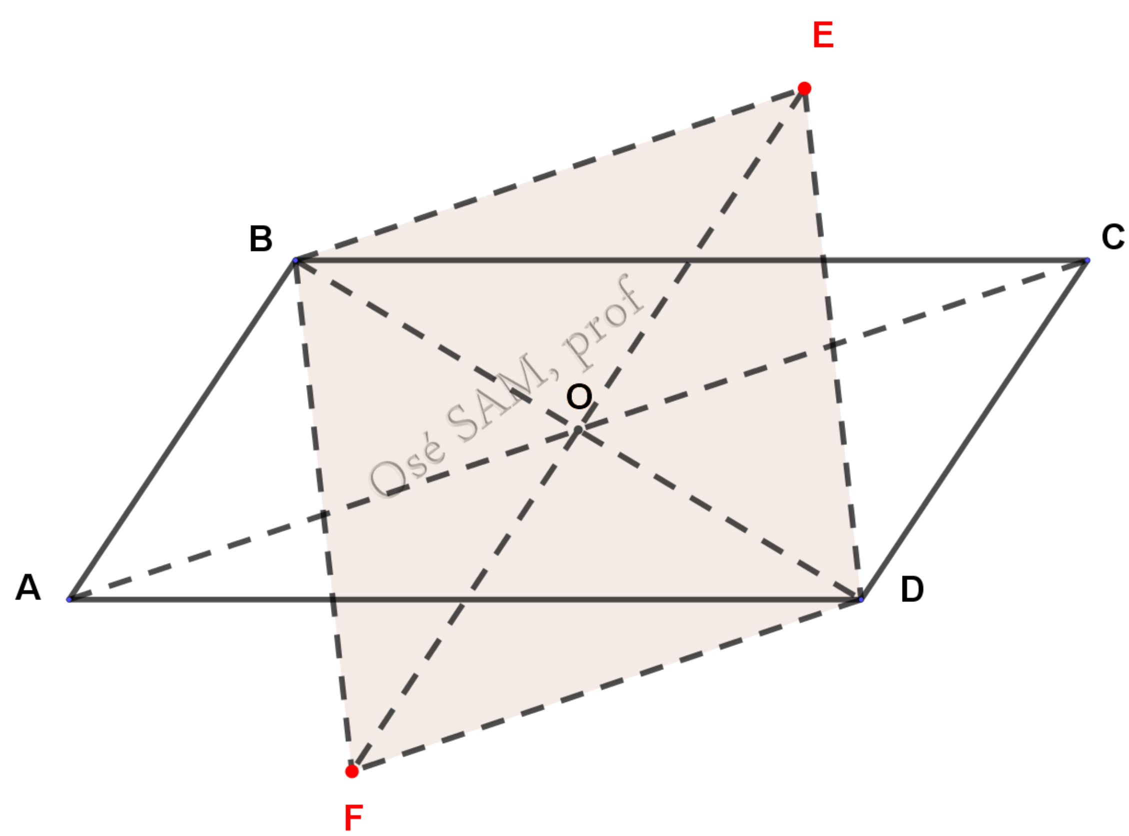
On a: $70\ m \leq \mathrm{P} \leq 150\ m$ alors la valeur minimale et la valeur maximale du périmètre de ce champ sont respectivement $70\ m$ et $150\ m$.

<u>Exercice N°3</u>

1. Construction des points E et F.

Ce qu'il faut savoir afin de pouvoir bien placer les points E et F:

- ❑ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AO}$ signifie que:
  - les droites (BE) et (AO) sont parallèles;
  - les deux vecteurs ont la même direction (sont colinéaires);
  - les deux vecteurs ont le même sens;
  - BE=AO;
  - le quadrilatère BEOA est un parallélogramme.
- ❑ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CO}$ signifie que:
  - les droites (DF) et (CO) sont parallèles;
  - les deux vecteurs ont la même direction (sont colinéaires);
  - les deux vecteurs ont le même sens;
  - DF= CO;
  - le quadrilatère DFOC est un parallélogramme.



2. Montrons que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$

ABCD étant un parallélogramme de centre O, alors:

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Or, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OC}$.

Nous avons aussi: $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow -\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OC}$.

Nous avons donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OC}$. Ce qui signifie que: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$.

Donc, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$.

Déduisons que le quadrilatère BEDF est un parallélogramme.

On a: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$ alors le quadrilatère BEDF est un parallélogramme.

<u>NB:</u> La nature exacte du quadrilatère BEDF est un losange.