

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE – DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM – COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Peut-on apprendre la citoyenneté ? Argumentez et étayez votre point de vue.

Sujet n° 2

« La race naît du racisme, et non le contraire. ».

Ta-Nehisi Coates (1975-), écrivain et journaliste américain. Citation tirée de Une colère noire paru en 2015. Commentez cette citation et argumentez.

Sujet n° 3

« La misère peut soutenir le fanatisme : quand il n'y a plus aucune ressource, on se tourne vers Dieu... ».

Germaine Tillion (1907-2008), ethnologue et résistante française. Citation tirée de La Traversée du mal, livre d'entretien, paru en 1997. Vous éclairerez cette citation en illustrant vos propos.

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE PIERRE NDIAYE - DAKAR

ÉCOLE NATIONALE D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ET DE MANAGEMENT
ENEAM - COTONOU

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé pourra être admis dans les questions suivantes. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation. Tous les résultats seront encadrés.

1 Problème d'analyse

Dans ce problème, nous nous intéressons à l'étude de certaines propriétés de la fonction zêta de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Partie I : Graphe de la fonction ζ

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction ζ .
2. Démontrer que ζ est continue sur D .
3. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4.
 - a) Démontrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition D et donner l'expression de ses dérivées sous forme de séries.
 - b) En déduire les variations de la fonction ζ ainsi que sa convexité.

5. a) Soit $n \geq 1$ et $x \in D$. Montrer que : $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$.
- b) En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^+$.
6. En utilisant l'ensemble des questions précédentes, donner une représentation graphique la plus précise possible de la fonction ζ sur son domaine de définition.

Partie II : Un prolongement de la fonction ζ

On pose $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

7. Démontrer que η est défini sur $]0, +\infty[$.
8. Montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\zeta(x) - \eta(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.
9. Démontrer que la fonction $\hat{\zeta}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $\hat{\zeta}(x) = \frac{\eta(x)}{1 - 2^{1-x}}$ est un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction ζ .

Partie III : Calcul de valeurs particulières

Dans cette partie on se propose de calculer les valeurs de $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ à l'aide d'une série de Fourier.

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique et paire, telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

10. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f .
11. a) Justifier que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a : $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.
- b) En déduire que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
12. En utilisant la question 10. déterminer $\zeta(4)$.

Partie IV : un lien avec les nombres premiers

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Lorsque la suite $\left(\prod_{n=1}^N u_n\right)_{N \geq 1}$ converge vers une limite finie non nulle, on dit que le produit infini de terme général $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et on note :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que le produit infini de terme général $(u_n)_{n \geq 1}$ diverge.

13. a) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. Démontrer que le produit infini de terme général $(u_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} \ln(u_n)$ est convergente.

b) Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

c) On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant et on fixe $x > 1$.

i) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(p_n)^x}$ converge.

ii) Après avoir justifié que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{1 - p_n^{-x}} > 0$, établir la convergence du produit infini de terme général $\left(\frac{1}{1 - p_n^{-x}}\right)_{n \geq 1}$.

14. Soit $x > 1$.

a) Fixons deux entiers naturels non nuls m et M . Justifier que $\prod_{k=1}^m \left(\sum_{i_k=0}^M \frac{1}{(p_k^{i_k})^x}\right) = \sum_{n \in A_{m,M}} \frac{1}{n^x}$

où $A_{m,M} = \left\{ p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m} \mid (i_1, \dots, i_m) \in \llbracket 0, M \rrbracket^m \right\}$.

b) En déduire que $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-x}}$.

15. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$.

2 Problème d'algèbre

Notations

Dans ce problème n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2. Nous utiliserons également les notations suivantes :

- Pour tout nombre complexe z , le réel positif $|z|$ désigne le module de z .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels (*resp.* complexes).
- $\mathbb{R}^n$ (*resp.* $\mathbb{C}^n$) désigne l'ensemble des vecteurs à n coordonnées réelles (*resp.* complexes)
- Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note : $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$.
- Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $|A|$ est la matrice donnée par $(|a_{ij}|)_{1 \leq i, j \leq n}$. De même, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, le vecteur $|x|$ est le vecteur donné par $(|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A (qui est non vide) et on définit $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (qui est non vide) et on définit de la même manière $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. On dira que λ_0 est une valeur propre dominante de A si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\lambda \neq \lambda_0 \implies |\lambda| < |\lambda_0|$.

Partie I : Généralités sur les matrices positives

- Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (*resp.* strictement positive) si on a pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{ij} \geq 0$ (*resp.* $a_{ij} > 0$). On notera alors $A \geq 0$ (*resp.* $A > 0$).
- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A - B$ est positive (*resp.* strictement positive), on notera $A \geq B$ (*resp.* $A > B$).
- De même, un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est dit positif (*resp.* strictement positif) lorsque pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \geq 0$ (*resp.* $x_i > 0$). On notera alors $x \geq 0$ (*resp.* $x > 0$).
- Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $x - y$ est positif (*resp.* strictement positif), on notera $x \geq y$ (*resp.* $x > y$).

1. Exhiber une matrice positive, non nulle, qui ne soit pas strictement positive.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Démontrer que si $AB = 0$, alors $A = 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ strictement positif et tel que $Ax = |A|x$. Démontrer que A est une matrice positive.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Démontrer que $|Ax| \leq |A||x|$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A est positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif, le vecteur Ax est positif.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ positif et non nul, le vecteur Ax est strictement positif.

Partie II : Théorème de Perron pour les matrices strictement positives

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive.

L'objectif de cette partie est de démontrer les résultats suivant :

- ✧ $\rho(A) > 0$,
 - ✧ $\rho(A)$ est une valeur propre de A ,
 - ✧ $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
 - ✧ l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.
7. Démontrer que $\|\cdot\|_1$ définit bien une norme sur $\mathbb{C}^n$.
 8. On considère l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$.
Soit $x \in X$. On pose $K(x) = \{t \in \mathbb{R}_+ ; tx \leq Ax\}$.
 - a) Démontrer que $K(x) \subset [0, \alpha]$ où $\alpha = n \max_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$.
 - b) Démontrer que $K(x)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
 - c) Montrer que $K(x)$ est un compact de $\mathbb{R}$ et que $K(x)$ contient au moins un élément strictement positif.
 - d) Justifier que l'ensemble $K(x)$ admet un maximum que l'on notera $\theta(x)$.
 - e) Justifier que l'ensemble $\{\theta(x) ; x \in X\}$ admet une borne supérieure r_0 vérifiant $r_0 \in]0, +\infty[$.
 9. Dans cette question, on suppose qu'il existe un élément $x_0 \in X$ tel que $\theta(x_0) = r_0$ et $Ax_0 \neq r_0x_0$.
 - a) Démontrer que le vecteur $A(Ax_0 - r_0x_0)$ est strictement positif.
 - b) En déduire qu'il existe un réel $\epsilon > 0$, que l'on fixera, tel que $A(Ax_0 - r_0x_0 - \epsilon x_0) \geq 0$.

- c) On pose $y = \frac{1}{\|Ax_0\|_1} Ax_0$. Démontrer que $y \in X$ et que $\theta(y) \geq r_0 + \epsilon$.
- d) Conclure que si un élément $x_0 \in X$ vérifie $\theta(x_0) = r_0$, alors on a $Ax_0 = r_0 x_0$.
10. a) Démontrer que $X = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$.
- b) Démontrer l'existence d'un vecteur $x_0 \in X$ tel que $\theta(x_0) = r_0$.
On pourra commencer par introduire une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\theta(x^{(k)}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} r_0$.
11. Dédurre des questions 9. et 10. que $r_0 = \rho(A)$, que $\rho(A) > 0$ et que $\rho(A)$ est une valeur propre de A .
12. Il reste à prouver que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Pour cela on considère une valeur propre $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ de A vérifiant $|\lambda| = \rho(A)$ et on fixe un vecteur propre $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ associé à la valeur propre λ tel que $\|v\|_1 = 1$.
- a) Démontrer que $|v|$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$ et en déduire que $|v| > 0$.
- b) En justifiant la relation $|Av| = A|v|$, déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} v_k \right| = \sum_{k=1}^n a_{i,k} |v_k|$.
- c) Démontrer que v est colinéaire à $|v|$, c'est à dire qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $v = \xi |v|$.
On pourra commencer par introduire les angles $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in]-\pi, \pi]^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_k = |v_k| e^{i\theta_k}$.
- d) Soit $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in X$ un vecteur tel que $\theta(x_0) = \rho(A)$. On pose $t = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{-x_{0,j}}{|v_j|} \right)$ et $y = x_0 + t|v|$.
- i) Calculer Ay et en déduire que $y = 0$.
- ii) Montrer que v est colinéaire à x_0 .
- e) Conclure que $\lambda = \rho(A)$ et en déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- f) Conclure que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.

Partie III : Généralisation aux matrices primitives

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. On dit que A est une matrice primitive s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que A^k est une matrice strictement positive.

13. Donner un exemple d'une matrice primitive qui ne soit pas strictement positive.

L'objectif de cette partie est de généraliser les résultats obtenus en Partie II aux matrices primitives. On fixe donc une matrice primitive $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On fixe un entier k tel que A^k soit une matrice strictement positive et on pose $B = A^k$.

14. Démontrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{\lambda^k; \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)\}$ et en déduire que $\rho(A) > 0$.

15. a) On fixe $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda^k = \rho(B)$. Montrer que $\lambda = \rho(A)$, ce qui prouve en particulier que $\rho(A)$ est une valeur propre de A .

b) Démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A considérée comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

16. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif.

17. Conclure que les résultats obtenus en Partie II se généralisent aux matrices primitives.

Partie IV : Application à la convergence de la suite des itérées des matrices stochastiques primitives

- Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est positive et si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour tout entier naturel non nul p , on notera $(a_{i,j}^{(p)})_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients de la matrice A^p .

- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dira que la suite de matrices $(A^p)_{p \geq 0}$ converge vers une matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}^{(p)} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} b_{i,j}$.

18. Démontrer qu'un produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

19. Démontrer qu'une matrice stochastique et primitive admet 1 comme valeur propre dominante et que l'espace propre associé est une droite vectorielle dirigée par un vecteur strictement positif. Déterminer alors l'unique vecteur propre x associé à la valeur propre 1 qui soit strictement positif et tel que $\|x\|_1 = 1$.

20. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que pour tout $p \geq 1$ on a :

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}^{(p)}| \leq \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \times \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{k,j}| \right)^{p-1}.$$

21. Dans cette question on fixe A une matrice stochastique et primitive.

a) Justifier l'existence d'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de la

forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ où $T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure dont

les coefficients diagonaux sont tous de module strictement inférieur à 1.

b) Pour tout $\delta > 0$, on définit la matrice $D(\delta) = \text{diag}(1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-2})$ diagonale de coefficients diagonaux successifs $1, \delta, \delta^2, \dots, \delta^{n-2}$ et on pose $\hat{T} = D(\delta)^{-1}TD(\delta)$.

On note $\hat{T} = (\hat{t}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$.

Démontrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0[$, on ait $\max_{1 \leq j \leq n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\hat{t}_{k,j}| < 1$.

c) Démontrer que la suite $(T^p)_{p \geq 1}$ converge vers la matrice nulle.

d) En déduire la convergence de la suite $(A^p)_{p \geq 0}$ vers une matrice stochastique ayant toutes ses lignes égales.

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, N désigne l'ensemble des entiers naturels, R l'ensemble des nombres réels, e le nombre de Néper et $\ln$ le logarithme népérien.

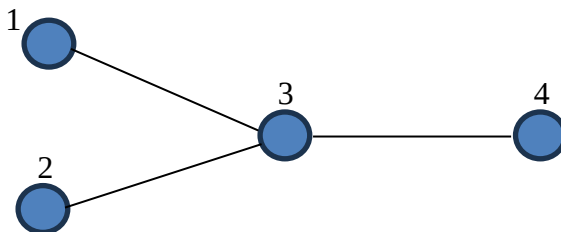
Exercice n° 1

Soit p la projection vectorielle de R^3 sur le plan P d'équation : $x+y+z=0$ parallèlement à la droite D d'équation : $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Montrer que R^3 est la somme directe de P et D .
2. Soit $u = (x, y, z) \in R^3$, déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de R^3 .
3. Déterminer une base de R^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice n° 2

On considère le graphe suivant :



Ce graphe est constitué de 4 sommets numérotés et de 3 arêtes (ou segments qui relient deux sommets).

On appelle matrice adjacente à ce graphe, la matrice symétrique, notée A , de terme général a_{ij} tels que : $a_{ij} = 1$ si les sommets i et j sont reliés par une arête, sinon $a_{ij} = 0$.

1. Expliciter la matrice A et déterminer son noyau.
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Calculer A^n pour tout entier naturel non nul (on pourra calculer A^2 et A^3).
4. On appelle matrice des degrés, la matrice diagonale, notée D , de terme général d_{ij} tel que : $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{ii} =$ le nombre d'arêtes connectées au sommet i . Puis on note L la matrice définie par : $L=D-A$. Déterminer les valeurs propres de L .

Exercice n° 3

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$

1. Calculer $I = \int_0^1 f(x)dx$
2. Etudier la convergence de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} f(x)dx$.
3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction f .

Exercice n° 4

Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = \frac{1}{(x+1)^2(3-x)}$

1. Déterminer la primitive G de g sur l'intervalle $] -1, 3[$ telle que : $G(1)=0$.
2. Donner un développement limité d'ordre n de g au voisinage de 0.
3. En déduire la valeur de la dérivée troisième de G en zéro.

Exercice n° 5

On considère les suites (u_n) et (λ_n) , $n \geq 1$, définies par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}; \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{u_{n+1}}$$

1. Montrer que pour $u_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, il existe deux autres suites (θ_n) et (α_n) telles que pour tout entier n strictement positif, on a : $u_n = \cos(\theta_n)$; $\lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n)$; $0 \leq \theta_n \leq \pi/2$.
Montrer que la suite (λ_n) est convergente, on précisera sa limite.

2. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité :

$$|\pi - \lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}. \text{ En déduire un entier } N \text{ tel que : } |\pi - \lambda_N| \leq 10^{-6}.$$

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique définie sur R^2 par $f(0,0) = 0$ et :

$$f(x, y) = \frac{4xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

1. Etudier la continuité de f sur R^2 .
2. Etudier la différentiabilité de f sur R^2 .
3. La fonction f est-elle de classe C^2 sur R^2 ?

Exercice n° 7

On considère la fonction réelle f définie sur l'intervalle $[0, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } \sqrt{3} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Soit D le domaine du plan défini ainsi : $D = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

On considère le solide engendré par la rotation de ce domaine D autour de l'axe des abscisses.

1. Calculer le volume de ce solide.
2. En utilisant la même démarche qu'à la question précédente, retrouver le volume d'une sphère de rayon R .

AVRIL 2025

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'article ci-après a été publié sur le site de la revue *The Conversation FR*, le 3 août 2023. Il a été écrit en français et en collaboration par trois chercheurs en agronomie : Raphaël Belmin, Hamado Sawadogo et Moussa N'Dienor.

L'article compte 1047 mots et doit être résumé en 150 mots (plus ou moins 10%) avec le nombre de mots indiqué en fin de copie.

L'évaluation de cet exercice tiendra compte du fond et de la forme de votre écrit (l'orthographe, la ponctuation et la présentation).

Cultiver sans eau ou presque : la technique du zaï au Sahel.

« À l'échelle cosmique, l'eau liquide est plus rare que l'or », écrivait le célèbre astrophysicien Hubert Reeves. Ce qui vaut pour l'univers est encore plus vrai au Sahel, cette immense bande aride qui parcourt l'Afrique d'est en ouest, à la lisière du Sahara. Au Sahel, le premier des biens, c'est l'eau. Depuis le III^e millénaire av. J.-C., les peuples de la région ont réalisé des efforts considérables et déployé des trésors d'imagination pour capter et maîtriser cette ressource si rare. Face à une eau mal répartie dans l'espace et le temps, ils ont dû inventer des méthodes intelligentes et parcimonieuses pour tirer parti de la moindre goutte.

Autrefois ignorés, les secrets des paysans sahéliens attirent aujourd'hui l'attention des chercheurs et des décideurs. Et pour cause, ils inspirent de nouvelles voies d'adaptation au changement climatique pour l'agriculture africaine, et au-delà.

L'art de capturer la pluie

Chaque année dans le Yatenga, au nord du Burkina Faso, les premières pluies de juin viennent apaiser les brûlures d'une interminable saison sèche. Les sols imbibés d'eau font alors renaître

la vie dans les champs de brousse. Partout ou presque, des bouquets de mil et de sorgho jaillissent de terre, transformant les savanes arides en bocages verdoyants.

Mais dans certains villages, la période de grande sécheresse des années 1970-80 a bouleversé le fragile écosystème sahélien : avec l'amincissement de la couverture végétale, les sols instables et ferrugineux du Yatenga ont été décapés par l'érosion ; ils sont devenus si pauvres et encroûtés que les pluies torrentielles ne font que ruisseler sans pouvoir s'infiltrer. Au lieu d'apporter la vie, l'eau érode les terres et emporte les espoirs des paysans.

Dans ce paysage hostile, certains paysans tentent de s'adapter et d'innover. Yacouba Sawadogo est l'un d'eux. Dans un champ stérile du village de Gourga, Yacouba et sa famille s'affairent pour percer le sol encroûté avant l'arrivée des premières pluies. Armés de leur *daba* (pioche traditionnelle), ils creusent la terre rouge de latérite. Dans une chorégraphie vigoureuse, les paysans quadrillent ainsi la parcelle de ces trous réguliers. Ils y glissent une poignée de compost, quelques graines de sorgho, une pellicule de terre légère : et voilà, le champ est prêt pour accueillir la prochaine pluie d'orage !

Semer comme cela des graines en pleine saison sèche, dans un champ que l'on parsème de trous, l'idée peut sembler contre-intuitive à l'œil extérieur, mais elle relève en réalité d'une expertise séculaire des habitants du Yatenga : le zaï. Cette technique agricole révolutionnaire les a rendus maîtres dans l'art de capturer la pluie. L'histoire orale raconte que dans l'ancien temps, la technique était utilisée par les familles dotées de très petites surfaces et de terres pauvres, avant de tomber dans l'oubli dans les années de 1950, période marquée par des pluies abondantes.

Mais dans les décennies désespérément sèches de 1970-1980, face à l'avancée du désert, Yacouba Sawadogo a fait un choix singulier : celui de ne pas fuir. Au lieu de cela, il a exhumé le zaï, technique grâce à laquelle il est parvenu à revitaliser et reboiser 27 hectares de terres dégradées. Celui qu'on surnomme « l'homme qui a arrêté le désert » a ainsi redonné espoir à tout son village. Primé « champion de la Terre » par les Nations unies et rendu célèbre grâce à un livre, Yacouba Sawadogo est devenu le symbole d'une Afrique qui innove face à la désertification.

Au Burkina Faso, dans le cadre du projet Fair Sahel, les chercheurs de l'INERA¹ réalisent des essais agronomiques visant à substituer une partie du fumier organique des poquets² de zaï par des microdoses d'engrais minéral. Une manière d'améliorer les rendements du sorgho tout en faisant sauter un verrou majeur d'adoption : la cherté de la matière organique. Les agronomes travaillent également à associer dans les mêmes poquets des céréales comme le sorgho avec des légumineuses comme le niébé. Ils testent enfin le zaï sur de nouvelles cultures, à l'instar du maïs, du coton, de la pastèque et des cultures horticoles comme l'aubergine.

Dans les zones maraîchères du Sénégal, la technique du zaï s'est également diffusée en produisant de nombreux avatars. Lorsque l'eau devient rare et chère, les paysans cherchent

1. Institut National pour l'Etude et la Recherche Agronomique (INERA)

2. Un poquet est un petit trou dans lequel on sème les graines.

par tous les moyens à économiser la ressource. À Fatick, dans l'ouest, ils utilisent des pneus recyclés pour concentrer les apports de fumier et d'eau au niveau des racines des pieds de piment. Dans la région littorale de Mboro, ils sculptent les parcelles d'oignons de minuscules casiers qu'ils inondent au sseau. Au sud, à Kolda, ils repiquent les aubergines dans des poquets recouverts de paille. Ces innovations sont frugales et suivent toutes la même logique : concentrer l'eau et la fertilité dans de petites poches de vie, à l'abri d'un environnement extérieur hostile.

Une « autre » voie d'adaptation

En réponse au changement climatique, les États du monde entier se sont engagés dans une compétition pour augmenter la disponibilité de l'eau pour leur agriculture. Barrages, mégabassines, périmètres irrigués... partout, la politique dominante consiste à étendre à tout prix les surfaces irriguées.

Mais ce choix, s'il répond à un besoin à court terme, s'accompagne d'un sérieux risque de « mal-adaptation » : dégradation des ressources en eau, injustices sociales et tensions géopolitiques sont la contrepartie cachée des grands projets hydroagricoles. Le modèle agricole qui se dessine pour demain semble bien fragile et vulnérable, car dépendant d'une eau captée et acheminée à grand renfort d'énergie fossile.

À contre-courant du régime d'innovation dominant, les paysans sahéliens ont choisi la voie de la sobriété. Confrontés depuis des siècles à d'importantes limitations sur la ressource en eau, ces millions de « chercheurs aux pieds nus » n'ont cessé d'innover en silence. Au « toujours plus d'eau, quoiqu'il en coûte », ils ont préféré un principe de parcimonie. Et le zaï, aussi médiatisé soit-il, n'est que la face émergée de l'iceberg : demi-lunes, cordons pierreux, cuvettes fruitières, mares, cultures stratifiées... Ces techniques ancestrales méritent toute notre attention car elles représentent des formes intelligentes d'adaptation à des conditions thermiques et hydriques extrêmes, proches de ce que vivront les pays méditerranéens en 2100 dans un scénario climatique à plus quatre degrés.

Pour construire un nouveau récit sur l'avenir mondial de l'eau, tendons donc l'oreille et écoutons les secrets des paysans sahéliens.