EAMAC	Concours EAMAC 2026	Cycle : EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5pts)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$ est une intégrale convergente. On la note I.

   L'objectif de cet exercice est de calculer I.

2. Exprimer $sin^3(x)$ à l'aide de sin(x) et de sin(3x).

3. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$$

   A l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I(\varepsilon) = \frac{3}{4}\int_{\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\sin^3(x)}{x^2} dx$$

4. Démontrer que

$$\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad u - \frac{u^3}{6} \leq \sin(u) \leq u$$

5. Déterminer lim I(ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow u$ et conclure.

Exercice 2 : (5pts)

Soit n, un entier supérieur ou égal à 1.

Soit $B_n = (e_1, \ldots, e_{2n+1})$ la base canonique R^{2n+1} et $v_n = e_1 + \cdots + e_{2n+1}$.

On note $M_n = (m_{i,j})$ la matrice carrée de $M_{2n+1}(R)$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients suivants :

$$\forall i \in [1, 2n+1], m_{i,1} = m_{i,2n+1} = 1 \text{ et } m_{n+1,\, n+1} = 1$$

On note également f_n l'endomorphisme de R^{2n+1} dont la matrice représentative dans la base B_n est M_n.

1. On suppose dans cette question que $n = 1$, et donc :

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(a) La matrice M_1 est-elle inversible ?

(b) Calculer $f_1(e_2)$.

(c) Soit un réel a. On note $u_a = (1, a, 1)$. Montrer qu'il existe une valeur de a telle que le vecteur u_a est un vecteur propre de f_1. Quelle est la valeur propre associée ?

(d) En déduire les valeurs propres de f_1 ainsi qu'une base de R^3

formée de vecteurs propres de f_1. On revient au cas général.

2. (a) Quel est le rang de f_n ?

(b) Montrer que la famille $F = (v_n, e_{n+1})$ est une base de $\mathrm{Im}(f_n)$.

(c) On note g_n la restriction de f_n à $\mathrm{Im}(f_n)$.

i. Justifier que g_n est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f_n)$.

ii. Écrire la matrice A_n de g_n dans la base $\mathrm{Im}(f_n)$.

(d) Soit λ une valeur propre non nulle de f_n et x un vecteur propre associé. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(f_n)$.

(e) En déduire toutes les valeurs propres de f_n.
La matrice M_n est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : (5pts)

Soit f : [0, 1] → IR continue vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et g : [0, 1] → IR continue

a) Montrer qu'il existe x $\in$]0, 1[vérifiant

$\int_0^x tf(t)dt = 0$

b) Déterminer les fonctions h : [0, 1] → IR deux fois dérivables, telles que

h(0) = h(1) = 0 et h'' = g.

Exercice 4 : (5pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec n > 2. On note $R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynôme réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, ..., L_n$ de $R_n[X]$ associés aux nombres $x_0, ..., x_n$ de R distincts

par : pour tout k appartenant à $[0, n]$, $L_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{X-x_i}{x_k-x_i}$

1. Montrer que la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $R_n[X]$.

2. Donner l'écriture de tout polynôme P de $R_n[X]$ dans cette base.

Dans la suite de cet exercice, on se donne un couple (A, B) de polynômes avec A appartenant à $\mathrm{R}_n[X]$ et $\deg(B) = n + 1$.
On considère également l'application f définie sur $\mathrm{R}_n[X]$ qui à un polynôme P de $\mathrm{R}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathrm{R}_n[X]$.
4. Pour tout entier $k \in [0, n]$ on désigne respectivement par $Q_k \in R[X]$ et $R_k \in R_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de ALk par B.
   (a) Soit $(i, j) \in [0, n]^2$. Déterminer $R_k(x_j)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?