



Polyvalent
Corporation

Fomesoutra.com
ça soutra!



Ecole Africaine de la Météorologie
et de l'Aviation Civile



EAMAC/ASECENA

CYCLE INGENIEUR BORD DE PREPARATION 2022



MATHEMATIQUES -PHYIQUE- ANGLAIS-FRANCAIS

- Cours détaillées avec exercices d'application
- TD corrigés
- Anciens sujets corrigés



653210855/695178532

Choisir polyvalent corporation c'est déjà réussir

Table des matières

INTITULE	PAGE
COURS DE MATHEMATIQUE AVEC EXERCICE D'APPLICATION	
Loi de composition interne	3 - 18
Groupes anneau corps	19 - 39
Espace vectoriel	40 - 45
matrice	46 - 48
polynômes	49 - 52
Systeme linéaire	53 - 56
Fonction a plusieurs variable	57 - 61
Fractions rationnelles	62 - 63
Intégrale dépendant d'un paramètre	64 - 66
Intégrales généralisée	67 - 69
Série (numérique, entière, fonction, fourrier)	70 - 80
Suite numérique	81 - 86
Td corrige algèbre	87 - 99
Cours de physique avec exercice d'application	
Cinématique du point	101 - 104
Théorème du moment cinétique	105 - 106
Electrocinétique (intensité tension)	107 - 110
puissance	111 - 112
Dipôles électrocinétique	113 - 118
Loi de coulomb	119 - 120
Champ électrostatique	121 - 124
Potentiel électrostatique	125 - 128
Dipôles électrostatique	129 - 130
Théorème de gauss	131 - 132
Conducteurs en équilibre	133 - 134

Condensateurs	135 - 136
Energie électrostatique	137 - 138
Champ magnétique	139 – 140
Loi de Biot et savart	141 - 142
Théorème d'ampère	143 - 146
induction	147 - 148
Equation de maxwell	149 - 150
Réflexion réfraction	151 - 154
thermodynamique	155 - 156
Gaz et phases condensés	157 - 158
Force de pression	159 - 160
Premier principe	161 - 164
Energie thermo	165 - 166
Second principe	167 - 168
Td corrige physique	
Td corrigé mécanique du point	170 - 175
Td corrigé thermodynamique	176 - 193
Td corrigé thermodynamique 2	194 - 205
Td corrigé électricité	206 - 219
Td corrigé magnéto	220 - 233
Anciens de mathématiques sujet eamac	235 - 259
Anciens sujet physique concours eamac	261 - 301
Corrigées anciens sujet de physique et math	303 - 340
Français anglais concours eamac	341 - 369
Programme concours eamac cycle ingénieur	



**GROUPE POLYVALENT CORPORATION CENTRE DE PREPARATION AU CONCOURS D'ENTRÉE
DANS LES GRANDES ECOLES ET FACULTES DU CAMEROUN**

LE BORD DE PREPARATION AU CONCOURS

POLYVALENT
TEAMAC CYCLE
CORPORATION
INGENIEUR

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



1

**COURS DE MATHEMATIQUE
AVEC EXERCICE
D'APPLICATION**



**POLYVALENT
CORPORATION**

Structures algébriques (partie 1)

Lois de composition interne

I) Lois de composition interne

1) Introduction :

a) L'opération $+$ sur \mathbb{R} est une application f qui, à deux réels (x, y) en associe un troisième z (la somme) qui est aussi un réel : $f(x, y) = x + y = z$

on a donc : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + y$

on dit L'opération $+$ est une loi de composition interne sur \mathbb{R}

b) L'opération $-$ sur \mathbb{N} n'est une loi de composition interne sur \mathbb{N} car par exemple : $2 \in \mathbb{N}$ et $3 \in \mathbb{N}$ mais : $2 - 3 \notin \mathbb{N}$

2) Définition : Soit E un ensemble non vide. Une loi de composition interne sur E (ou encore une opération dans E) est une application f de $E \times E$ dans E .

$f : E \times E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

3) notations : l'élément : $f(x, y)$ dans E s'appelle

la composée de x et y dans l'ordre par cette loi

de composition interne f et on le note : $x * y$ ou

$x \text{T} y$ ou $x \perp y$ ou $x \vee y \dots$

au lieu de : $f(x, y)$

4) Autre exemples d'ensembles et lois de compositions internes :

On connaît les ensembles : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}; \mathbb{C}$

1) • Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne on écrit : $(\mathbb{N}; +); (\mathbb{Z}; +); (\mathbb{Q}; +); (\mathbb{R}; +)$

$(\mathbb{C}; +); (\mathbb{N}; \times); (\mathbb{Z}; \times); (\mathbb{Q}; \times); (\mathbb{R}; \times); (\mathbb{C}; \times)$

• Dans \mathbb{N} , la soustraction n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans \mathbb{Z} : $(\mathbb{Z}; -)$

• La division dans \mathbb{R} n'est pas une loi interne mais la division dans \mathbb{R}^* l'est. on a : $(\mathbb{R}^*; \div)$

• Dans \mathbb{N}^* , l'exponentiation, c'est-à-dire

l'application : $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, le PGCD ou le
 $(x, y) \mapsto x^y$

PPCM sont des lois internes :

on a donc : $(\mathbb{N}^*; f); (\mathbb{N}^*; \wedge); (\mathbb{N}^*; \vee)$

• E étant un ensemble donné ; $P(E)$ l'ensemble

des parties de E on a : $X \in P(E) \Leftrightarrow X \subset E$

$x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in X \text{ et } x \in Y$ $x \in X \cup Y \Leftrightarrow x \in X \text{ ou } x \in Y$

$x \in \bar{X} \Leftrightarrow x \notin X$

$x \in X - Y \Leftrightarrow x \in X \text{ et } x \notin Y$

$x \in X \Delta Y \Leftrightarrow x \in X - Y \text{ ou } x \in Y - X$

, l'intersection et la réunion et la différence

symétrique et le complémentaire sont des lois de

composition interne dans $P(E)$ donc : $(P(E); \cup);$

$(P(E); \cap); (P(E); \Delta); (P(E); ^c)$

- l'addition et la multiplication dans

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \dots; \overline{n-1}\}$ sont définies par:

$$\forall (\bar{x}; \bar{y}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \begin{cases} \overline{\bar{x} + \bar{y}} = \overline{x + y} \\ \overline{\bar{x} \times \bar{y}} = \overline{x \times y} \end{cases}$$

l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des lois de composition interne dans on écrit :

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +\right); \left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \times\right)$$

- l'ensemble des polynômes de degrés inférieur

a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$

la somme et la multiplication de deux polynômes P et Q sont définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x).$$

La somme et le produit de deux polynômes de degrés inférieur a n est un polynôme de degrés inférieur a n . Donc, $+$ et \times sont des lois de compositions internes sur $\mathbb{R}_n[X]$

on écrit : $(\mathbb{R}_n[X]; +)$; $(\mathbb{R}_n[X]; \times)$

- Si I est un intervalle de \mathbb{R} , l'ensemble des fonction de I dans \mathbb{R}

$$\text{Se note : } F(I; \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$$

la somme et la multiplication de deux applications f et g de I dans \mathbb{R} sont définies par: $\forall x \in I, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$

$$\forall x \in I, (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

La somme de deux applications de I dans \mathbb{R} est une application de I dans \mathbb{R} . Donc, $+$ et \times sont des lois de compositions internes sur $F(I; \mathbb{R})$

on écrit : $(F(I; \mathbb{R}); +)$; $(F(I; \mathbb{R}); \times)$

- Si E est un ensemble non vide

Dans $F(E; E)$ est l'ensemble des fonctions de

E dans E on définit la relation \circ par :

$$\forall x \in E, (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

- est une loi interne dans $F(E; E)$ on écrit :

$$(F(E; E); \circ)$$

- l'ensemble des translations On le note : T_r

la composition de deux translations est une translation donc : \circ est une loi interne dans T_r

on écrit : $(T_r; \circ)$

- L'ensemble des homothéties de même centre

O on le note : H_o et on a la composition de

deux homothéties de centre O est une homothétie de centre O donc : \circ est une loi

interne dans H_o on écrit : $(H_o; \circ)$

- L'ensemble des rotations de même centre O on

le note : R_o et on a la composition de deux

rotations de centre O est une rotation de centre

O donc : \circ est une loi interne dans R_o

on écrit : $(R_o; \circ)$

- tout application bijective du plan P dans P on l'appelle une transformation du plan

L'ensemble des transformations du plan on le note : T on a :

$$\forall (f; g) \in T \quad \forall M \in P \quad (f \circ g)(M) = f(g(M))$$

Donc : la composition de deux transformations est une transformation.

donc : \circ est une loi interne dans T

on écrit : $(T; \circ)$

- L'ensemble des vecteurs du plan on le note : V_2

et on a la somme de deux vecteurs est un vecteur donc : $+$ est une loi de composition

interne dans V_2 on écrit : $(V_2; +)$

• le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un scalaire donc : • n'est pas une loi de composition interne dans V_2

5) Applications :

Exemple 1 : 1) montrer on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication

sont des lois de compositions internes

Solution :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

on utilisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on remarque bien que ce sont des lois de compositions internes

Exemple 2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la

relation T tel que : $xTy = \frac{x+y}{1+xy}$;

$\forall (x; y) \in]-1;1[$

Montrer que T est une loi de composition interne

Dans $]-1;1[$

Solution : soit $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$

Montrons que : $xTy = \frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$?

Calculons : $1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{(1+xy)^2 - (x+y)^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2y^2 + 2xy + 1 - x^2 - y^2 - 2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1 - x^2 - y^2(1 - x^2)}{(1+xy)^2}$$

$$1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1 - x^2 - y^2 + x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{(1 - x^2)(1 - y^2)}{(1+xy)^2}$$

Or $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$ donc : $|x| < 1$ et $|y| < 1$

donc : $x^2 < 1$ et $y^2 < 1$ on a donc : $1 - \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 > 0$

donc : $\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1$ donc : $\sqrt{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2} < \sqrt{1}$

donc : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$ donc : $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$

donc : $\frac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$ cqfd

6) les matrices :

6-1) matrice carrée d'ordre 2

a) Définition 1 :

1) Une matrice carrée d'ordre 2

à coefficients réels est un tableau de quatre nombres (Il n'y a pas de séparation verticale ou horizontale, contrairement aux tableaux)

2) l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

On le note :

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

La somme et la multiplication et l'égalité de deux

matrices A et B dans $M_2(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $M_2(\mathbb{R})$

on écrit : $(M_2(\mathbb{R}); +)$; $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

b) Cas particulier :

1) la matrice : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice

unitaire

Et on a : $A \times I_2 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

2) la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice nulle

Et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

6-2) matrice carrée d'ordre 3

a) Définition :

1) Une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels est un tableau de 9 nombres

2) l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3

On le note :

$$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} / (a; b; c; d; f; g; h; i) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

La somme et la multiplication de deux matrices

A et B dans $M_3(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & g+g' \\ b+b' & e+e' & h+h' \\ c+c' & f+f' & i+i' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & d'' & g'' \\ b'' & e'' & h'' \\ c'' & f'' & i'' \end{pmatrix}$$

Avec : $a'' = aa' + db' + gc' \quad d'' = ad' + de' + gf'$

$b'' = ba' + eb' + hc' \quad e'' = bd' + ee' + hf'$

$$c'' = ca' + fb' + ic' \quad f'' = cd' + fe' + if'$$

$$g'' = ag' + dh' + gi' \quad h'' = bg' + eh' + hi'$$

$i'' = cg' + fh' + ii'$ La somme et le produit de deux

matrices sont des lois de compositions internes

dans $M_3(\mathbb{R})$ on écrit : $(M_3(\mathbb{R}); +)$; $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \\ e = e' \\ f = f' \\ g = g' \\ h = h' \\ i = i' \end{cases}$$

b) Cas particulier :

1) la matrice : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice

unitaire et on a : $A \times I_3 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

2) la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice

nulle et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

Exercice 1 : on considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ calculer } A^2 \text{ et } A^3$$

et en déduire $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

solution :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ vraie si $n=1$

b) supposons que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}^*$

II) parties stables pour une Loi de composition interne :

1) définition 1 : Soient $(E; *)$ un ensemble muni

d'une loi de composition interne

Soit F une partie non vide de E .

F est stable pour $*$ $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in F^2, x * y \in F$.

2) Exemples :

a) l'ensemble : $S = \{-1; 1\}$ est une partie stable de

$(\mathbb{R}; \times)$ mais il n'est pas stable dans $(\mathbb{R}; +)$

Car : $-1 \in S$ et $1 \in S$ mais $-1+1=0 \notin S$

b) Dans \mathbb{Z} , l'ensemble des nombres pairs est stable pour l'addition (la somme de deux nombres pairs est un nombre pair) ou pour la multiplication (le produit de deux nombres pairs est un nombre pair) alors que l'ensemble des nombres impairs est stable pour la multiplication (le produit de deux

nombres impairs est un nombre impair) mais n'est pas stable pour l'addition (la somme de deux nombres impairs n'est pas toujours un nombre impair).

2) Dans $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \circ)$ l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , l'ensemble des injections, l'ensemble des surjections et l'ensemble des bijections et l'ensemble des applications affines sont stables pour \circ (la composée de deux injections (resp. deux surjections, deux bijections, deux affines) est une injection (resp. une surjection, une bijection, affines)).

l'ensemble des symétries axiales n'est pas une partie stable dans $(T; \circ)$ (car la composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation et non une symétrie axiale)

Exercice 2 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne $*$ défini par : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$;

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3; +\infty[$

Montrer que S est une partie stable pour $(\mathbb{R}; *)$

Solution : soit $x \in S$ et $y \in S$

Montrons que : $x * y \in S$?

$$x * y - 3 = xy - 3x - 3y + 9 = x(y-3) - 3(y-3)$$

$$x * y - 3 = (y-3)(x-3)$$

$$\text{or } x \in S =]3; +\infty[\Leftrightarrow x > 3 \text{ et } y \in]3; +\infty[\Leftrightarrow y > 3$$

$$\text{donc : } x * y - 3 > 0 \text{ donc : } x * y \in]3; +\infty[= S \text{ cqfd}$$

donc : S est une partie stable pour $(\mathbb{R}; *)$

3) définition 2 : si $(E; *)$ est un ensemble muni

d'une loi de composition interne et F une partie stable dans $(E; *)$ alors $*$ est une loi de composition interne dans F et on l'appelle la loi induite sur F

III) Propriétés des lois de composition interne

Soient E un ensemble non vide et * une loi de composition interne sur E. * peut avoir ou non une ou plusieurs des propriétés suivantes :

1) Commutativité :

Définition 1 : * est commutative $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$

$$x * y = y * x.$$

2) Associativité

Définition 2 : * est associative $\Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in E^3$

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Si * est associative, les expressions $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$ peuvent se noter tout simplement : $x * y * z$.

Exemples : 1) L'addition et la multiplication dans

\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} sont commutatives et

associatives

mais la soustraction n'est ni commutatives ni

associatives en effet : $2 - 3 \neq 3 - 2$ et

$$2 - (3 - 1) \neq (2 - 3) - 1$$

2) L'addition et la multiplication dans $F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sont

commutatives et associatives

3) L'addition dans V_2 et V_3 est commutative et

associative

4) La loi \circ dans $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \circ)$ est associative mais

non commutative (en général $(f \circ g \neq g \circ f)$).

$$\text{Ex : } \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = x + 2 \end{array}$$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) = 2 \quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = 4$$

$$\text{On a : } (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$$

$$\forall (f; g; h) \in (F(\mathbb{R}; \mathbb{R}))^3$$

5) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne *

défini par : $x * y = 2x + 3y - 1$

$$\text{a) } 2 * 3 = 2 \times 2 + 3 \times 3 - 1 = 12$$

$$3 * 2 = 2 \times 3 + 3 \times 2 - 1 = 11$$

$$\text{On a : } 2 * 3 \neq 3 * 2$$

Donc : la loi * est non commutative

$$\text{b) } (1 * 1) * 1 = (2 \times 1 + 3 \times 1 - 1) * 1 = 4 * 1 = 10$$

$$1 * (1 * 1) = 1 * 4 = 4 * 1 = 13$$

$$\text{On a : } 1 * (1 * 1) = (1 * 1) * 1$$

Donc : la loi * est non associative

6) l'intersection et la réunion sont des lois

commutatives et associatives dans $P(E)$

7) la loi \circ dans : $(T_r; \circ)$; $(H_o; \circ)$; $(R_o; \circ)$

Est commutative et associative

5) le produit vectoriel dans V_3 n'est pas

$$\text{commutative : } (\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i})$$

6) le produit dans $M_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutative :

$$\text{Ex : } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc on a : } A \times B \neq B \times A$$

Remarque : si la loi est commutative et associative et on utilisant une notation additive ou multiplicative on a les écritures suivantes : $n \in \mathbb{N}$

1) Notation additive

$$\text{a) } a + b = b + a$$

$$\text{b) } (a + b) + c = b + (a + c)$$

$$\text{c) } \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ fois}} = na$$

$$\text{d) } na + ma = (n + m)a$$

2) Notation multiplicative

$$\text{a) } a \times b = b \times a$$

$$\text{b) } (a \times b) \times c = b \times (a \times c)$$

$$\text{c) } \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$$

$$\text{d) } a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Exercice3 :1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ défini par : $a*b = a+b-3ab$; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$
 Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T défini par : $(a;b)T(x;y) = (ax; ay+b)$; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$
 et $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans \mathbb{R}^2

Solution:1) Soit : $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = a+b-3ab = b+a-3ba = b*a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$$(a*b)*c = (a+b-3ab)*c = a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)c$$

$$(a*b)*c = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$$

et on a :

$$a*(b*c) = a*(b+c-3bc) = a+(b+c-3bc)-3a(b+c-3bc)$$

$$a*(b*c) = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$$

Donc : $(a*b)*c = a*(b*c)$

Donc : $*$ est associative

2)a) on a : $(1;3)T(2;0) = (1 \times 2; 1 \times 0 + 3) = (2;3)$

$$(2;0)T(1;3) = (2 \times 1; 2 \times 3 + 0) = (2;6)$$

Donc : $(1;3)T(2;0) \neq (2;0)T(1;3)$ donc : T n'est pas commutative

b)

$$((1;3)T(2;0))T(5;7) = (2;6)T(5;7) = (2 \times 5; 2 \times 7 + 6) = (10;20)$$

$$(1;3)T((2;0)T(5;7)) = (1;3)T(2 \times 5; 2 \times 7 + 0) = (1;3)T(10;14)$$

$$(1;3)T((2;0)T(5;7)) = (1 \times 10; 1 \times 14 + 3) = (10;17)$$

Donc : $((1;3)T(2;0))T(5;7) \neq (1;3)T((2;0)T(5;7))$

donc : T n'est pas associative

3) Élément neutre

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E .

$(E ; *)$ admet un élément neutre si et seulement si : $\exists e \in E \forall x \in E, e * x = x * e = x$.

On dit aussi que e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E .

⇒ Commentaire .

♦ Notez bien l'ordre des quantificateurs :

$\exists e \in E / \forall x \in E, \dots$ qui dit que e est précis et ne dépend pas de x , et non pas $\forall x \in E, \exists e \in E / \dots$ qui permettrait à e de changer quand x change.

♦ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ($\forall x \in E, x * e = x$ ou $\forall x \in E, e * x = x$) ci-dessus suffit.

Théorème : Si $*$ admet un élément neutre dans E . celui-ci est unique.

Démonstration : Soient e et e'

deux éléments neutres (pas nécessairement distincts). Alors $e = e * e' = e'$

Exemples:

1) 1 est l'élément neutre dans les ensembles :

$$(\mathbb{N}; \times) ; (\mathbb{Z}; \times) ; (\mathbb{Q}; \times) ; (\mathbb{R}; \times) ; (\mathbb{C}; \times)$$

Et 0 est l'élément neutre dans les ensembles :

$$(\mathbb{N}; +) ; (\mathbb{Z}; +) ; (\mathbb{Q}; +) ; (\mathbb{R}; +) ; (\mathbb{C}; +)$$

2) le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre dans les

$$\text{ensembles : } (V_2; +) ; (V_3; +)$$

2) la fonction nulle $\theta : x \rightarrow 0$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +)$

2) la fonction nulle $I_d : x \rightarrow x$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \circ)$

2) E est l'élément neutre dans : $(P(E); \cap)$

\emptyset est l'élément neutre dans : $(P(E); \cup)$ et $(P(E); \Delta)$

3)a) la matrice : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nulle est l'élément neutre

dans: $(M_2(\mathbb{R}); +)$

b) la matrice : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nulle est l'élément

neutre dans: $(M_3(\mathbb{R}); +)$

5) dans : $(\mathbb{R}; -)$ il n'y a pas d'éléments neutres

4) Élément symétrisable

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E possédant un élément neutre e .

soit $x \in E$. x admet un symétrique à gauche pour $*$

$$\Leftrightarrow \exists x' \in E / x' * x = e.$$

x admet un symétrique à droite pour $*$

$$\Leftrightarrow \exists x' \in E / x * x' = e.$$

x admet un symétrique pour $*$

$$\Leftrightarrow \exists x' \in E / x * x' = x' * x = e.$$

x est symétrisable à gauche pour $*$ si et seulement

si x admet un symétrique à gauche pour $*$.

x est symétrisable à droite pour $*$ si et seulement si

x admet un symétrique à droite pour $*$.

x est symétrisable pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique pour $*$.

\Rightarrow **Commentaire** :

♦ Notez que ici, on fournit x' après avoir fourni x (soit $x \in E \dots \exists x' \in E \dots$) et donc bien sûr, x' varie quand x varie.

♦ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Remarques et exemples:

1) Dans : $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$; $(\mathbb{C}; +)$ tout élément a admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-a$

2) a) Dans : $(\mathbb{Q}^*; \times)$; $(\mathbb{R}^*; \times)$; $(\mathbb{C}^*; \times)$ tout élément a admet un symétrique et s'appelle l'inverse on le note $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}

(Ainsi, l'égalité $i^2 = -1$ qui s'écrit encore $i \times (-i) = 1$ qui signifie que i et $-i$ sont inverses l'un de l'autre

b) Dans : $(\mathbb{C}; \times)$ l'élément 0 n'admet pas de symétriques

3) Dans : $(V_2; +)$; $(V_3; +)$ tout vecteur \vec{u} admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-\vec{u}$

4) Dans : $(P(E); \Delta)$ toute partie A de E différente de E n'admet pas de symétriques

5) Dans : $(P(E); \cup)$ une partie A de E admet un symétrique c'est lui-même : (car $A \Delta A = \emptyset$)

6) a) Dans : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$ tout élément $\neq \bar{0}$ admet un symétrique

b) Dans : $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}; \times)$ l'élément $\bar{2}$ n'admet pas de symétriques

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R}); +)$ toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ admet un

symétrique c'est la matrice : $-A = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'admet pas de symétriques

8) Dans : $(T_r; \circ)$ (ensemble translations) tout

translation $t_{\vec{v}}$ admet un symétrique : $(t_{\vec{v}})^{-1}$

Et on a : $(t_{\vec{v}})^{-1} = t_{-\vec{v}}$

9) Dans : $(R_0; \circ)$ (ensemble rotations) tout rotation

$r(O; \alpha)$ admet un symétrique : $(r(O; \alpha))^{-1}$

Et on a : $(r(O; \alpha))^{-1} = r(O; -\alpha)$

10) Si $*$ est la composition des applications de E dans E . les applications de E dans E qui admettent un symétrique pour la loi \circ sont les bijections de E sur E . Le symétrique d'une bijection f pour la loi \circ n'est autre que sa réciproque f^{-1}

Théorème : Soit x un élément de E .

Si $*$ est associative, possède un élément neutre e et si x admet un symétrique pour $*$, celui-ci est unique.

Démonstration : Soit x un élément de E .

Soient x' et x'' deux éléments symétriques de x (pas nécessairement distincts).

Alors, $x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$

Théorème : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E , associative et possédant un élément neutre e .

Soient x et y deux éléments de E . Si x et y sont symétrisables et x' et y' leurs symétriques respectifs, alors $x * y$ est symétrisable et $(x * y)' = y' * x'$

Démonstration : Soient x et y deux éléments symétrisables de E . Soient x' et y' leurs symétriques respectifs. On a : $(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = x * x' = e$

$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$.

Donc, $x * y$ est symétrisable et son symétrique est $y' * x'$

5) Élément régulier (simplifiable)

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E . Soit $x \in E$

a) x est régulier à gauche pour $*$

$\Leftrightarrow \forall (y, z) \in E^2, x * y = x * z \Rightarrow y = z$.

b) x est simplifiable à droite pour $*$

$\Leftrightarrow \forall (y, z) \in E^2, y * x = z * x \Rightarrow y = z$.

c) x est régulier si et seulement si x est régulier à gauche et à droite.

Théorème : Si $*$ est associative et possède un élément neutre e , tout élément symétrisable est simplifiable.

Démonstration : Soit x un élément de E , symétrisable pour $*$.

Soit x' son symétrique pour $*$. Pour $(y, z) \in E^2$

$x * y = x * z \Rightarrow x' * (x * y) = x' * (x * z)$

$\Rightarrow (x' * x) * y = (x' * x) * z \Rightarrow e * y = e * z \Rightarrow y = z$.

exemples : 1) Dans : $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$;

$(\mathbb{C}; +)$ tout élément a est régulier

Cad : $\forall (y, z) \in \mathbb{C}^2, a + x = a + y \Rightarrow x = y$.

2) Dans : $(\mathbb{N}^*; \times)$; $(\mathbb{Z}^*; \times)$; $(\mathbb{Q}^*; \times)$; $(\mathbb{R}^*; \times)$;

$(\mathbb{C}^*; \times)$ tout élément a est régulier

Exercice 4 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ défini par : $a * b = ab - (a + b) + 2$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Montrer que $*$ est commutative

2) Montrer que $*$ admet un élément neutre et déterminer les éléments symétrisables

Solution: 1) Soit : $\forall (a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

a) On a : $a * b = ab - (a + b) + 2 = ba - (b + a) + 2 = b * a$

Donc : $*$ est commutative

2) a) $\forall a \in \mathbb{R} : 2 * a = 2a - (2 + a) + 2 = a$ et

$a * 2 = 2a - (a + 2) + 2 = a$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi $*$

b) soit $a \in \mathbb{R}$ on cherche $a' \in \mathbb{R}$ tel que : $a * a' = 2$ ($*$ est commutative) ?

$a * a' = 2 \Leftrightarrow aa' - (a + a') + 2 = 2 \Leftrightarrow a'(a - 1) = a$

Si : $a = 1$ alors : $0 = 1 \Leftrightarrow a * a' = 2$ donc impossible

Si : $a \neq 1$ alors : $a' = \frac{a}{a - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a * a' = 2$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R} - \{1\}$ il admet un symétrique

$a' = \frac{a}{a - 1}$

Théorème :(inverse d'une matrice)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice

Le nombre : $\Delta = ad - bc$ s'appelle :déterminant de

La matrice A

Si : $\Delta \neq 0$ alors La matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{c}{\Delta} \\ -\frac{b}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Preuve : on montre que : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

Exercice5 : on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que : $A^2 - 2A + I_2 = 0$ et en déduire que

La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que

La matrice B n'admet pas d'inverse

Solution

$$1) \text{ on a : } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -2A + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc : } A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow A(A - 2I_2) = -I_2 \Leftrightarrow A(2I_2 - A) = I_2$$

$$\text{Et } A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow (2I_2 - A)A = I_2$$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1} = 2I_2 - A$

$$A^{-1} = 2I_2 - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } B^3 = 0_3$$

On suppose que B admet un inverse donc il

existe une matrice C tel que : $BC = CB = I_3$

$$\text{Donc : } BC = I_3 \Rightarrow B^2 BC = B^2 I_3 \Rightarrow 0_3 \times C = B^2$$

$$\Rightarrow 0_3 = B^2 \text{ or } B^2 \neq 0_3 \text{ contradiction}$$

Donc : B n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice6 : on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$$

Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

Solution : soit $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(x;y)} \in E$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \text{ et } a^2 - 2b^2 = 1$$

$$\text{Et : } M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix} \text{ et } x^2 - 2y^2 = 1$$

Montrons que : $M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} \in E$?

$$M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = \begin{pmatrix} ax + 2by & (ay + bx)\sqrt{2} \\ (ay + bx)\sqrt{2} & ax + 2by \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} = M_{(ax+2by; ay+bx)}$$

$$(ax+2by; ay+bx) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\text{Car}(a;b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

Et on a :

$$\begin{aligned} (ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2 &= (a^2x^2 + 4b^2y^2 + 4abxy) \\ -2(a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy) &= (a^2x^2 - 2a^2y^2) - 2(2b^2y^2 - b^2x^2) \\ &= a^2(x^2 - 2y^2) - 2b^2(x^2 - 2y^2) = (x^2 - 2y^2)(a^2 - 2b^2) = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc : } M_{(a;b)} \times M_{(x;y)} \in E$$

donc : E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

IV homomorphisme ou morphisme

« Le mot morphisme signifie à peut près ou respecte la forme »

Définition : Soient $(E, *)$ et (F, T) deux ensembles munis de lois de compositions internes

Une application f de E dans F est un morphisme de $(E, *)$ dans (F, T) lorsque :

$$\forall (x; y) \in E^2, f(x * y) = f(x) T f(y)$$

• si f est bijective on dit que f est un isomorphisme

- Si $E = F$ et $* = T$, on parle d'endomorphisme.
- Si f est un endomorphisme bijectif, on parle d'automorphisme.

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $f : (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{Z}^*; \times)$
 $x \mapsto 5^x$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans (\mathbb{Z}^*, \times)

Solution : $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$

$f(x + y) = 5^{x+y} = 5^x \times 5^y = f(x) \times f(y)$ donc : f est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans (\mathbb{Z}^*, \times)

Exemple2 : soit l'application : $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln x$

montrons que g est un morphisme de :

$(]0; +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

Solution : $\forall (x; y) \in]0; +\infty[^2$

$$g(x \times y) = \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) = g(x) + g(y)$$

donc : g est un morphisme de $(]0; +\infty[, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

Exemple3 : soit l'application : $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$
 $z \mapsto |z|$

montrons que h est un morphisme de : (\mathbb{C}, \times) dans (\mathbb{R}, \times)

Solution : $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$h(z \times z') = |z \times z'| = |z| \times |z'| = h(z) \times h(z')$ donc : f est un morphisme de (\mathbb{C}, \times) dans (\mathbb{R}, \times)

Exemple4 : soit l'application :

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

montrons que k est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times)

Solution : $\forall (\theta; \theta') \in \mathbb{R}^2$

$$k(\theta + \theta') = e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta + i\theta'} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = k(\theta) \times k(\theta')$$

donc : k est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times)

$$l : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$$

Exemple5 : soit l'application : $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

montrons que l est un morphisme de : $(\mathbb{R}, +)$ dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

Solution : $\forall (x; x') \in \mathbb{R}^2$

$$\text{on a : } l(x + x') = \begin{pmatrix} 1 & x + x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$l(x) \times l(x') = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $l(x + x') = l(x) \times l(x')$

donc : k est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

Exemple6 : soit f l'application : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
 $n \mapsto \overline{2^n}$

montrons que f est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$
dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

Solution : $\forall (n; m) \in \mathbb{N}^2$
 $f(n+m) = \overline{2^{n+m}} = \overline{2^n \times 2^m} = \overline{2^n} \times \overline{2^m} = f(n) \times f(m)$
donc : f est un morphisme de $(\mathbb{N}, +)$
dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$

Exemple7 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition
interne suivante : $(a; b) + (a'; b') = (a + a'; b + b')$;

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$$

Soit $A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$$A(\mathbb{R}; \mathbb{R}) = \{ f_{(a; b)} / \forall x \in \mathbb{R} : f_{(a; b)}(x) = ax + b \}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow A(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$

Soit l'application : $\varphi : (a; b) \mapsto f_{(a; b)}$

donc : φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$

dans $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

Solution:1) Soit : $\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$

On a :

$$\varphi((a; b) + (a'; b')) = \varphi(a + a'; b + b') = f_{(a+a'; b+b')}$$

$$f_{(a+a'; b+b')}(x) = (a + a')x + (b + b') = (ax + b) + (a'x + b')$$

$$\text{Donc : } \varphi((a; b) + (a'; b')) = \varphi(a; b) + \varphi(a'; b')$$

donc : φ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2, +)$

dans $(A(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +)$

Théorème : soit f un homomorphisme de $(E, *)$
dans (F, T) alors :

- 1) $f(E)$ est une partie stable dans (F, T)
- 2) si $*$ est commutative dans $(E, *)$ alors T est commutative dans $(f(E), T)$
- 3) si $*$ est associative dans $(E, *)$ alors T est associative dans $(f(E), T)$
- 4) si $*$ admet un élément neutre e dans $(E, *)$ alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E), T)$
- 5) si $*$ admet un élément neutre e dans $(E, *)$ Et si x admet un symétrique x' dans $(E, *)$ alors $y = f(x)$ admet un symétrique dans

$$(f(E), T) \text{ c'est } y' = f(x') \text{ cad : } (f(x))' = f(x')$$

Preuve : 1) soient : $y_1 \in f(E)$ et $y_2 \in f(E)$

$$\text{Donc : } \exists x_1 \in E / f(x_1) = y_1 \text{ et } \exists x_2 \in E / f(x_2) = y_2$$

$$y_1 T y_2 = f(x_1) T f(x_2) = f(x_1 * x_2) \in f(E)$$

Car : $x_1 * x_2 \in E$ et effet : $*$ la loi de composition interne dans E

2) soient : $y_1 \in f(E)$ et $y_2 \in f(E)$

$$\text{Donc : } \exists (x_1; x_2) \in E^2 / f(x_1) = y_1 \text{ et } f(x_2) = y_2$$

$$y_1 T y_2 = f(x_1) T f(x_2) = f(x_1 * x_2)$$

Car f un homomorphisme

$$= f(x_2 * x_1)$$

Car $*$ est commutative dans $(E, *)$

$$= f(x_2) T f(x_1) \text{ Car } f \text{ un homomorphisme}$$

$$= y_2 T y_1 \quad \text{Cqfd}$$

3) soient : $y_1 \in f(E)$ et $y_2 \in f(E)$ et $y_3 \in f(E)$

Donc:

$$\exists (x_1; x_2; x_3) \in E^3 / f(x_1) = y_1 \text{ et } f(x_2) = y_2 \text{ et } f(x_3) = y_3$$

$$(y_1 \text{Ty}_2) \text{Ty}_3 = (f(x_1) \text{T}f(x_2)) \text{T}f(x_3) = f(x_1 * x_2) \text{T}f(x_3)$$

Car f un homomorphisme

$$= f((x_1 * x_2) * x_3) = f(x_1 * (x_2 * x_3))$$

Car $*$ est associative dans $(E, *)$ et f un homomorphisme

$$= f(x_1) \text{T}f(x_2 * x_3) = f(x_1) \text{T}(f(x_2) \text{T}f(x_3))$$

$$= y_1 \text{T}(y_2 \text{Ty}_3) \quad \text{Cqfd}$$

4) soie: $y \in f(E)$ donc : Donc : $\exists x \in E / f(x) = y$

On pose : $f(e) = e'$ donc : $e' \in f(E)$ car $e \in E$

$$y \text{T}e' = f(x) \text{T}f(e) = f(x * e) = f(x) = y$$

Car f un homomorphisme et e élément neutre dans $(E, *)$

De même on montre que : $e' \text{Ty} = y$

Donc: $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E), \text{T})$

5) soit : x' le symétrique de x dans $(E, *)$

On a donc : $x * x' = e$ et $x' * x = e$

Donc : $f(x * x') = f(e)$ et $f(x' * x) = f(e)$

puisque f un homomorphisme on a donc :

$$y \text{T}f(x') = f(e) \text{ et } f(x') \text{Ty} = f(e)$$

On a $f(e)$ élément neutre de $(f(E); \text{T})$

Donc $f(x')$ est le symétrique dans $(f(E), \text{T})$

De $f(x) = y$ cqfd

Exercice7 :soient $a \in]2; +\infty[$ et $b \in]2; +\infty[$

On pose : $a * b = (a - 2)(b - 2) + 2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne

Dans $I =]2; +\infty[$

2)soit l'application définie sur \mathbb{R}^{**} vers I

$$\text{tel que : } f(x) = \frac{2x+1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{**}$$

a) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ dans $(I, *)$

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

solution :1) soient $a \in]2; +\infty[$ et $b \in]2; +\infty[$

$$a \in]2; +\infty[\Rightarrow a > 2 \quad \text{et} \quad b \in]2; +\infty[\Rightarrow b > 2$$

$$\text{Donc : } (a-2)(b-2) > 0$$

$$\text{Donc : } (a-2)(b-2) + 2 > 2$$

$$\text{Donc : } a * b \in]2; +\infty[= I$$

Donc : $*$ est une loi de composition interne

Dans $I =]2; +\infty[$

2) soient $x \in \mathbb{R}^{**}$ et $y \in \mathbb{R}^{**}$

$$f(x \times y) = \frac{2xy+1}{xy}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{2x+1}{x} * \frac{2y+1}{y} = \left(\frac{2x+1}{x} - 2 \right) \left(\frac{2y+1}{y} - 2 \right) + 2$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} + 2 = \frac{2xy+1}{xy}$$

$$\text{Donc : } f(x \times y) = f(x) * f(y) \quad \forall (x; y) \in (\mathbb{R}^{**})^2$$

Donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ dans $(I, *)$

b) puisque \times est commutative dans $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ et f un homomorphisme de $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ dans $(I, *)$ alors $*$ est commutative dans I et on a 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^{**}, \times)$ alors : $f(1) = 3$ est l'élément neutre dans I

Exercice8 : on muni \mathbb{R} d'une loi de composition interne $*$ définie par : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élément neutre ?

4) résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a) $2 * x = 5$ b) $x * x = 1$

Solution: 1) Soit : soit : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = ba + (b^2 - 1)(a^2 - 1)$

car la multiplication dans \mathbb{R} est commutative

Donc : $a * b = b * a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1 * 0) * 2 = 0 * 2 = -3$

Et $-1 * (0 * 2) = -1 * -3 = 3$

Donc : $(-1 * 0) * 2 \neq -1 * (0 * 2)$

Donc : $*$ n'est pas associative

4) on a : $a * 1 = 1 * a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$

(l'élément neutre est unique)

4) a) on va résoudre l'équation : $2 * x = 5$

$2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$ donc : $S = \left\{ -2; \frac{4}{3} \right\}$

b) on va résoudre l'équation : $x * x = 1$

$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

donc : $S = \{-1; 0; 1\}$

Exercice9 : on muni \mathbb{R}^2 de la loi de composition

interne suivante : $(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b')$;

$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élément neutre et déterminer dans \mathbb{R}^2 les éléments symétrisables

Pour la loi $*$

3) soit : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

a) montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2, *)$

b) Monter que $(S, *)$ admet un élément neutre et

comparer les les éléments neutres de $(\mathbb{R}^2, *)$

et de $(S, *)$

Solution: 1) a) Montrons que $*$ est commutative ?

Soit : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$

$(a; b) * (a'; b') = (a \times a'; b \times b') = (a' \times a; b' \times b) = (a'; b') * (a; b)$

Donc : $*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative?

Soit: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$ et $(a''; b'') \in \mathbb{R}^2$

$((a; b) * (a'; b')) * (a''; b'') = (a \times a'; b \times b') * (a''; b'')$

$((a; b) * (a'; b')) * (a''; b'') = (a \times a' \times a''; b \times b' \times b'')$

On aussi : $(a; b) * ((a'; b') * (a''; b'')) = (a; b) * (a' \times a''; b' \times b'')$

$(a; b) * ((a'; b') * (a''; b'')) = (a \times a' \times a''; b \times b' \times b'')$

Donc :

$((a; b) * (a'; b')) * (a''; b'') = (a; b) * ((a'; b') * (a''; b''))$

Donc : $*$ est associative

2) a) Montrons que $*$ admet un élément neutre

Soit: $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $(a; b) * (1; 1) = (a; b) \quad \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2$

Et puisque $*$ est commutative

Alors : * admet un élément neutre c'est (1;1)

b) déterminons dans \mathbb{R}^2 les éléments symétrisables pour la loi *

soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ on cherche $(a';b') \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(a;b) * (a';b') = (1;1)$$

$$(a;b) * (a';b') = (1;1) \Leftrightarrow (a \times a'; b \times b') = (1;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \times b' = 1 \\ a \times a' = 1 \end{cases} \text{ si } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} a' = 1/a \\ b' = 1/b \end{cases}$$

Donc les éléments dans \mathbb{R}^2 symétrisables Pour la loi

* sont les couples $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que: $a \neq 0$ et $b \neq 0$

Et le symétrique de $(a;b)$ est $(1/a; 1/b)$ pour *

3)a) $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

Soit : $(a;0) \in S$ et $(b;0) \in S$

$$(a;0) * (b;0) = (ab;0) \in S$$

Donc : S est une partie stable de $(\mathbb{R}^2, *)$

b) soit : $(a;0) \in S$

on a : $(a;0) * (1;0) = (a;0)$ et $(1;0) * (a;0) = (a;0)$

donc : (1;0) est élément neutre pour (S, *)

et on a (1;1) est élément neutre pour $(\mathbb{R}^2, *)$

et : $(1;1) \neq (1;0)$

Exercice10 : on muni \mathbb{C} de la loi de composition interne T suivante : $zTz' = z\bar{z}'$; $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

$\forall (a'; b') \in \mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2) résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(zTz)Tz = i$

Solution :

1) la commutativité de T ?

$$\text{On a : } 1Ti = 1\bar{i} = -i \text{ et } iT1 = i\bar{1} = i$$

Donc : $1Ti \neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$$(iT1)Ti = iTi = i \cdot (-i) = 1$$

$$iT(1Ti) = iT - i = i \cdot i = -1$$

Donc : $(iT1)Ti \neq iT(1Ti)$ donc T non associative

2) résolution dans \mathbb{C} l'équation : $(zTz)Tz = i$

$$(zTz)Tz = i \Leftrightarrow (z\bar{z})Tz = i \Leftrightarrow z\bar{z}\bar{z} = i \Leftrightarrow |z|^2 \bar{z} = i$$

On pose : $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x - iy) = i$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2 + y^2)x - iy(x^2 + y^2) = i$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2)x = 0 \\ y(x^2 + y^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \text{ ou } x = 0 \\ y(x^2 + y^2) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow z = -i \text{ donc : } S = \{-i\}$$

Exercice11 : on muni $I =]0; +\infty[$ de la loi de composition interne * suivante :

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in I^2$$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x) = x^2 \quad \forall x \in I$

1) montrer que : $f(x * y) = f(x) + f(y)$

2)a) montrer que * est associative

b) est ce que * admet un élément neutre

3) soit $a \in I$ calculer : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$

Solution : soit $(x; y) \in I^2$

$$1) f(x * y) = (x * y)^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 \\ = f(x) + f(y) \quad \text{Cqfd}$$

$$2) f(x * y) = f(x) + f(y)$$

Donc f est un homomorphisme et puisque

f est une bijection donc f est un isomorphisme

De $(I; *)$ dans $(I; +)$ donc : $(I; *)$ et $(I; +)$

Ont la même structure et puisque $+$ est associative dans I alors $*$ est aussi associative

Et puisque $(I; +)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I; *)$ n'admet pas d'élément neutre

$$3) f\left(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{f(a) + f(a) + \dots + f(a)}_{n \text{ fois}}$$

$$f(A) = nf(a) = na^2$$

Et puisque f est un isomorphisme de $(I; *)$

dans $(I; +)$ donc : $A = f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ donc $A = \sqrt{na^2} = \sqrt{na}$

Exercice 12 : 1) on muni \mathbb{R} d'une loi de composition

interne $*$ définie par : $x * y = x + y - xy$; $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur \mathbb{R} vers \mathbb{R}

tel que : $f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; \times)$

2) en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) déterminer l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi $*$

$$4) \text{ soit } a \in \mathbb{R} \text{ calculer : } A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Solution : 1) $f(x) = 1 - x$

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$$

$$\text{Donc : } f^{-1}(x) = 1 - x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } f^{-1} = f$$

$$f(x * y) = 1 - x * y = 1 - (x + y - xy)$$

$$= (1 - x)(1 - y) = f(x) \times f(y)$$

Donc : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$

dans $(\mathbb{R}; \times)$

2) puisque f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$

dans $(\mathbb{R}; \times)$ alors : $(\mathbb{R}; *)$ et $(\mathbb{R}; \times)$

Ont la même structure et puisque \times est

associative dans \mathbb{R} alors $*$ est aussi associative dans \mathbb{R} et puisque 1 est élément neutre dans

$(\mathbb{R}; \times)$ alors $f^{-1}(1) = f(1) = 0$ est élément neutre

dans $(\mathbb{R}; *)$

3) on a 0 est élément neutre unique qui n'admet pas de symétrique dans $(\mathbb{R}; \times)$ et on a $f(0) = 1$

Donc : l'ensemble des éléments symétrisables

pour $(\mathbb{R}; *)$ est $\mathbb{R} - \{1\}$

$$4) f(A) = f\left(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{f(a) \times f(a) \times \dots \times f(a)}_{n \text{ fois}}$$

$$f(A) = (f(a))^n = (1 - a)^n$$

$$\text{Donc : } A = f^{-1}\left((1 - a)^n\right) = f\left((1 - a)^n\right) = 1 - (1 - a)^n$$

Structures algébriques (partie 2)

Groupe anneau corps

I) Groupes .

1) Définition : Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $*$).

$(G, *)$ est un groupe si et seulement si

- 1) $*$ est associative,
- 2) $*$ possède un élément neutre dans G
- 3) tout élément de G possède un symétrique pour $*$ dans G .

Si de plus, $*$ est commutative, le groupe $(G, *)$ est dit commutatif ou abélien.

2) Exemples

1) $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$; $(\mathbb{C}; +)$; $(\mathbb{Q}^*; \times)$;

$(\mathbb{R}^*; \times)$; $(\mathbb{C}^*; \times)$ sont des groupes commutatifs

• $(\mathbb{C}; \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse dans \mathbb{C} (pour \times).

• $(\mathbb{Z}; \times)$ et $(\mathbb{N}; +)$ ne sont pas des groupes car 2 n'a pas de symétrique

• $(V_2; +)$ et $(V_3; +)$ sont deux groupes commutatifs

• $(P(E); \cap)$ n'est pas un groupe car une partie $A \neq E$ n'admet pas de symétrique

• $(P(E); \cup)$ n'est pas un groupe car une partie $A \neq \emptyset$ n'admet pas de symétrique

• $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +)$; $(\mathbb{R}_n[X]; +)$ sont des groupes commutatifs

• $(M_2(\mathbb{R}); +)$ et $(M_3(\mathbb{R}); +)$ sont des groupes non commutatifs

$$\text{Ex : } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Donc on a : $A \times B \neq B \times A$

• L'ensemble des translations $(T_r; \circ)$ et

l'ensemble des rotations de même centre O

$(R_o; \circ)$ sont des groupes commutatifs

L'ensemble des transformations du plan : $(T; \circ)$ est un groupe

Remarque : soit : $(G; *)$ un groupe

1) on utilisant une notation additive on dit que :

$(G; +)$ un groupe additif

$$a) (a+b)+c = b+(a+c)$$

b) on note 0 l'élément neutre

c) le symétrique de a appelé opposé de a on le note $-a$ dans ce cas on pose : $a+(-a)=0$

et $\underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ fois}} = na$ avec la convention :

$$\begin{cases} 0a = 0 \\ 1a = a \\ n(-a) = -na \end{cases} \quad \text{Et on vérifie alors les relations}$$

suivantes : $na + ma = (n+m)a$ et

$$n \times (ma) = (n \times m)a = nma \quad \forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$$

2) on utilisant une notation multiplicative on dit que : $(G; \times)$ un groupe multiplicative

a) $(a \times b) \times c = b \times (a \times c)$

b) on note 1 l'élément neutre

c) le symétrique de a on le note a^{-1} (l'inverse)

d) ce cas on pose : $a \times a = a^2$ et $\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = a^n$

avec la convention : $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^{-n} = (a^{-1})^n \end{cases}$ Et on vérifie

alors les relations suivantes : $a^n \times a^m = a^{n+m}$ et

$(a^n)^m = a^{n \times m} \quad \forall (n; m) \in \mathbb{Z}^2$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ si le groupe est commutatif

$(a \times b)^n \neq a^n \times b^n$ si le groupe est non commutatif

(Dans le pratique on pourra supprimer le symbole \times ou on le remplaçant par un point)

Exemple : on pose $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall (x; y) \in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y)$

Montrer que $(I; *)$ est un groupe commutatif

Solution : 1) soit $(x; y) \in I^2$

$x * y = \arctan(-1 + \tan x + \tan y) = \arctan(-1 + \tan y + \tan x)$

Donc $x * y = y * x$ et par suite $*$ est commutatif

2) soit $(x; y; z) \in I^3$

$(x * y) * z = (\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) * z$
 $= \arctan(-1 + \tan((\arctan(-1 + \tan x + \tan y)) + \tan z))$

$= \arctan(-1 + (-1 + \tan x + \tan y) + \tan z)$

$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$

Et on a :

$x * (y * z) = x * (\arctan(-1 + \tan y + \tan z))$

$= \arctan(-1 + \tan x + \tan((\arctan(-1 + \tan y + \tan z))))$

$= \arctan(-1 + \tan x + (-1 + \tan y + \tan z))$

$= \arctan(-2 + \tan x + \tan y + \tan z)$

Donc : $(x * y) * z = x * (y * z)$

par suite $*$ est associative

3) $\forall x \in I$ on a :

$x * \frac{\pi}{4} = \arctan(-1 + \tan x + \tan \frac{\pi}{4}) = \arctan(-1 + \tan x + 1)$

$x * \frac{\pi}{4} = \arctan(\tan x) = x$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi : $\frac{\pi}{4} * x = x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

alors : $*$ possède un élément neutre $e = \frac{\pi}{4}$

4) soit : $x \in I$ on cherche $x' \in I$ tel que :

$x * x' = \frac{\pi}{4} ?$

$x * x' = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan(-1 + \tan x + \tan x') = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1 + \tan x + \tan x' = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \tan x + \tan x' = 2$

$\Leftrightarrow \tan x' = 2 - \tan x \Leftrightarrow x' = \arctan(2 - \tan x) \in I$

Donc : tout élément de I possède un symétrique pour $*$ dans I .

Finalement : $(I; *)$ est un groupe commutatif

Exercice 1: on muni \mathbb{R}^2 d'une loi de composition interne T définit par :

$$(x; y)T(x'; y') = (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x'}) ; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall (x'; y') \in \mathbb{R}^2$$

Monter que $(\mathbb{R}^2; T)$ groupe non commutative

Solution: a) soient $(x; y)$; $(x'; y')$ et $(x''; y'')$ des éléments de \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} ((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') &= (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x'})T(x''; y'') \\ &= (x + x' + x''; (ye^{x'} + y'e^{-x'})e^{x''} + y''e^{-(x+x')}) \\ &= (x + x' + x''; ye^{-(x'+x'')} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-(x+x')}) \\ (x; y)T((x'; y')T(x''; y'')) &= (x; y)T(x' + x''; y'e^{x''} + y''e^{-x'}) \\ &= (x + x' + x''; (y'e^{x''} + y''e^{-x'})e^{-x} + ye^{x'+x''}) \\ &= (x + x' + x''; y'e^{(x''-x)} + y''e^{-(x+x')} + ye^{x'+x''}) \end{aligned}$$

Donc :

$$((x; y)T(x'; y'))T(x''; y'') = (x; y)T((x'; y')T(x''; y''))$$

donc : T est associative

b) l'élément neutre de T ?

$(e_1; e_2)$ l'élément neutre de T ssi $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \text{ et } (e_1; e_2)T(x; y) = (x; y)$$

$$(x; y)T(e_1; e_2) = (x; y) \Leftrightarrow (x + e_1; ye^{e_1} + e_2e^{-x}) = (x; y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + e_1 = x \\ ye^{e_1} + e_2e^{-x} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et on a : } (0; 0)T(x; y) = (x; y)$$

Donc : $(0; 0)$ est l'élément neutre de T

c) le symétrique d'un élément dans T ?

soient $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ montrons l'existence de

$$(x'; y') \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } (x; y)T(x'; y') = (0; 0) \text{ et}$$

$$(x'; y')T(x; y) = (0; 0)$$

$$(x; y)T(x'; y') = (0; 0) \Leftrightarrow (x + x'; ye^{x'} + y'e^{-x}) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ ye^{x'} + y'e^{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ (y + y')e^{-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y + y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\text{On a aussi : } (-x; -y)T(x; y) = (0; 0)$$

Donc : $(-x; -y)$ est le symétrique de élément $(x; y)$ dans T

Donc : $(\mathbb{R}^2; T)$ est un groupe

$$\text{Et puisque : } (1; 1)T(1; 0) = (2; e) \text{ et } (1; 0)T(1; 1) = (2; e^{-1})$$

$$\text{Alors : } (1; 1)T(1; 0) \neq (1; 0)T(1; 1)$$

donc : T n'est pas commutative

3) propriété des groupes

Théorème : soit $(G; *)$ est un groupe

- 1) l'élément neutre dans G est unique
- 2) tout élément de G possède un symétrique unique dans G.

Si x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y alors le symétrique de $x * y$ est $y' * x'$:

$$\text{Cad : } (x * y)' = y' * x'$$

3) tout élément de G est régulier cad :

$$\forall a \in G \text{ et } \forall (x; y) \in G^2$$

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y \text{ et } x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

Preuve : 1) et 2) voir la leçon précédente

3) soient : $a \in G$ et $(x; y) \in G^2$

$$x * a = y * a \Rightarrow (x * a) * a' = (y * a) * a'$$

Avec a' est le symétrique de a

$$\Rightarrow x * (a * a') = y * (a * a') \text{ Car } * \text{ est associative}$$

$$\Rightarrow x * e = y * e \text{ Car } * \text{ possède un élément neutre } e$$

$$\Rightarrow x = y \text{ De même on montre l'autre implication}$$

Exemple1 :soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et tel que : $(a; b) \in G^2$

$(ab)^2 = a^2b^2$ Montrer que ce groupe est

commutatif

Solution :par hypothèse on a quels que soient

les éléments $(a; b) \in G^2$: $abab = aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier

on peut simplifier à gauche par a et à droite par b

Donc : $abab = aabb$

Donc $ba = ab$ et par suite ce groupe est

commutatif

Proposition :si $(G; *)$ est un groupe qui admet un

élément neutre e et $(a; b) \in G^2$ et a' est le

symétrique de a alors :les équations :

$(E_1) : a * x = b$ et $(E_2) : x * a = b$ admettent une

solution unique :

•Pour (E_1) la solution est : $x = a' * b$

•Pour (E_2) la solution est : $x = b * a'$

Exemple2:(étude d'un groupe fini)

$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$ et $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{0\}; \times)$ sont deux groupes

commutatifs :

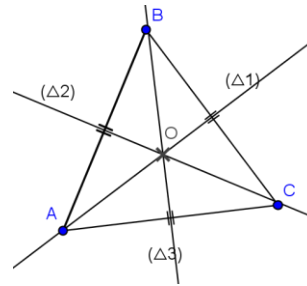
+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +)$ et Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Exemple3 :(étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1) la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3) la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations

suivantes : $\zeta = \{r_1; r_2; r_3; s_1; s_2; s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O; 0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2(O; \frac{2\pi}{3})$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3(O; \frac{4\pi}{3})$

s_1 la symétrie axial d'axe : (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Donc : on utilisant la loi de composition des transformation \circ on trouve le tableau suivant :

\circ	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_3	s_1	s_2
r_3	r_3	r_1	r_2	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3
s_2	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2
s_3	s_3	s_1	s_2	r_2	r_3	r_1

Remarque : si $(G; *)$ est un groupe fini alors

chaque élément de G se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

Exercice 2: soit $(G; \cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall (a; b) \in G^2 : (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ alors le groupe G est commutatif

2) Montrer que si: $\forall x \in G : x^2 = e$ alors le groupe G est commutatif

Solution : 1) soit $(a; b) \in G^2$

par hypothèse on a: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$

donc: $a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot b \cdot b$ puisque G un groupe tout élément de G est régulier

Donc: $b \cdot a = a \cdot b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) soient les éléments $(x; y) \in G^2$

par hypothèse on a: $xyxy = e$

on multipliant à gauche par x et à droite par y

Donc: $xyxyxy = xey \Rightarrow x^2 yxy^2 = xey \Rightarrow eyxe = xy$

$\Rightarrow yx = xy$ Par suite ce groupe est commutatif

3) Sous-groupes

Définition : Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie stable pour $(G, *)$

H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si $(H, *)$ est un groupe

Remarque : si e est l'élément neutre de G $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de $(G, *)$ appelés sous-groupes triviaux du groupe $(G, *)$. Les autres sous-groupes, s'il en existe, sont appelés sous-groupes propres de $(G, *)$.

Exemples :

• $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{Q}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$ sont des sous-groupes

de $(\mathbb{C}; +)$

• $(\mathbb{Q}^*; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

• $(\mathbb{R}_n[X]; +)$ est un sous-groupe de $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +)$

• $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

$(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

$(U; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}; +)$

• $(\mathbb{N}; +)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$

Exemple: (on considère l'ensemble des matrices

suivante: $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R} \right\}$

Montrer que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Solution : soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$

Donc: $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$M_a \times M_b \in E?$

$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & b \\ 2 & 2b \end{pmatrix} \notin E$

donc: E n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

donc: E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Théorème : (caractérisations d'un sous-groupe).

Soient $(G, *)$ un groupe et H une partie de G .

1) H est un sous-groupe de $(G, *)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) e \in H \\ (2) \forall (x, y) \in H^2; x * y \in H \\ (3) \forall x \in H; x' \in H \end{cases} \quad (I)$

2) H est un sous-groupe de $(G, *)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \emptyset \\ (2) \forall (x, y) \in H^2; x * y' \in H \end{cases} \quad (II)$

Démonstration :

• Supposons que H soit un sous-groupe de $(G, *)$, alors la propriété (2) de (I) est vérifiée.

Notons e_H l'élément neutre de H .

On a $e_H * e = e_H$ car e est élément neutre de G et d'autre part, $e_H = e_H * e_H$ car e_H est élément neutre de H . Par suite, $e_H * e = e_H * e_H$.

Maintenant, dans le groupe $(G, *)$ tout élément

est métrisable et en particulier, tout élément est régulier. Après simplification par e_H , on obtient $e = e_H$. Ceci montre en particulier que $e \in H$.

Soit x un élément de H . Notons x'_H son symétrique pour $*$ dans H .

On a $x'_H * x * x' = e * x' = x'$ (puisque $e_H = e$) et d'autre part, $x_H * x * x' = x'_H * e = x'_H$.

Donc, le symétrique x'_H de x dans H est son symétrique x' dans G . Ceci montre en particulier que x' est dans H .

On a montré que si H est un sous-groupe de $(G, *)$ alors (I) est vérifié.

• Montrons que : (I) \Rightarrow H sous-groupe de $(G, *)$.
Supposons (I).

H est une partie non vide de G d'après (1). La restriction de $*$ à H^2 est une loi interne dans H d'après (2). $*$ est associative dans G et donc la loi induite est associative dans H .

L'élément neutre e de $(G, *)$ vérifie :

$\forall x \in H, x * e = e * x = x$ et donc e est élément neutre de H pour la loi induite.

Enfin, si x est un élément quelconque de H , le symétrique x' de x dans G est dans H et vérifie $x * x' = x' * x = e$ où e est maintenant élément neutre de H . x' est donc le symétrique de x dans H et on a montré que tout élément de H admet un symétrique dans H .

De tout ceci, on en déduit bien que H est un sous-groupe de $(G, *)$.

Donc que (H sous-groupe) \Leftrightarrow (I).

• Il est clair que (I) \Rightarrow (II). Il reste à montrer que (II) \Rightarrow (I). On suppose donc que H vérifie (II).

Soit x un élément de H . Puisque e et x sont dans H alors: $H \neq \emptyset$ et $e * x' = x'$ est dans H d'après (2).

Ainsi, $\forall x \in H, x' \in H$.

Soient enfin, x et y deux éléments de H .

D'après ce qui précède, y' est encore dans H .

Donc $x * (y')' = x * y$ est dans H .

On a montré que (II) \Rightarrow (I)

Finalement que (I) \Leftrightarrow (II).

Remarque : soit : $(G; *)$ un groupe

1) on utilisant une notation additive on a :

H est un sous-groupe de $(G; +)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \emptyset \\ (2) \forall (x, y) \in H^2; x - y \in H \end{cases}$$

2) on utilisant une notation multiplicative

on a : H est un sous-groupe de $(G; \times)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \emptyset \\ (2) \forall (x, y) \in H^2; xy^{-1} \in H \end{cases}$$

Exemple1 : soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$

Solution : on a : $I \subset \mathbb{Z}$

(1) $I \neq \emptyset$ car $0 = 2 \times 0 \in I$

(2) $\forall (x, y) \in I^2; x - y \in I$?

Soient : $x \in I$ et $y \in I$ donc : $x = 2 \times p$ et $x = 2 \times q$

$$x - y = 2 \times p - 2 \times q = 2 \times (p - q) = 2 \times k \in I$$

Donc : $(I; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$ d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple2 : montrer que : $H = \{3^m 7^n \mid m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

Solution : on a : $H \subset \mathbb{R}^*$ car $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

(1) $H \neq \emptyset$ car $3^0 7^0 = 1 \in H$

(2) $\forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$?

Soient : $x \in H$ et $y \in H$ donc :

$$\exists (n, m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$$

Et $\exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$$

$$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^{m-p} 7^{n-q} = 3^e 7^f$$

Avec : $(e, f) \in \mathbb{Z}^2$ donc :

$$(2) \forall (x, y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$$

Donc : $(H; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*; \times)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple 3 : Si E est un ensemble, l'intersection dans P(E) est interne, commutative, associative et possède un élément neutre, à savoir E.

Soit alors F une partie stricte de E. P(F) est une partie non vide de P(E), stable pour l'intersection (l'intersection de deux parties de F reste une partie de F). L'intersection possède un élément neutre dans P(F), à savoir F. Cet élément neutre est distinct de l'élément neutre de $(P(E), \cap)$. Une conséquence est que $(P(E), \cap)$ n'est pas un groupe.

Exemple 4 : $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Solution :

1) Un nombre complexe de module 1 est non nul et donc $U \subset \mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc $1 \in U$.

Soit alors $(z_1; z_2) \in U^2$.

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U ???$$

$$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2|^{-1} = 1 \times 1 = 1 \times 1 \in U$$

Exercice 3: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{++} \right\}$$

Monter que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

$$\text{Solution : 1) on a } M_e = \begin{pmatrix} \ln e & 0 \\ 0 & \ln e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc : $I_2 \in E$ donc : $E \neq \emptyset$

2) soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$

$M_a - M_b \in E ?$:

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln b & 0 \\ 0 & \ln b \end{pmatrix}$$

$$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a - \ln b & 0 \\ 0 & \ln a - \ln b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \ln \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{a/b}$$

Et puisque $a \in \mathbb{R}^{++}$ et $b \in \mathbb{R}^{++}$ alors $a/b \in \mathbb{R}^{++}$

Donc : $M_a - M_b = M_{a/b} \in E$

Donc : E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

Exercice 4 : soit $(G; \cdot)$ un groupe noté

multiplicativement et soit $a \in G$

On pose : $C_a = \{x \in G / ax = xa\}$

(centralisateur de a)

$$\text{Et : } Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G : xy = yx\}$$

(centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes

de $(G; \cdot)$

Solution : 1) Montrons que C_a est un sous-

groupe de $(G; \cdot)$?

Soit e l'élément neutre du groupe $(G; \cdot)$

a) on a : $ae = ea = a$ donc $e \in C_a$ donc : $C_a \neq \emptyset$

b) soient les éléments $(x; y) \in C_a^2$

montrons que : $xy^{-1} \in C_a$ cad montrons que :

$$a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a ??$$

On a $(x; y) \in C_a^2$ donc : $\begin{cases} ax = xa(1) \\ ay = ya(2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow (ay)^{-1} = (ya)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$$

$$\Rightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1} \text{ et } ax = xa(1)$$

$$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xey^{-1}$$

$$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a = xy^{-1}a$$

$$\Rightarrow axy^{-1}e = xy^{-1}a \Rightarrow axy^{-1} = xy^{-1}a \text{ donc } xy^{-1} \in C_a$$

Donc : C_a est un sous-groupe de $(G; \cdot)$

2) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G; \cdot)$?

a) on a : $\forall y \in G : ey = ye$ donc $e \in Z(G)$

donc : $Z(G) \neq \emptyset$

b) soient les éléments $(a; b) \in Z(G)^2$

montrons que : $ab^{-1} \in Z(G)$ cad montrons que :

$$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G ??$$

On a $(a; b) \in Z(G)^2$ donc : $\begin{cases} ay = ya(1) \\ by = yb(2) \end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve

$$(ab^{-1})y = y(ab^{-1}) \quad \forall y \in G \text{ donc } ab^{-1} \in Z(G)$$

Donc : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G; \cdot)$

Théorème : Si H et K sont des sous-groupes de $(G, *)$, $H \cap K$ est un sous-groupe de $(G, *)$. Ainsi, une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Démonstration. (On utilise la caractérisation (II) ci-dessus). Soient H et K deux sous-groupes.

D'après ce qui précède, H et K contiennent l'élément neutre e de G et donc $e \in H \cap K$.

D'autre part, bien sûr $H \cap K \subset G$.

Soient alors x et y deux éléments de $H \cap K$.

$$(x, y) \in (H \cap K)^2 \Rightarrow ((x, y) \in H^2$$

$$\text{et } (x, y) \in K^2) \Rightarrow (x * y' \in H \text{ et } x * y' \in K)$$

$$\Rightarrow x * y' \in H \cap K.$$

Ceci montre que $H \cap K$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Théorème : soit f un homomorphisme du groupe $(G, *)$ Dans un groupe $(F; T)$

L'image du groupe $(G, *)$ par l'homomorphisme f C'est le groupe $(f(G); T)$

Démonstration : on a déjà montré que $f(G)$

Est une partie stable $(F; T)$ et donc :

* est associative dans : $(G, *)$ donc :

* est associative dans : $(f(G), T)$ soit e l'élément

neutre de $(G, *)$ donc : $f(e)$ est l'élément neutre

de $(f(G), T)$ et si x' est le symétrique de x dans

$(G, *)$ alors $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$

Dans $(f(G); T)$

Donc : $(f(G); T)$ est un groupe

Remarque :

Si f un homomorphisme surjectif alors $f(G) = F$

Dans ce cas L'image du groupe $(G, *)$ par l'homomorphisme f c'est le groupe $(F; T)$

1)Exemples :

Les applications suivantes :

$$g : (\mathbb{R}^{*+}; \times) \rightarrow (\mathbb{R}; +) \quad f : (\mathbb{Z}; +) \rightarrow (\mathbb{R}^{*+}; \times)$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$r \mapsto 2^r$$

$$h : (\mathbb{C}; \times) \rightarrow (\mathbb{C}; \times)$$

$$l : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{R}^{*+}; \times)$$

$$z \mapsto \bar{z}$$

$$x \mapsto e^x$$

Sont des homomorphismes de groupes

Exercice 5 : On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne définie par :

$$x * y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}; \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$$

1) soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par : } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$

vers $(\mathbb{R}; *)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R}; *)$

Solution : 1) a) f est une fonction continue et

dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}

Par suite f est une fonction bijectif de \mathbb{R}

Dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

b) soient $x; y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x) * f(y) = f(x) \sqrt{f(y)^2 + 1} + f(y) \sqrt{f(x)^2 + 1}$$

Et on a :

$$f(y)^2 + 1 = 1 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4} = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2$$

Donc : $\sqrt{f(y)^2 + 1} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ de même on a :

$$\sqrt{f(x)^2 + 1} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{Donc :}$$

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$$

$$f(x) * f(y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

Enfinement : $f(x+y) = f(x) * f(y)$

Donc : f est un homomorphisme bijectif de $(\mathbb{R}; +)$

vers $(\mathbb{R}; *)$ donc un isomorphisme

2) puisque : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ vers

$(\mathbb{R}; *)$ et $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif

Alors : $(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

II) Anneaux

1) Distributivité d'une loi sur une autre

Définition : Soient E un ensemble non vide $*$ et T deux lois de composition internes sur E .
 T est distributive sur $*$ $\Leftrightarrow \forall (x, y, z) \in E^3$
 $x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$

Et $(y * z) T x = (y T x) * (z T x)$.

Remarque : Si on sait que T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Exemples : 1) Dans \mathbb{C} , la multiplication est distributive sur l'addition

$$\forall (x; y; z) \in \mathbb{C}^3 : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

2) Dans $P(E)$, l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur

l'intersection : $\forall (A; B; C) \in P(E)^3 :$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

3) Dans $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); \circ)$ est distributive à droite

sur $+$, mais pas à gauche $((g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f)$, mais en général, $f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$.

1) dans $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$ la multiplication est distributive sur l'addition mais l'addition

$$\forall (A; B; C) \in M_3(\mathbb{R})^3 :$$

$$A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

$$(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$$

4) dans $\mathbb{N} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{R} ; \mathbb{C}$ l'addition n'est pas distributive sur la multiplication :

$$1 + (5 \times 3) \neq (1 + 5) \times (1 + 3)$$

5) on muni \mathbb{N} de la loi

5) on muni \mathbb{N} d'une loi de composition interne $*$

défini par : $a * b = a^b$ si $a \neq 0$ et $a \neq 0$;

Et $a * 0 = 1$

Etudions la distributivité de la loi $*$ par rapport à la multiplication ??

$$a) a*(b \times c) = a^{bc}$$

$$(a*b) \times (a*c) = a^b \times a^c = a^{b+c}$$

$a*(b \times c) \neq (a*b) \times (a*c)$ donc la loi $*$ n'est pas distributive a gauche sur la multiplication

$$b) (b \times c)*a = (bc)^a$$

$$(b*a) \times (c*a) = b^a \times c^a = (bc)^a$$

Donc : $(b \times c)*a = (b*a) \times (c*a)$ donc la loi $*$ est distributive à droite sur la multiplication
Finalement : la loi $*$ n'est pas distributive sur la multiplication

2) Anneaux

Définition : Soit A un ensemble non vide ayant au moins deux éléments muni de deux lois de composition interne (notées $*$ et T).

$(A, *, T)$ est un anneau \Leftrightarrow

1) $(A, *)$ est un groupe commutatif

2) T est associative

3) T est distributive sur $*$

L'anneau est commutatif si et seulement si T est commutative si de plus T admet un élément neutre on dira qu'il est unitaire

Notation additif et multiplicatif :

On note en général la première loi $+$ et la deuxième loi \times

On aura alors l'anneau $(A, +, \times)$

On note 0 l'élément neutre pour la loi $+$ et on

l'appelle l'élément nul de l'anneau A

Si la loi \times admet un élément neutre on le note 1

et on l'appelle l'élément unitaire de l'anneau A

Donc **les conditions (axiomes) pour un anneau**

$(A, +, \times)$ devient :

$$1) \forall (x; y; z) \in A^3 : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$2) \forall (x; y) \in A^2 : x + y = y + x$$

$$3) \exists 0 \in A \forall x \in A : x + 0 = x$$

$$4) \forall x \in A \exists -x \in A : x + (-x) = 0$$

$$5) \forall (x; y; z) \in A^3 : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

$$6) \forall (x; y; z) \in A^3 : x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ et}$$

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

3) Exemples anneaux :

$$1) (\mathbb{Z}; +; \times) ; (\mathbb{Q}; +; \times) ; (\mathbb{R}; +; \times) ; (\mathbb{C}; +; \times)$$

Sont des anneaux commutatifs unitaires
(1 l'élément unitaire)

2) $(\mathbb{N}; +; \times)$ n'est pas un anneau (car $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe)

3) L'anneau des polynômes de degré inférieur a n
 $(\mathbb{R}_n[X]; +; \times)$ Est un anneau commutatif unitaire

4) $(M_2(\mathbb{R}); +; \times) ; (M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ Sont des anneaux non commutatifs mais unitaires
(ls matrice unitaires sont resp:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \circ)$ n'est pas un anneau car la loi \circ n'est distributive sur l'addition

En effet : $f : x \rightarrow x$ et $g : x \rightarrow 1$ et $h : x \rightarrow \sqrt{|x|}$

On montre que :

$$[h \circ (f + g)](x) \neq (h \circ f)(x) + (h \circ g)(x)$$

6) $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire
($U : x \rightarrow 1$ l'élément unitaire)

7) $(P(E); \Delta; \cap)$ est un anneau commutatif unitaire
(E l'élément unitaire)

8) $(P(E); \Delta; \cup)$ n'est pas un anneau car la loi \cup n'est distributive sur Δ

4) Calculs dans un anneau

Théorème : Soit $(A, +, *)$ un anneau. On note 0_A l'élément neutre de A pour $+$.

$\forall x \in A, x * 0_A = 0_A * x = 0_A$ (l'élément neutre pour l'addition est toujours absorbant pour la multiplication).

Démonstration :

Soit $x \in A$. $0_A * x = (0_A + 0_A) * x = 0_A * x + 0_A * x$ car $*$ est distributive sur $+$. Maintenant, $(A, +)$ est un groupe et dans un groupe, tout élément est régulier.

Donc, $0_A * x + 0_A * x = 0_A * x = 0_A * x + 0_A$

entraîne $0_A * x = 0_A$. de même, $x * 0_A = 0_A$. \square

Théorème : Soit $(A, +, *)$ un anneau.

$\forall (a, b) \in A^2$

$(-a) * b = a * (-b) = -(a * b)$

Démonstration : Soit $(a, b) \in A^2$

$a * b + (-a) * b = (a + (-a)) * b = 0_A * b = 0_A$

et donc $(-a) * b = -a * b$.

De même, $a * b + a * (-b) = a * (b + (-b))$

$= a * 0_A = 0_A$ et donc $a * (-b) = -a * b$.

Remarques : Dans un anneau (ayant au moins deux éléments) on montre aisément

que $0_A \neq 1_A$ et que 0_A n'a pas de symétrique (pour la 2^{ième} loi). Si tous les autres éléments de A sont inversibles, on montrera que l'ensemble des éléments non nuls $A^* = A - \{0_A\}$

Forme un groupe (pour la loi 2^{ième} loi)

Théorème : Soit $(A, +, *)$ un anneau.

On note A^* l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A symétrisables pour $*$

$(A^*, *)$ est un groupe.

Démonstration : 1_A est un élément de A^*

car 1_A est inversible pour $*$, d'inverse lui-même.

Donc : $A^* \neq \emptyset$

• Si x et y sont deux éléments de A^* on sait que $x * y$ est dans A^* et que : $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Donc, $*$ induit une loi de composition interne sur A^* que l'on note encore $*$.

$*$ est associative dans A et donc $*$ est associative dans A^*

$1_A \in A^*$ et pour tout x de A^* , $1_A * x = x * 1_A = x$.

Donc, $*$ possède un élément neutre 1_A dans A^*

Soit $x \in A^*$. On sait que $x^{-1} \in A^*$ et que

$(x^{-1})^{-1} = x$. Donc, tout élément de A^* admet un symétrique pour $*$ dans A^*

Donc : $(A^*, *)$ est un groupe

4) Diviseurs de zéro - Anneau intègre

4-1) Diviseurs de zéro

Exemple : Considérons les deux matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces deux matrices n'est la matrice nulle, et pourtant leur produit vérifie :

$$M * N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que les matrices M et N sont des *diviseurs de zéro*.

Plus généralement, on a les définitions suivantes :

Définition 1: Soit $(A; *, T)$ un anneau et e

l'élément neutre pour $*$

Un élément $a \neq e$ de A est appelé un diviseur de zéro s'il existe un autre élément $b \neq e$ de A tel que $aTb = e$ et $bTa = e$

Définition 2 : l'anneau $(A; *, T)$ est dit intègre

S'il ne possède pas de diviseurs de zéros

Définition 3 : l'anneau $(A; +; *)$ est intègre

Ssi : $a * b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Exemples :

- $(\mathbb{Z}; +; *)$ est un anneau intègre : le produit de deux entiers relatifs est nul si et seulement si l'un de ces deux entiers est nul.
- L'exemple précédent montre que $(M_2(\mathbb{R}); +; *)$ n'est pas un anneau intègre.

De même pour $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$

- $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Non intègre en effet :

$$f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}; x \geq 0 \\ 0; x < 0 \end{cases} \text{ et } g : x \rightarrow \begin{cases} 0; x \geq 0 \\ x^5; x < 0 \end{cases}$$

On a : $f \neq \theta$ et $g \neq \theta$ avec $\theta : x \rightarrow 0$ l'élément

neutre de $(F(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +)$

On montre que : $f \times g = \theta$

- $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}; +; \times)$ n'est pas un anneau intègre.

Car : $\bar{2} \neq \bar{0}$ et $\bar{3} \neq \bar{0}$ mais $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$

$\bar{3}$ est un diviseur de zéro et $\bar{2}$ aussi

- $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; +; \times)$ est un anneau intègre.

Tableau de : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}; \times)$

\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

proposition : soit $(A; *, T)$ un anneau unitaire

si $a \in A$ admet un symétrique pour T alors a

n'est pas un diviseur de zéro dans $(A; *, T)$

Preuve : Soit e l'élément neutre pour $*$ et Soit

f l'élément neutre pour T et a' le symétrique

De a

Supposons qu'il existe $b \in A$ tel que : $aTb = e$ et

$$bTa = e$$

$$aTb = e \Leftrightarrow a'T(aTb) = a'Te \Leftrightarrow (a'Ta)Tb = e$$

$$\Leftrightarrow fTb = e \Leftrightarrow b = e$$

Exercice 6 : on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

1) Monter que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) Monter que $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Solution : 1) Montrons que $(E; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}; +)$?

On a $E \subset \mathbb{Q}$ et on a $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ donc : $1 \in E$

donc : $E \neq \emptyset$

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x - y \in E$?

$$x \in E \Leftrightarrow \exists (a; b) \in \mathbb{Q}^2 / x = a + b\sqrt{3}$$

$$y \in E \Leftrightarrow \exists (c; d) \in \mathbb{Q}^2 / y = c + d\sqrt{3}$$

$$x - y = (a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3}$$

On a $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ donc : $a - c \in \mathbb{Q}$ et $b - d \in \mathbb{Q}$

Donc : $x - y = a'' + b''\sqrt{3}$ par suite : $x - y \in E$

Donc : $(E; +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}; +)$

donc $(E; +)$ est un groupe

2)) Montrons que E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$?

soit $x \in E$ et $y \in E$ montrons $x \times y \in E$?

$$x \times y = (a + b\sqrt{3}) \times (c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

puisque $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ alors : $ac + 3bd \in \mathbb{Q}$ et

$ad + bc \in \mathbb{Q}$ donc : $x \times y \in E$

$$: E = \{a + b\sqrt{3} / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}$$

Donc : E est une partie stable de $(\mathbb{Q}; \times)$

3) on a $(\mathbb{Q}; +; \times)$ est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans E

Par suite $(E; +; \times)$ un anneau commutatif

Et $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ donc : $1 \in E$ et 1 est l'élément

neutre de la multiplication dans $(\mathbb{Q}; \times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans E

Conclusion : $(E; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 7: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Tel que : $x^2 = x \quad \forall x \in A$ ($(A; +; \times)$ s'appelle anneau

De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2) en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément neutre de $(A; +)$)

3) soient : $x \in A$ et $y \in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A; +; \times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) montrer que : a) $x+y \neq 0_A$ b) $x+y \neq y$

5) déterminer le tableau de la somme pour les éléments : $0_A ; x ; y ; x+y$

Solution : 1) soit $x \in A$ on a :

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x) = xx+xx+xx+xx$$

$$(x+x)^2 = x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x+x+x \text{ car } x^2 = x$$

$$\text{Donc : } (x+x)^2 = x+x+x+x$$

2)a) soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy$$

$$(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2$$

$$(x+y)^2 = x+xy+yx+y \text{ car } x^2 = x \quad \forall x \in A$$

b) on a : $(x+y)^2 = x+xy+yx+y$ et $(x+y)^2 = x+y$

$$\text{donc : } x+xy+yx+y = x+y$$

$$\text{donc : } xy+yx = 0_A \text{ et puisque } xy+xy = 0_A$$

$$\text{Alors : } xy+yx = xy+xy \text{ donc } yx = xy$$

Donc : $(A; +; \times)$ est commutatif

c) déduction de : $xy(x+y)$

soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$xy(x+y) = xyx+xy^2 = xxy+xy^2 = x^2y+xy^2 = xy+xy$$

$$\text{et puisque } xy+xy = 0_A \text{ alors : } xy(x+y) = 0_A$$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) on suppose que $x+y=0_A$ et puisque $x+x=0_A$

$$\text{Alors : } x+y = x+x \text{ cad } y = x \text{ contradiction}$$

$$\text{Donc : } x+y \neq 0_A$$

b) on suppose que $x+y=y$ donc : $x=0_A$

Contradiction donc $x+y \neq y$

5) on a : $x+x=0_A$ et $x+0_A=0_A+x=x$

+	0_A	x	y	$x+y$
0_A	0_A	x	y	$x+y$
x	x	0_A	$x+y$	y
y	y	$x+y$	0_A	x
$x+y$	$x+y$	y	x	0_A

III) corps

1) Définition : Soit $(K, +, \times)$ un anneau.

$(K, +, \times)$ est un corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse (pour \times) dans K et le corps est commutatif si et seulement si $*$ est commutative.

Exemples : 1) $(\mathbb{Q}; +; \times)$; $(\mathbb{R}; +; \times)$; $(\mathbb{C}; +; \times)$ sont des corps commutatifs.

2) $(\mathbb{Z}; +; \times)$ Est un anneau commutatif qui n'est pas un corps car par exemple, le nombre 2 n'est pas inversible dans \mathbb{Z} .

3) $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ n'est pas un corps car par

exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

4) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}; +; \times)$ n'est pas un corps car par

exemple $\bar{3}$ n'est pas inversible

2) Notation additif et multiplicatif d'un corps :

On note en général la première loi $+$ et la deuxième loi \times

On aura alors le corps $(K, +, \times)$

On note 0 l'élément neutre pour la loi $+$ et on l'appelle l'élément nul du corps K

l'élément neutre pour la loi \times on le note 1 et on l'appelle l'élément unitaire corps K

Donc les conditions (axiomes) pour un corps

$(K, +, \times)$ devient :

1) $\forall (x; y; z) \in K^3 : x + (y + z) = (x + y) + z$

2) $\forall (x; y) \in K^2 : x + y = y + x$

3) $\exists 0 \in K \quad \forall x \in K : x + 0 = x$

4) $\forall x \in K \quad \exists -x \in K : x + (-x) = 0$

5) $\forall (x; y; z) \in K^3 : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

6) $\exists 1 \in K \quad \forall x \in K : x \times 1 = x \times 1 = x$

7) $\forall x \in K - \{0\} \quad \exists x^{-1} \in K - \{0\} : x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$

8) $\forall (x; y; z) \in K^3 : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ et

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

Théorème : Dans un corps, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nul :

$$\forall (x; y) \in K^3 : x \times y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Donc un corps ne contient pas de diviseur de zéro

Démonstration. Soit $(K, +, \times)$: on note 0 (resp. 1) l'élément neutre pour $+$ (resp. \times).

Soit $(a, b) \in K^2$ tel que $a \times b = 0$.

Si $a \neq 0$, a admet un inverse pour \times noté a^{-1}

On peut écrire $a \times b = 0 \Rightarrow$

$$a^{-1} \times a \times b = a^{-1} \times 0$$

$$\Rightarrow 1 \times b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Exercice : soit $(K, +, \times)$ un corps fini :

$$K = \{0; e; x_1; x_2; \dots; x_m\} ; m \in \mathbb{N}^*$$

Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour $+$ (resp. \times).

1) montrer que $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times

2) montrer que le produit de tous les éléments de K est égal à $-e$

3) on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +; \times)$ avec n

premier montrer que : $\overline{(n-1)! + 1} \equiv 0 [n]$

Solution : 1)

$$\forall x \in K - \{0\} \quad x = x^{-1} \Leftrightarrow x \times x = x^{-1} \times x \Leftrightarrow x^2 = e$$

$$\Leftrightarrow x^2 - e = 0 \Leftrightarrow x^2 - e^2 = 0 \Leftrightarrow (x - e)(x + e) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -e \text{ ou } x = e \text{ car } (K, +, \times) \text{ un corps}$$

2) puisque $-e$ et e sont les seuls éléments de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi \times

$$\text{Alors : } K - \{0\} = \{-e; e; a_1; a_1^{-1}; a_2; a_2^{-1}; \dots; a_p; a_p^{-1}\}$$

$$\text{Donc : } -e \times e \times a_1 \times a_1^{-1} \times a_2 \times a_2^{-1} \dots \times a_p \times a_p^{-1} = -e$$

$$3) \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \dots; \overline{n-1}\} \text{ (un corps)}$$

D'après les questions précédentes on a :

$\overline{1} \times \overline{2} \times \dots \times \overline{n-1} = \overline{-1}$ donc :

$$\overline{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} = \overline{-1}$$

donc : $\overline{(n-1)! + 1} \equiv 0 [n]$

Théorème : Dans un corps, tout élément de

$K - \{0\}$ est régulier pour la loi \times :

$$\forall (x; y) \in K^3 \text{ et } \forall a \in K - \{0\}$$

$$ax = ay \Rightarrow x = y \text{ et } xa = ya \Rightarrow x = y$$

Exercice8: on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Monter que $(E; +)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

3) soit f l'application qui associe à chaque

matrice $M_{(a;b)}$ de $E - \{0_2\}$ le nombre complexe :

$$a + ib\sqrt{2} \text{ de } \mathbb{C}^*$$

a) Monter que f est un morphisme bijectif de

$$(E - \{0_2\}, \times) \text{ dans } (\mathbb{C}^*; \times)$$

b) en déduire la structure de $(E - \{0_2\}, \times)$

4) Monter que $(E; +; \times)$ est un corps

Solution : 1) on a : $M_{(0;0)} = 0_2 \in E$ donc : $E \neq \emptyset$

Et on a $E \subset (M_2(\mathbb{R}); \times)$

soit $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$\text{Donc : } M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -2(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)} - M_{(c;d)} = M_{(a-c; b-d)}$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $a-c \in \mathbb{R}$ et

$b-d \in \mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)} - M_{(c;d)} \in E$

Donc : $(E; +)$ est un un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

donc $(E; +)$ est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix} = M_{(ac-2bd; ad+bc)}$$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd \in \mathbb{R}$ et

$ad+bc \in \mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3) soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac-2bd; ad+bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac-2bd; ad+bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

f est un morphisme de $(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a;b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il}$$

est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

b) $(E - \{0_2\}, \times)$ et $(\mathbb{C}^*; \times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*; \times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable

de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ donc La multiplication est

distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E; +)$ est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion :

$(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 9: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 0_K l'élément neutre de $(K; +)$ et 1_K

l'élément neutre de $(K; \times)$ et on suppose qu'il

existe un homomorphisme f bijectif de $(K; +)$

vers $(K - \{0_K\}; \times)$

1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

montrer que : $f(K) = \{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et on pose :

$$\alpha = f^{-1}(1_K) \text{ et } \beta = f^{-1}(-1_K)$$

a) montrer que : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

b) en déduire que $\alpha = \beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas

d'homomorphisme f bijectif de $(K; +)$ vers

$(K - \{0_K\}; \times)$

Solution : 1) on suppose que $1_K + 1_K = 0_K$

soit $x \in K$ on a donc : $x \times (1_K + 1_K) = x \times 0_K$

donc : $x \times 1_K + x \times 1_K = x \times 0_K$

donc : $x + x = 0_K$ donc : $f(x + x) = f(0_K)$

puisque f homomorphisme bijectif de $(K; +)$ vers

$(K - \{0_K\}; \times)$ on a donc : $f(x) \times f(x) = 1_K$

donc : $(f(x))^2 = 1_K$ donc : $(f(x) - 1_K)(f(x) + 1_K) = 0_K$

donc : $f(x) = 1_K$ ou $f(x) = -1_K = 1_K$ car

$$1_K + 1_K = 0_K$$

donc : $\forall x \in K f(x) = 1_K$ donc : $f(K) = \{1_K\}$

2) a) on a : $1_K + 1_K \neq 0_K$ et $\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

$\alpha = f^{-1}(1_K) \Leftrightarrow f(\alpha) = 1_K$ et $\beta = f^{-1}(-1_K) \Leftrightarrow f(\beta) = -1_K$

donc : $f(\alpha + \alpha) = (f(\alpha))^2 = (1_K)^2 = 1_K$

et $f(\beta + \beta) = (f(\beta))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$

donc : $f(\alpha + \alpha) = f(\beta + \beta)$

donc : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$ car f bijectif

b) on a : $\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) = 0_K$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta) \times (1_K + 1_K) = 0_K$

$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K$ ou $1_K + 1_K = 0_K$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0_K \text{ car } 1_K + 1_K \neq 0_K$$

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

3) s'il existe un homomorphisme f bijectif de

$(K; +)$ vers $(K - \{0_K\}; \times)$ on alors deux cas :

1 cas : $1_K + 1_K = 0_K$ d'après 1) on a :

$$\forall x \in K \quad f(x) = 1_K \Leftrightarrow \forall x \in K; f(x) = f(0_K)$$

Puisque f bijectif : $\forall x \in K \quad x = 0_K$

Cad $K = \{0_K\}$ et donc : $K - \{0_K\} = \emptyset$

contradiction

2 cas : $1_K + 1_K \neq 0_K$ d'après 2) et on posons :

$\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$ on trouve : $\alpha = \beta$

Cad $f^{-1}(-1_K) = f^{-1}(1_K)$ et Puisque f^{-1} bijectif

Alors : $-1_K = 1_K$ cad $1_K + 1_K = 0_K$ contradiction

Avec le fait que $1_K + 1_K \neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme f

bijectif de $(K; +)$ vers $(K - \{0_K\}; \times)$

Exercice 10 :

1) On munit de la loi de composition interne

définie par : $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1); \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2) On munit \mathbb{R}^{+*} de la loi de $*$ composition interne

définie par : $x * y = \sqrt[3]{x^2 + y^2} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de \mathbb{R}^{+*} n'a de symétrique pour $*$

3) On munit \mathbb{R} de la loi de composition interne $*$

définie par : $x * y = \sqrt{x^3 + y^3} \quad \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x \rightarrow x^3$ est un

isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ vers $(\mathbb{R}; +)$ En déduire que

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe commutatif

Solution : 1) $x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

$$= yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1)$$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il

suffit de trouver $x; y; z \in \mathbb{R}$ et tels que :

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans $x; y; z$ et.

Prenons, par exemple : $x = 0; y = 2; z = 3$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * (2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1))$$

$$= 0 * 30 = 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$

$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = 0 * 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1) * 3$$

$$= -3 * 3 = 0 * 2 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$

La loi n'est pas associative

$$1 * x = 1x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$

De plus, comme la loi est commutative

$$x * 1 = 1 * x$$

On a bien $x * 1 = 1 * x = x$, 1 est l'élément neutre.

$$x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

La loi est commutative.

$$(x * y) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = (\sqrt{x^2 + y^2}) * z = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}$$

$$(x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant

$$\text{en } (x; y; z) \text{ en } (y; z; x) \quad (y * z) * x = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2}$$

Comme $*$ est commutative :

$(y * z) * x = x * (y * z)$ Et finalement :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

La loi est associative.

Remarque : On aurait pu calculer directement

$$x * (y * z)$$

$$0 * x = \sqrt{0^2 + x^2} = |x| \text{ car } x \geq 0$$

Comme $*$ est commutative : $0 * x = x * 0 = x$

0 est l'élément neutre.

Supposons x qu'admette un symétrique y

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |x| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$$

Or $x > 0$ et $y > 0$ donc : $x * y = 0$ est impossible,

pour tout $x > 0$ x n'a pas de symétrique.

3) On pose $\rho(x) = x^3$ ET $\rho'(x) > 0$ pour tout

$x \neq 0$ et est nul en 0, ρ est une fonction

strictement croissante \mathbb{R} de sur \mathbb{R} , ρ est une

bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$$\rho(x * y) = (x * y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 = x^3 + y^3 = \rho(x) + \rho(y)$$

ρ est un morphisme de $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; +)$ et

donc un isomorphisme de $(\mathbb{R}; *)$ dans $(\mathbb{R}; +)$

(puisque ρ est bijective).

ρ^{-1} est un isomorphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(\mathbb{R}; *)$

donc un morphisme, $(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif

et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.

$(\mathbb{R}; *)$ est un groupe.

Exercice 11 : on considère l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ et } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Monter que : $G \neq \emptyset$

$$2) \text{ Monter que : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Monter que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); \times)$$

4) est ce que G est une partie stable de

$$(M_2(\mathbb{R}); +) ?$$

$$5) \text{ on pose : } M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

calculer $M^n(\theta) \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{ou : } M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta) \times M(\theta) \times \dots \times M(\theta)}_{n \text{ fois}}$$

6) soit f l'application de \mathbb{R} dans G tel que :

$$f(\theta) = M(\theta)$$

a) Monter que f est un morphisme surjectif de

$$(\mathbb{R}; +) \text{ dans } (G; \times)$$

b) en déduire la structure de $(G; \times)$

7) soit l'ensemble : $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Monter que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b) Monter que $(U; \times)$ est un groupe commutatif

Solution : 1) on a : $M_{(1;0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $0^2 + 1^2 = 1$

donc : $G \neq \emptyset$

2)

$$M \in G \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2 / M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } a^2 + b^2 = 1$$

$$\exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta$$

$$\text{Donc : } M \in G \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3) soit : $M_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$

Deux éléments de G

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

Donc : $M_1 \times M_2 \in G$

Donc G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

4) on a ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

Deux éléments de G

Et puisque : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$

Car $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$

Donc G n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); +)$

5) on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Calculons : $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta) = M(\theta) \times M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

par récurrence sur \mathbb{N}^*

a) on a : $M^1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M(1\theta)$

la ptté est vraie pour $n=1$

b) on suppose que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

c) montrons que :

$$M^{n+1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} = M((n+1)\theta) ?$$

$$M^{n+1}(\theta) = M(\theta) M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta + \theta) & -\sin(n\theta + \theta) \\ \sin(n\theta + \theta) & \cos(n\theta + \theta) \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* M^n(\theta) = M(n\theta)$

6)a) Soit $(\theta_1; \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

On a : $f(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1 + \theta_2) = M(\theta_1) \times M(\theta_2)$

donc : $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2)$

donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$

et on a : $\forall M \in G \exists \theta \in \mathbb{R} / f(\theta) = M(\theta)$

donc f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}; +)$ dans

$(G; \times)$

6)b) puisque f est un morphisme surjectif de

$(\mathbb{R}; +)$ dans $(G; \times)$ on a $f(G) = \mathbb{R}$ et on a aussi

$(\mathbb{R}; +)$ est un groupe commutatif alors aussi

$(G; \times)$ est un groupe commutatif

7) a) Montrons que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\} ?$

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$z \in U \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |a + ib| = 1$$

$$z \in U \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos \theta \text{ et } b = \sin \theta \text{ et } z = a + ib$$

$$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\text{Donc : } U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$$

b) Montrons que $(U; \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

on a $U \subset \mathbb{C}^*$ et $U \neq \emptyset$ car $1 \in U$

Soient $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$ montrons que

$$z_1 \times z_2^{-1} \in U ?$$

$$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{i\theta_1}$$

$$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{i\theta_2}$$

$$\text{On a : } z_1 \times z_2^{-1} = e^{i\theta_1} \times (e^{i\theta_2})^{-1} = e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\text{Avec } \theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ donc : } z_1 \times z_2^{-1} \in U$$

Donc : $(U; \times)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

Et puisque $(\mathbb{C}^*; \times)$ est commutatif

Alors : $(U; \times)$ est un groupe commutatif

$$2) M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac - 2bd & -2(ad + bc) \\ ad + bc & ac - 2bd \end{pmatrix} = M_{(ac - 2bd; ad + bc)}$$

Et puisque : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac - 2bd \in \mathbb{R}$ et

$$ad + bc \in \mathbb{R} \text{ donc : } M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

3) soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$$f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}) = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2}$$

$$f(M_{(a;b)}) \times f(M_{(c;d)}) = (a + ib\sqrt{2})(c + id\sqrt{2})$$

$$= ac - 2bd + i(ad + bc)\sqrt{2} = f(M_{(ac - 2bd; ad + bc)})$$

$$= f(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)})$$

f est un morphisme de $(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f(M_{(a;b)}) = x + iy$

$$f(M_{(a;b)}) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ Existe et il}$$

est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

$(E - \{0_2\}, \times)$ dans $(\mathbb{C}^*; \times)$

b) $(E - \{0_2\}, \times)$ et $(\mathbb{C}^*; \times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*; \times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

4) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable

de $(M_2(\mathbb{R}); \times)$ donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E; +)$ est un groupe commutatif et

$(E - \{0_2\}, \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion : $(E; +; \times)$ est un corps

Exercice 12: Soit $(A; +; \times)$ un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A; \times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

$$a) ab + ba = 1_A$$

$$b) a^2b + ba^2 = a$$

$$1) \text{montrer que : } a^2b = ba^2$$

$$2) \text{montrer que : } aba + aba = a$$

$$3) \text{en déduire que : } ab = ba$$

$$\text{Solution : } 1) \text{on a : } a^2b + ba^2 = a$$

$$\text{donc : } a^2b + ba^2 = a1_A$$

$$\text{donc : } a^2b + ba^2 = a(ab + ba)$$

$$\text{donc : } a^2b + ba^2 = a^2b + aba$$

$$\text{donc : } ba^2 = aba(1)$$

$$\text{et on a : } a^2b + ba^2 = a = 1_A a$$

$$\text{donc : } a^2b + ba^2 = (ab + ba)a$$

$$\text{donc : } a^2b + ba^2 = aba + ba^2$$

$$\text{donc : } a^2b = aba(2)$$

$$\text{de (1) et (2) en déduit que : } a^2b = ba^2$$

$$2) \text{d'après ce qui précède on a :}$$

$$ba^2 = aba \text{ et } a^2b = aba$$

$$\text{Donc : } aba + aba = a^2b + ba^2 \text{ et d'après b) on a}$$

$$aba + aba = a$$

$$3) \text{on a : } (ab)(ab) = abab = (aba)b = (ba^2)b$$

$$(ba)(ba) = baba = b(aba) = b(a^2b)$$

$$(\text{Car : } aba = a^2b)$$

$$\text{Et on a : } (ab)(ab) = (1_A - ba)(1_A - ba)$$

$$(ab)(ab) = 1_A - ba - ba + (ba)(ba)$$

$$\text{Donc : } ba^2b = 1_A - ba - ba + ba^2b$$

$$\text{Car : } (ab)(ab) = (ba)(ba) = ba^2b$$

$$\text{Donc : } ba + ba = 1_A \text{ et puisque : } ba + ab = 1_A$$

$$\text{Alors : } ab = ba$$

Exercice13: Soit $(K; +; \times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K; \times)$

Soient x et y deux éléments de $K - \{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

$$a) x + y = 1_K \quad b) x^{-1} + y^{-1} = 1_K$$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi \times

$$1) \text{montrer que : } xy = yx = -1_K$$

$$2) \text{montrer que : } x^4 + y^4 = 7.1_K$$

$$\text{Avec : } 7.1_K = \underbrace{1_K + 1_K + \dots + 1_K}_{7 \text{ fois}}$$

Solution : 1) Soient x et y deux éléments de

$$K - \{0_K\} \text{ on a : } xy = x(x^{-1} + y^{-1})y$$

$$xy = xx^{-1}y + xy^{-1}y = y + x = -1_K$$

$$\text{Donc : } xy = yx = -1_K$$

$$2) \text{on a : } 1_K = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$

$$1_K = x^2 - 1_K - 1_K + y^2$$

$$\text{Donc : } x^2 + y^2 = 3.1_K$$

$$\text{Donc : } 9.1_K = (x^2 + y^2)^2$$

$$\text{Donc : } 9.1_K = x^4 + x^2y^2 + y^2x^2 + y^4$$

$$\text{Donc : } 9.1_K = x^4 + 1_K + 1_K + y^4$$

$$\text{Donc : } x^4 + y^4 = 7.1_K$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Les espaces vectoriels

1. Rappels de cours

Soit \mathbb{K} un corps. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

a) Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur \mathbb{K} est un ensemble E non vide tel que:

Pour tout X et Y dans E et pour tout λ et μ dans \mathbb{K} , on a:

► Loi +:

- E possède un élément neutre pour +, noté 0.
- $X + Y \in E$,
- $-X \in E$,
- La loi + est commutative.

► Loi .:

- $1.X = X$,
- $(\lambda + \mu).X = \lambda.X + \mu.X$,
- $\lambda.(\mu.X) = (\lambda\mu).X$,
- $\lambda.(X + Y) = \lambda.X + \lambda.Y$.

b) Sous-espace vectoriel

1) Définition

Un sous-espace vectoriel sur \mathbb{K} est un ensemble E non vide tel que:

Pour tout X et Y dans E et pour tout λ dans \mathbb{K} , on a:

- $X + Y \in E$,
- $\lambda X \in E$.



POLYVALENT
CORPORATION

2) Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

3) Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E .

L'ensemble noté $F_1 + F_2$ défini par :

$$F_1 + F_2 = \{x \in E / x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E .

4) Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E .

► Définitions :

i) On dit que F est somme directe de F_1 et de F_2 si et seulement si :

$$\begin{cases} F = F_1 + F_2 \\ F_1 \cap F_2 = \{0_F\} \end{cases}$$

et on note :

$$F = F_1 \oplus F_2.$$

ii) On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

► Théorème :

$E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si tout vecteur x de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 , c'est-à-dire :

$$x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2.$$

c) Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

1) Définition

L'espace vectoriel engendré par la famille $\{e_1, \dots, e_p\}$, noté $\text{vect}\{e_1, \dots, e_p\}$, désigne l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\{e_1, \dots, e_p\}$, c'est-à-dire :

$$x \in \text{vect}\{e_1, \dots, e_p\} \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p / x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p.$$

2) Famille génératrice, libre, liée

► La famille $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E si et seulement si

$$E = \text{vect} \{e_1, \dots, e_p\}.$$

► La famille $\{e_1, \dots, e_p\}$ est libre si et seulement si, pour tout p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$E = \text{vect}\{e_1, \dots, e_p\}.$$

on a : $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$.

► La famille $\{e_1, \dots, e_p\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille s'écrit comme combinaison des autres vecteurs de cette même famille.

3) Bases

► Définition :

Une famille finie de vecteurs de E est une base si et seulement si elle est libre et elle engendre E .

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base d'un sous-espace vectoriel F de E .

La quantité $\text{card}\{e_1, \dots, e_p\}$ s'appelle la dimension de F et on note $\dim F$. Elle ne dépend pas de la base choisie.

► Propriété 1 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

► Propriété 2 :

Une famille $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de E si et seulement si elle est libre et

$$\dim \text{vect}\{e_1, \dots, e_p\} = \dim E.$$

► Théorème de la base incomplète :

Si \mathcal{L} est une famille libre de E , alors on peut compléter \mathcal{L} de façon à obtenir une base de E .

► Théorème 1 :

Si $\dim E = n$ alors toute famille libre a au moins n éléments différents.

Si $\dim E = n$ alors toute famille libre qui a n éléments différents est une base.

Si $\dim E = n$ alors toute famille génératrice a au moins n éléments différents.

Si $\dim E = n$ alors toute famille génératrice qui a au moins n éléments différents est une base.

Si on note :

$$\begin{cases} P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \\ Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \\ A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \\ A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f). \end{cases}$$

alors :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

4) Formule de changement de bases pour un endomorphisme de E

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de l'espace vectoriel E . Soit f un endomorphisme de E .

Si on note :

$$\begin{cases} P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \\ A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \\ A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f). \end{cases}$$

alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

b) Déterminants

1) Déterminant d'une matrice 2×2

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2×2 .

On définit le déterminant de A , noté $\det A$, par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

2) Déterminant d'une matrice 3×3

Posons $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 3×3 .

On définit le déterminant de A , noté $\det A$, par :

$$\det A = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

3) Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notons S_{pq} la matrice carrée d'ordre $n-1$, obtenue en supprimant à A la $p^{\text{ième}}$ ligne de A et la $q^{\text{ième}}$ colonne de A .

Alors, on appelle « développement de $\det A$ par rapport à la $q^{\text{ième}}$ colonne » la formule suivante permettant de calculer $\det A$:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{q+i} \times \det(S_{iq}).$$

De même, on appelle « développement de $\det A$ par rapport à la $p^{\text{ième}}$ ligne » la formule suivante permettant de calculer $\det A$:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{p+j} \times \det(S_{pj}).$$

4) Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit A une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Le déterminant de A est égal au produit des termes figurant sur la diagonale.

5) Propriétés du déterminant

i) $\det({}^t A) = \det A$,

ii) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$,

iii) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

6) Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n .

► Définition du déterminant d'une famille de vecteurs :

Le déterminant de la famille de vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ dans une base \mathcal{B} de \mathbb{K}^n est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs u_1, \dots, u_n exprimées dans la base \mathcal{B} . On le note $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ ou plus simplement $\det(u_1, \dots, u_n)$, s'il n'y a pas d'ambiguïté.

► Propriété du déterminant d'une famille de vecteurs:

Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n . Alors:

$$\det(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\} \text{ forme une base de } \mathbb{K}^n,$$

et:

$$\det(u_1, \dots, u_n) = 0 \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_n\} \text{ est une famille liée de } \mathbb{K}^n.$$

► Conséquence:

Une matrice possédant deux vecteurs-lignes colinéaires ou deux vecteurs-colonnes colinéaires est de déterminant nul.

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

1) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont inversibles et calculer leurs inverses.

2) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . On pose $u_1 = (3, 1)$ et $u_2 = (5, 2)$.

a) Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .

b) Écrire la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

c) Écrire la matrice de passage Q de \mathcal{B}' à \mathcal{B} . On pourra utiliser un résultat de la question 1).

d) Soit $u \in \mathbb{R}^2$; on note (a, b) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} et (α, β) ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' .

Exprimer a et b en fonction de α et β , puis α et β en fonction de a et b .

3) On considère une troisième base $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 telle que: $M_{\mathcal{B}'' \rightarrow \mathcal{B}'} = R$ où:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer v_1 et v_2 .

Les matrices

1. Rappels de cours

a) Opérations sur les matrices

On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans \mathbb{K} à n lignes et à p colonnes.

1) Addition de deux matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

La matrice C telle que $C = A + B$ définie pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ par :

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

2) Multiplication de deux matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

La matrice C telle que $C = AB$ définie pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, q\}$ par :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}.$$

3) Transposée d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

La transposée de la matrice A , notée A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ par :

$$(A^T)_{ij} = A_{jn}.$$

b) Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels.

Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ une base de F .

Soit f une application linéaire de E à valeurs dans F .

On appelle matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' la matrice dont les colonnes sont formées des composantes dans \mathcal{B}' des vecteurs de $\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$. On la note $Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$ ou plus simplement $Mat(f)$. Ainsi :

$$Mat(f) = \begin{matrix} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & & & \end{matrix}$$

► Théorème

Soit f une application linéaire de E dans F et $A = Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $x \in E$ et X est la matrice colonne associée à x dans la base \mathcal{B} ,

Soit $y \in F$ et Y est la matrice colonne associée à y dans la base \mathcal{B}' ,

Alors :

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX.$$

► Conséquences du théorème

Soient f et g deux applications de E dans F . Soient λ et μ dans \mathbb{K} .

i) $Mat(f + g) = Mat(f) + Mat(g)$.

ii) $Mat(\lambda f + \mu g) = \lambda Mat(f) + \mu Mat(g)$.

iii) $Mat(f \circ g) = Mat(f) \times Mat(g)$.

c) Matrices carrées d'ordre n

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Lorsque $n = p$, on dit que la matrice A est une matrice carrée.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

1) Propriétés des matrices carrées

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) AB et BA existent mais on n'a pas toujours l'égalité: $AB = BA$.

ii) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un élément neutre pour la multiplication:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Formule de Newton:

Lorsque A et B commutent, c'est-à-dire lorsque $AB = BA$, alors:

$$(A + B)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k A^k B^{n-k},$$

où $(A + B)^n = \underbrace{(A + B) \times (A + B) \times \dots \times (A + B)}_{n \text{ fois}}$.

2) Matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que:

$$AB = I.$$

3) Propriétés des matrices inversibles

Soient A et B deux matrices inversibles.

i) La matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ii) Si A est la matrice d'une application linéaire f , alors:

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

Dans le cas où A est inversible, A^{-1} est la matrice de l'application linéaire f^{-1} (inverse de f).

Les polynômes

1. Rappels de cours

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

a) Polynôme unitaire

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors P s'écrit :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

Le polynôme P est unitaire si $a_n = 1$.

b) Polynôme associé

Deux polynômes P et Q sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que :

$$P = \lambda Q.$$

c) Degré d'un polynôme

► Définition :

Si P s'écrit :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0,$$

alors l'entier n est appelé degré de P . Le degré de P se note $\deg P$.

► Propriétés :

Soient P et Q deux polynômes.

i) Si $P \neq 0$ alors P est constant si et seulement si $\deg P = 0$.

ii) $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

iii) $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

d) Division euclidienne de deux polynômes

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe deux polynômes Q et R dans $\mathbb{K}[X]$, uniques, tels que :

$$A = BQ + R,$$

avec $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$.

Le polynôme Q s'appelle le quotient et le polynôme R s'appelle le reste de la division euclidienne de A par B .

e) Formule de Taylor

Soit P un polynôme de degré n . Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k,$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée k° de P .

f) Racine d'un polynôme

► Définition :

α est racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

► Propriétés :

- 1) α est racine de P si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P .
- 2) Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de P alors $\prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$ divise P .
- 3) Si $\deg P = n$ alors P admet au plus n racines distinctes.
- 4) Si $\deg P = n$ et P admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ alors $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$.
- 5) $P = 0$ si et seulement si P admet une infinité de racines.

g) Multiplicité d'une racine

► Définition :

α est racine de multiplicité k de P si et seulement si $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P .

► Propriété:

α est racine de multiplicité k de P si et seulement si:

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

h) PGCD de deux polynômes

► Définition:

Il existe un unique polynôme unitaire ou nul D tel que, pour tout polynôme P :

$$P \text{ divise } A \text{ et } P \text{ divise } B \Leftrightarrow P \text{ divise } D.$$

Le polynôme D est appelé plus grand diviseur commun de A et B et est noté $PGCD(A, B)$.

► Théorème de Bezout:

Il existe un couple de polynômes U et V tel que $AU + BV = D$.

► Théorème de Gauss:

Soient A, B, C trois polynômes tels que:

$$A \text{ divise } BC \text{ et } PGCD(A, B) = 1$$

Alors:

A divise C .

i) PPCM de deux polynômes

► Définition:

Il existe un unique polynôme unitaire ou nul M tel que, pour tout polynôme P :

$$A \text{ divise } P \text{ et } B \text{ divise } P \Leftrightarrow M \text{ divise } P.$$

Le polynôme M est appelé plus petit multiple commun de A et B et est noté $PPCM(A, B)$.

► Propriété:

Soit C un polynôme non nul et unitaire. Alors:

$$\begin{cases} PPCM(CA, CB) = C \times PPCM(A, B) \\ PGCD(CA, CB) = C \times PGCD(A, B). \end{cases}$$

j) Polynômes irréductibles

► Définition:

P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\deg P = 1$ ou les seuls polynômes qui divisent P sont les polynômes constants et les polynômes associés à P .

► Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

► Théorème de d'Alembert :

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg P \geq 1$ alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}[X]$.

► Conséquence :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

P est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si $\deg P \leq 1$.

► Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\deg P = 1$ ou $P = aX^2 + bX + c$ avec $\Delta < 0$.

► Théorème :

Tout polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire comme produit de polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

k) Division selon les puissances croissantes

► Théorème :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Si $B(0) \neq 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un couple de polynômes (Q, R) tel que :

$$A = BQ + X^{n+1}R,$$

avec $Q = 0$ ou $\deg Q \leq n$.

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes suivants :

$$\begin{cases} T_0(X) = 2, T_1(X) = X, \\ T_{n+2}(X) = XT_{n+1}(X) - T_n(X). \end{cases}$$

Les systèmes linéaires

1. Rappels de cours

Soient E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n .

a) Rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F . Le rang de f , noté $rg(f)$, est défini par :

$$rg(f) = \dim \text{Im} f.$$

b) Rang d'un système de vecteurs

Le rang de la famille de vecteurs $\{e_1, \dots, e_p\}$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille de vecteurs :

$$rg \{e_1, \dots, e_p\} = \dim \text{vect} \{e_1, \dots, e_p\}.$$

c) Rang d'une matrice

1) Définition

Soit A une matrice.

Le rang de A est le rang des vecteurs colonnes qui composent A .

Le rang de A est aussi le rang de l'application linéaire représentée par A .

2) Calcul pratique du rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

► Définition d'une matrice extraite de A :

Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs colonnes et une ou plusieurs lignes à la matrice A.

► Définition d'un bordant :

Un bordant est le déterminant d'une matrice carrée, formée d'une matrice M extraite de A, et d'une ligne ou d'une colonne figurant dans la matrice A, mais ne figurant pas déjà dans la matrice M.

► Calcul du rang d'une matrice A :

Le rang d'une matrice A est la "taille" de la matrice inversible M la plus grande pouvant être extraite de A.

On vérifie que l'on a bien la plus grande matrice extraite de A et inversible en calculant tous ses bordants et en vérifiant qu'ils sont bien tous nuls.

d) Rang d'un système linéaire

1) Définition

Soit (S) le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On définit la matrice du système linéaire (S) par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système linéaire (S) est équivalent à : $AX = B$ où A est la matrice définie ci-dessus, X le vecteur de \mathbb{K}^n défini par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et B le vecteur de \mathbb{K}^n défini par :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice du système linéaire (S) est donnée par :

$$rg(S) = rg(A).$$

2) Théorème

1) Le système linéaire (S) admet des solutions si et seulement si $B \in \text{Im}A$.

2) Si $B \in \text{Im}A$, alors :

- Si x_0 est une solution particulière, l'ensemble des solutions de (S) est donné par :

$$\{x_0 + z \text{ où } z \in \ker A\},$$

avec :

$$\dim \ker A = p - rg(A),$$

où p désigne le nombre d'inconnues du système linéaire (S).

- Si A n'est pas injective, l'ensemble des solutions de (S) est infini.

3) Cas d'une matrice A carrée ($n = p$) :

► Théorème

- Si $\det A \neq 0$, alors (S) admet une solution unique (Le système est alors « un système de Cramer »).

- Si $\det A = 0$, alors

ou bien (S) n'a pas de solution.

ou bien (S) a une infinité de solutions.

4) Formules de Cramer.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

La matrice de ce système linéaire est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ce système linéaire admet pour solution :

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; x_2 = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\dots; x_n = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

et plus généralement :

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & \overset{k^{\text{e}}}{\text{ligne}} \downarrow b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$



POLYVALENT
CORPORATION

2. Énoncés des exercices

Exercice 1

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Vérifier que :

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 0 \\ -17 & -1 & 0 & -7 \\ 15 & 0 & 3 & 9 \\ 17 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

et que :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 3\alpha - 18$$

Éléments de cours

\mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne.

Limite

Soient $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in \bar{A}$.

On dit que la limite suivant A de f en X_0 existe et vaut L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall X \in A, \|X - X_0\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(X) - L\| \leq \varepsilon.$$

On note :

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} f(X) = L \text{ ou } \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L \text{ s'il n'y a pas de confusion possible.}$$

Théorème 1

La limite d'une fonction en un point, lorsqu'elle existe, est unique.

Continuité

Soient $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in A$.

On dit que f est continue en X_0 si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$.

C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall X \in A, \|X - X_0\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(X) - f(X_0)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2

Soient $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application, et $X_0 \in A$.

On pose : $f = (f_1, \dots, f_p)$, les coordonnées de f par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^p .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue en X_0 ;
- (ii) f_1, \dots, f_p sont continues en X_0 .

Théorème 3

Soient $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}$ trois applications, et $X_0 \in A$.

On suppose que f , g et λ sont continues en X_0 .

Alors, $f + g$ et λf sont continues en X_0 .

Théorème 4

Soient $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications, et $X_0 \in A$.

On suppose que f et g sont continues en X_0 et $g(X_0) \neq 0$.

Alors $\frac{f}{g}$ est continue en X_0 .

► Continuité dans une direction

Soient A une partie de \mathbb{R}^n , et f une application de A vers \mathbb{R}^p .

On considère $\vec{X}_0 \in A$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, et on pose :

$$B = \{\vec{X} \in A / \exists t \in \mathbb{R}, \vec{X} = \vec{X}_0 + t \vec{u}\}.$$

On dit que f est continue en \vec{X}_0 dans la direction \vec{u} si : $\lim_{\substack{\vec{X} \rightarrow \vec{X}_0 \\ \vec{X} \in B}} f(\vec{X}) = f(\vec{X}_0)$.

C'est-à-dire : $\lim_{t \rightarrow 0} f(\vec{X}_0 + t \vec{u}) = f(\vec{X}_0)$.

► Théorème 5

Si f est continue en \vec{X}_0 , alors f est continue en \vec{X}_0 dans toute direction.

La réciproque du théorème 5 est fautive.

► Continuité par rapport à une variable

Soient A une partie de \mathbb{R}^n , f une application de A dans \mathbb{R}^p , et $\vec{X}_0 \in A$.

On désigne par $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

On dit que f est continue en \vec{X}_0 par rapport à la variable x_i si f est continue en \vec{X}_0 dans la direction $\vec{\varepsilon}_i$.

► Dérivée suivant un vecteur

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

On considère $\vec{X}_0 \in A$, et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$.

On dit que f admet une dérivée suivant \vec{u} en \vec{X}_0 si :

$$\exists \vec{L} \in \mathbb{R}^p / \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{X}_0 + t \vec{u}) - f(\vec{X}_0)}{t} = \vec{L}.$$

On note : $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\vec{X}_0) = \vec{L}$.

► Dérivée partielle

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , f une application de A dans \mathbb{R}^p , et $\vec{X}_0 \in A$.

On dit que f admet une dérivée partielle en \vec{X}_0 par rapport à la variable x_i si f est dérivable en \vec{X}_0 suivant $\vec{\varepsilon}_i$.

On note : $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(\vec{X}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{X}_0)$.

► Différentiabilité

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

On désigne par $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

On dit que f est différentiable en un point \vec{X}_0 de A , s'il existe $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :

$$\lim_{\vec{H} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{X}_0 + \vec{H}) - f(\vec{X}_0) - \ell(\vec{H})}{\|\vec{H}\|} = \vec{0}.$$

Si on pose, pour $\vec{H} \neq \vec{0}$, $\varepsilon(\vec{H}) = \frac{f(\vec{X}_0 + \vec{H}) - f(\vec{X}_0) - \ell(\vec{H})}{\|\vec{H}\|}$, alors f est différentiable en

\vec{X}_0 s'il existe $\ell \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que :

$$f(\vec{X}_0 + \vec{H}) = f(\vec{X}_0) + \ell(\vec{H}) + \|\vec{H}\| \varepsilon(\vec{H}) \quad \text{où} \quad \lim_{\vec{H} \rightarrow \vec{0}} \varepsilon(\vec{H}) = \vec{0}.$$

Dans le cas général d'une application définie sur un espace vectoriel normé E , ℓ doit être continue.

Cette condition est vérifiée pour $E = \mathbb{R}^n$, d'après le résultat de l'exercice 1.12.

► Différentielle

L'unique application linéaire ℓ (lorsqu'elle existe) vérifiant la définition d'une fonction différentiable en \vec{X}_0 est appelée différentielle de f en \vec{X}_0 et notée $d_{\vec{X}_0} f$.

► Théorème 6

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et $\vec{X}_0 \in A$.

On considère $f: A \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}$ trois applications différentiables en \vec{X}_0 . Alors $f+g$ et λf sont différentiables en \vec{X}_0 .

► Théorème 7

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , f une application de A dans \mathbb{R}^p , et $\vec{X}_0 \in A$.

On pose : $f \equiv (f_1, \dots, f_p)$, les coordonnées de f par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^p .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est différentiable en \vec{X}_0 ;
- (ii) f_1, \dots, f_p sont différentiables en \vec{X}_0 .

De plus : $\forall \vec{H} \in \mathbb{R}^n, d_{\vec{X}_0} f(\vec{H}) = (d_{\vec{X}_0} f_1(\vec{H}), \dots, d_{\vec{X}_0} f_p(\vec{H}))$.

► Théorème 8

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

Si f est différentiable en $\vec{X}_0 \in A$, alors f admet des dérivées partielles en \vec{X}_0 .

De plus :

$$\forall \vec{H} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, d_{\vec{X}_0} f(\vec{H}) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{X}_0).$$

► Théorème 9

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($1 \leq i \leq n$) existe au voisinage de $\vec{X}_0 \in A$, et est continue en \vec{X}_0 , alors f est différentiable en \vec{X}_0 .

Application de classe C^1

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

On dit que f est de classe C^1 sur A , si f est continue sur A et admet des dérivées partielles continues sur A .

Théorème 10

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

Soient B un ouvert de \mathbb{R}^p , et g une application de B dans \mathbb{R}^q .

On suppose que f est différentiable en \vec{X}_0 et g différentiable en $\vec{Y}_0 = f(\vec{X}_0) \in B$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en \vec{X}_0 et

$$d_{\vec{X}_0} g \circ f = d_{\vec{Y}_0} g \circ d_{\vec{X}_0} f.$$

Matrice jacobienne, déterminant jacobien

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , et f une application de A dans \mathbb{R}^p .

On suppose que f est différentiable en $\vec{X}_0 \in A$.

La matrice de l'application $d_{\vec{X}_0} f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p , est appelée matrice jacobienne de f en \vec{X}_0 .

On note : $J_f(\vec{X}_0)$.

Si $p = q$, le déterminant de $J_f(\vec{X}_0)$ est appelé déterminant jacobien de f en \vec{X}_0 .

Théorème 11

Soient A un ouvert de \mathbb{R}^n , f une application de A dans \mathbb{R}^p et $\vec{X}_0 \in A$.

On suppose que f est différentiable en \vec{X}_0 , et on pose $f = (f_1, \dots, f_p)$.

Alors

$$J_f(\vec{X}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{X}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{X}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\vec{X}_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\vec{X}_0) \end{pmatrix}.$$

Théorème 12 (difféomorphisme)

Soient A et B deux ouverts de \mathbb{R}^n , et f une application de A vers B .

f est un difféomorphisme de A vers B si, et seulement si :

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est différentiable en tout point de A ;
- (iii) le déterminant jacobien de f en tout point de A est non nul.

► **Théorème 13**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

On considère une application f de $[a ; b]$ dans \mathbb{R}^p .

On suppose que f est continue sur $[a ; b]$ et admet en tout point de $]a ; b[$ une dérivée majorée par $M \geq 0$; c'est-à-dire :

$$\exists M \geq 0 / \forall t \in]a ; b[, \quad \|f'(t)\| \leq M.$$

Alors

$$\|f(a) - f(b)\| \leq M(b - a).$$



POLYVALENT
CORPORATION

Les fractions rationnelles

1. Rappels de cours

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On définit alors la fraction rationnelle F par :

$$F = \frac{A}{B}.$$

a) Partie entière d'une fraction rationnelle

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle sur \mathbb{K} .

1) Il existe un unique polynôme E tel que $F = E + \frac{R}{B}$ où $R = 0$ ou $\deg R < \deg B$

(E s'appelle la partie entière de F).

2) Si la division euclidienne de A par B donne $A = BQ + R$, alors $E = Q$.

3) La partie entière de F est nulle si et seulement si $\deg A < \deg B$.

b) Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit F une fraction rationnelle sur \mathbb{C} . On suppose que F s'écrit sous la forme :

$$F = E + \frac{A}{B},$$

où E , A et B sont trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $\deg A < \deg B$.

On suppose que B admet la décomposition en éléments irréductibles suivante dans $\mathbb{C}(X)$:

$$B = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_n)^{k_n} .$$

Alors il existe une unique famille $\{a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}$ d'éléments de \mathbb{C} telle que :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^j} .$$

c) Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit F une fraction rationnelle sur \mathbb{R} . On suppose que F s'écrit sous la forme :

$$F = E + \frac{A}{B},$$

où E , A et B sont trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $\deg A < \deg B$.

On suppose que B admet la décomposition en éléments irréductibles suivante dans $\mathbb{R}(X)$:

$$B = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} (X - \alpha_2)^{k_2} \dots (X - \alpha_n)^{k_n} \times (X^2 + p_1 X + q_1)^{l_1} (X^2 + p_2 X + q_2)^{l_2} \dots (X^2 + p_m X + q_m)^{l_m} .$$

Alors il existe une unique famille $\{a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}$, une unique famille $\{b_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l_i\}$, une unique famille $\{c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l_i\}$ d'éléments de \mathbb{R} telles que :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{l_i} \frac{b_{ij} X + c_{ij}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j} .$$

► Techniques usuelles de calculs des coefficients a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} :

- Identification.
- Multiplication par $(X - \alpha)^p$ et choix de la valeur particulière $X = \alpha$.
- Calculs des limites en $+\infty$ ou $-\infty$.
- Division selon les puissances croissantes.
- Division selon les puissances décroissantes.
- Utilisation de la parité de la fraction.
- Utilisation de la formule de Taylor.
- Utilisation du conjugué dans $\mathbb{C}(X)$.

Éléments de cours

Intégrale dépendant d'un paramètre

Soient $I = [a ; b]$, et E une partie de \mathbb{R} .

Soit $f: I \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto f(t, x)$.

On considère la fonction

$$\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt.$$

$\phi(x)$ est une intégrale dépendant d'un paramètre.

Théorème 1

Si f est continue sur $I \times E$, (E étant un intervalle) alors ϕ est continue sur E .

Théorème 2

Soient $I = [a ; b]$, et J un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto f(t, x)$.

Si f est continue sur $I \times J$ et si $(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $I \times J$, alors la fonction

$$\phi: J \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

est de classe C^1 sur J .

De plus, $\forall x \in J, \phi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$.

Intégrale impropre dépendant d'un paramètre

Soient a un réel, E une partie de \mathbb{R} , et f une application de $[a ; +\infty[\times E$ dans \mathbb{R} .

On considère la fonction

$$\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t, x) dt.$$

ϕ est une intégrale impropre dépendant d'un paramètre.

► Convergence simple

On dit que l'intégrale converge simplement sur E si :

$$\forall x \in E, \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^\alpha f(t, x) dt \text{ existe et est finie.}$$

► Convergence uniforme

On dit que l'intégrale converge uniformément sur E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \geq a / \forall \alpha \geq c, \forall \beta \geq c, \sup_{x \in E} \left| \int_\alpha^\beta f(t, x) dt \right| \leq \varepsilon.$$

► Convergence normale

On suppose que pour tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ de $[a; +\infty[$ dans \mathbb{R} est localement intégrable.

S'il existe une application localement intégrable

$$g : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$$

vérifiant :

(i) $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge ;

(ii) $\forall (t, x) \in [a; +\infty[\times E, |f(t, x)| \leq g(t)$;

alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t, x) dt$ est dite normalement convergente.

► Théorème 3

La convergence normale implique la convergence uniforme.

► Théorème 4

Soient a un réel, I un intervalle de \mathbb{R} , et f une application continue de $[a; +\infty[\times I$ dans \mathbb{R} .

Si $\int_a^{+\infty} f(t, x) dt$ converge uniformément sur I , alors l'application

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t, x) dt$$

est continue sur I .

► Théorème 5

Soient a un réel, I un intervalle de \mathbb{R} , et f une application de $[a; +\infty[\times I$ dans \mathbb{R} vérifiant :

(i) $(t, x) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur $[a; +\infty[\times I$;

(ii) $\int_a^{+\infty} f(t, x) dt$ converge simplement sur I ;

(iii) $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$ converge uniformément sur I .

Alors, l'application

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^{+\infty} f(t, x) dt$$

est de classe C^1 sur I .

De plus, $\forall x \in I, \phi'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$.



POLYVALENT
CORPORATION

Éléments de cours

Intégrale généralisée sur un ensemble borné

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a ; b[$ et intégrable sur tout compact inclus dans I .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie sur I .

Si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers b , on dit que f est intégrable sur I .

On note : $\int_a^b f(t) dt = \ell$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge vers ℓ , et cette intégrale est dite généralisée ou impropre.

L'intégrale généralisée est dite divergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ n'a pas une limite finie lorsque x tend vers b .

Théorème 1

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a ; b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I .

L'intégrale de f sur I converge si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a ; b[\quad / \quad \forall (u, v) \in [c ; b[\times [c ; b[, \left| \int_u^v f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2

Soient a et b deux réels tels que : $a < b$.

L'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^r}$ converge si, et seulement si, $r < 1$.

Théorème 3

Soient f et g deux fonctions définies et positives sur $I = [a ; b[$.

On suppose que f et g sont intégrables sur tout compact inclus dans I , et que $f \leq g$.

(i) Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

(ii) Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Théorème 4

Soit f une fonction numérique positive sur $I = [a ; b[$ et intégrable sur tout compact inclus dans I .

On suppose : $\exists r \in \mathbb{R}, \exists \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim_{x \rightarrow b} (b-x)^r f(x) = \ell.$

(i) Si $r < 1$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ converge.

(ii) Si $r \geq 1$ et $\ell \neq 0$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

► Intégrale généralisée sur un ensemble non borné

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [a ; +\infty[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I .

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie sur I .

Si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que f est intégrable sur I .

On note : $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \ell.$

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge vers ℓ et cette intégrale est dite généralisée ou impropre.

L'intégrale généralisée est dite divergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ n'a pas une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème 1 reste valable pour un ensemble non borné.

► Théorème 5

Soit a un réel strictement positif.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^r}$ converge si, et seulement si, $r > 1$.

► Théorème 6

Soient f et g deux fonctions définies et positives sur $I = [a ; +\infty[$. On suppose que f et g sont intégrables sur tout compact inclus dans I , et que $f \leq g$.

(i) Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

(ii) Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

► Théorème 7

Soit f une fonction numérique positive sur $I = [a ; +\infty[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I .

On suppose : $\exists r \in \mathbb{R}, \exists \ell \in \mathbb{R} \quad / \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r f(x) = \ell.$

(i) Si $r > 1$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

(ii) Si $r \leq 1$ et $\ell \neq 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

► Convergence absolue

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I .

Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument.

► Théorème 8

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; b[$, et intégrable sur tout compact inclus dans I .

Si $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Une intégrale peut être convergente sans l'être absolument.



POLYVALENT
CORPORATION

Éléments de cours

E est un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

► Série

Soit (u_n) une suite de (E) .

Pour tout entier n , on pose : $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

S_n est appelé somme partielle, et on dit que la suite (S_n) définit la série de E de terme général u_n .

On appelle **série numérique** toute série de nombres réels.

► Convergence

Soit (u_n) une suite de E .

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) converge vers un élément S de E .

S est appelé somme de la série et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

On dit que la série de terme général u_n diverge lorsque la suite (S_n) diverge.

► Théorème 1

Soit (u_n) une suite de E . Pour que la série de terme général u_n converge, il est nécessaire mais non suffisant que la suite (u_n) converge vers 0.

► Théorème 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E .

(i) On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in K^2$, la série de terme général $\alpha u_n + \beta v_n$ converge.

(ii) On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n sont respectivement convergente et divergente.

Alors, la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

► Théorème 3

(i) La série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$, converge.

De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(ii) La série de terme général $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, diverge.

► Théorème 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques à termes positifs telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n.$$

(i) Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge

et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si la série de terme général u_n diverge, il en est de même de la série de terme général v_n et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

► Théorème 5

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques strictement positives telles que : $\exists k > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$

Alors les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

Ce résultat, est vrai, en particulier, lorsque les suites (u_n) et (v_n) strictement positives vérifient : $u_n \approx v_n.$

► Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}.$

Lorsque la série converge, sa somme est appelée somme de Riemann.

► Théorème 6

La série de Riemann converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1.$

► Théorème 7

Soit (u_n) une suite numérique à termes positifs.

(i) S'il existe $k < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ pour tout $n \geq n_0,$ alors la série de terme général u_n converge.

(ii) Si on a $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq n_0,$ alors la série de terme général u_n diverge.

► Théorème 8

Soit (u_n) une suite numérique à termes strictement positifs.

(i) S'il existe $k < 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ pour tout $n \geq n_0,$ alors la série de terme général u_n converge.

(ii) S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout $n \geq n_0,$ alors la série de terme général u_n diverge.

► Théorème 9 (Règle de D'ALEMBERT)

Soit (u_n) une suite numérique à termes strictement positifs.

On suppose : $\exists \ell \geq 0 / \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

- (i) Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge.
- (ii) Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

► Théorème 10 (Règle de CAUCHY)

Soit (u_n) une suite numérique à termes positifs.

On suppose : $\exists \ell \geq 0 / \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

- (i) Si $\ell < 1$, alors la série de terme général u_n converge.
- (ii) Si $\ell > 1$, alors la série de terme général u_n diverge.

► Série alternée

On appelle série alternée une série numérique dont le terme général u_n est de la forme :

$$u_n = (-1)^n v_n$$

où (v_n) est une suite positive.

► Théorème 11

Soit $u_n = (-1)^n v_n$ le terme général d'une série alternée telle que la suite (v_n) soit décroissante et de limite nulle.

- (i) La série de terme général u_n converge, et si

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \text{ alors : } \forall p \geq 0, S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}.$$

- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$.

► Convergence absolue

On dit que la série numérique de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

► Théorème 12

Toute série numérique absolument convergente est convergente.

Remarque

Une série peut être convergente sans l'être absolument.

Éléments de cours

► Convergence simple d'une suite de fonctions

Soit A une partie de \mathbb{R} . On dit qu'une suite (f_n) de fonctions numériques définies sur A converge simplement sur A si, pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

On définit ainsi une application f de A dans \mathbb{R} par :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$.

f est appelée la limite de la suite de fonctions (f_n) .

Bien que ce chapitre traite des suites et séries de fonctions numériques, les définitions subsistent pour les suites et séries de fonctions vectorielles.

Ainsi, si E et F sont deux espaces vectoriels réels normés et A une partie de E , on dit qu'une suite (f_n) de fonctions définies de A vers F converge simplement sur A si, pour tout élément x de A , la suite $(f_n(x))$ converge.

► Convergence uniforme

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur A .

On dit que (f_n) converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \quad x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

- (i) *Dans la définition précédente, l'entier n_0 ne dépend que de ε .*
- (ii) *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

► Théorème 1

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (f_n) une suite de fonctions numériques définies sur A .

La suite (f_n) converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

► Théorème 2

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur A .

On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur A vers une fonction f .

Alors f est continue sur A .

Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction f , alors f n'est pas nécessairement continue.

► Théorème 3

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques continues sur un intervalle $I = [a ; b]$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f .

Alors, la suite (g_n) de fonctions définies sur I par :

$$\forall x \in I, \quad g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Ainsi :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x f(t) dt.$$

► Séries de fonctions

Soient A une partie de \mathbb{R} et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A .

On appelle série de fonctions associée à la suite (u_n) , la suite de fonctions (s_n) définies sur A par :

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k,$$

où u_n est le terme général de la série de fonctions, et s_n la somme partielle.

► Convergence simple, convergence uniforme

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A .

On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge (resp. uniformément) sur A si, la suite de fonctions (s_n) converge simplement (resp. uniformément) sur A .

► Convergence normale

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (u_n) une suite de fonctions numériques définies sur A .

On dit que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur A , s'il existe une série numérique convergente de terme général v_n telle que :

$$\forall x \in A, \quad |u_n(x)| \leq v_n.$$

La convergence normale implique la convergence uniforme.

► Théorème 4

Soient A une partie de \mathbb{R} , et (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur A .

On suppose que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément vers une fonction s .

Alors, s est continue sur A .

► Théorème 5

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques continues sur un intervalle $I = [a ; b]$.

On suppose que la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur I vers s . Alors la série de fonctions de terme général v_n défini par :

$$\forall x \in I, \quad v_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt$$

converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x s(t) dt$.

Ainsi :

$$\forall x \in I, \quad \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t) dt.$$

► Théorème 6

Soit (u_n) une suite de fonctions numériques de classe C^1 sur un intervalle $I = [a ; b]$.

On suppose que :

- (i) la série de fonctions de terme général u'_n converge uniformément (resp. normalement) sur I vers φ ;
- (ii) il existe $x_0 \in I$ tel que la série numérique de terme général $u_n(x_0)$ converge (resp. absolument) vers un réel k .

Alors, la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément (resp. normalement)

sur I vers la fonction $x \mapsto k + \int_{x_0}^x \varphi(t) dt$.

Ainsi :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ est dérivable sur } I,$$

$$\text{et } \forall x \in I, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Éléments de cours

► Série entière

Soit (a_n) une suite numérique. On appelle série entière la série de fonctions de terme général $a_n x^n$.

Les réels a_n sont appelés coefficients de la série.

► Rayon de convergence

Soit (a_n) une suite numérique.

On appelle rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$, l'unique élément $r \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r$ implique que la série de terme général $a_n x^n$ converge absolument ;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > r$ implique que la série de terme général $a_n x^n$ diverge.

► Théorème 1

Soit (a_n) une suite numérique telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ est :

- (i) $r = \frac{1}{\ell}$ si ℓ est fini ;
- (ii) $r = +\infty$ si $\ell = 0$;
- (iii) $r = 0$ si $\ell = +\infty$.

► Théorème 2

Soit (a_n) une suite numérique telle que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq n_0, a_n \neq 0.$$

On suppose que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Alors, le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ est :

- (i) $r = \frac{1}{\ell}$ si ℓ est fini ;
- (ii) $r = +\infty$ si $\ell = 0$;
- (iii) $r = 0$ si $\ell = +\infty$.

Les théorèmes 1 et 2 ne sont pas toujours applicables car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existent pas nécessairement.

Par conséquent, si r est le rayon de convergence d'une série entière de coefficient a_n ,

cela n'implique pas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{r}$.

Disque de convergence

Soit $a_n x^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence r . On appelle disque de convergence de la série entière, la boule de centre 0 et de rayon r , c'est-à-dire l'intervalle $]-r ; r[$.

Toute série entière est normalement convergente sur tout compact inclus dans son disque de convergence.

Théorème 3

Soient r et r' les rayons de convergence respectifs des séries de termes généraux $a_n x^n$ et $b_n x^n$.

Posons : $\forall n \geq 0, c_n = a_n + b_n$.

Si $r < r'$, le rayon de convergence de la série entière de coefficient c_n est r .

Théorème 4

La somme d'une série entière est continue dans le disque de convergence.

Théorème 5

Soit (a_n) une suite numérique.

(i) Les séries entières de termes généraux $a_n x^n$ et $\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence r .

(ii) $\forall \alpha \in]-r ; r[, \forall \beta \in]-r ; r[, \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n x^n dx$.

Théorème 6

La série entière de coefficient a_n est de classe C^{∞} sur son disque de convergence D .

En particulier : $\forall x \in D, \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Théorème 7 - Produit de deux séries entières

Soient r un réel strictement positif, $a_n x^n$ et $b_n x^n$ les termes généraux de deux séries entières absolument convergentes de sommes f et g sur $I =]-r ; r[$.

La série entière de terme général $c_n x^n$ avec $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ converge absolument sur I et

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x) g(x).$$

Développement en série de Taylor

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0.

On appelle développement en série de Taylor de f , la série entière de terme général

$$\frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Théorème 8

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} x^n ;$

(ii) le reste de Maclaurin $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \theta \in]0 ; 1[$, tend vers 0, pour tout $x \in I$, quand n tend vers l'infini.

En particulier si : $\exists M \geq 0 \quad / \quad \forall n \geq 0, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leq M,$

alors $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$

Développements en série de Taylor des fonctions usuelles

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\forall x \in]-1 ; 1[, \forall \alpha \in \mathbb{N}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$\forall x \in]-1 ; 1], \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

► Série trigonométrique

Soient (a_n) et (b_n) deux suites numériques.

La série de fonctions de terme général $u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ est appelée série trigonométrique.

► Convention

Le terme de $u_0(t)$ est noté $\frac{a_0}{2}$ au lieu de a_0 .

► Théorème 9

Si les séries de termes généraux a_n et b_n convergent absolument, alors la série trigonométrique associée converge normalement sur \mathbb{R} .

► Théorème 10

Si la série trigonométrique converge uniformément vers f sur un intervalle de longueur 2π , alors

$$\forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

► Série de Fourier d'une fonction

Soit f une fonction numérique périodique, de période 2π et continue sur un compact de longueur 2π .

On appelle série de Fourier de f , la série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{où} \quad \forall n \geq 0, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt.$$

► Fonction réglée

Une fonction numérique définie sur un intervalle I est dite réglée si elle admet, en tout point de I , une limite à droite et une limite à gauche.

► Théorème 11

Toute fonction numérique réglée sur un compact est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

► **Théorème 12**

Soit f une fonction numérique réglée définie sur $[0 ; 2\pi]$.

Alors, le terme général u_n de la série de Fourier de f tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

► **Théorème 13**

Soit f une fonction numérique continue sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , admettant en tout point de \mathbb{R} une dérivée à gauche et une dérivée à droite.

Alors la série de Fourier de f converge, et sa somme est f .

► **Dérivabilité d'une fonction réglée**

Une fonction réglée f définie sur un intervalle I est dérivable à droite et à gauche en tout point x de I si :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t}$$

sont finies.

Rappelons que : $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ et $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$.

► **Théorème 14**

Soit f une fonction numérique réglée définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , et dérivable à droite et à gauche en tout point de \mathbb{R} .

Alors la série de Fourier de f converge, et sa somme, pour tout réel x , est :

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Suites numériques

2.1 Introduction

Une *suite numérique* est une application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, qui, à tout entier naturel n , fait correspondre le nombre réel $f(n)$. On pose $x_n = f(n)$ et on désigne la suite (numérique) par (x_n) .

2.2 Suites bornées

Définition 2.1 Une suite (x_n) est dite *minorée*, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $n \in \mathbb{N}$ implique $a \leq x_n$.

Définition 2.2 Une suite (x_n) est dite *majorée*, s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \leq b$.

Définition 2.3 Une suite (x_n) minorée et majorée est dite *bornée*.

Proposition 2.4 (x_n) bornée $\iff \exists c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq c$.

2.3 Limite d'une suite

Définition 2.5 Une suite (x_n) est dite *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}$ ou tout simplement que (x_n) converge vers x , si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, on peut associer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon$ implique $|x_n - x| \leq \varepsilon$. On écrit alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Lorsque la limite d'une suite existe, elle est unique.

Définition 2.6 Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Exemple 2.7 $\forall a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Exemple 2.8 $\forall a > 0$, la suite $(x_n = a^n)$ converge vers 0 si $|a| < 1$ et diverge si $|a| > 1$.

Propriétés

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

Alors,

1) Linéarité. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y.$$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = xy.$

3) Si $y \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = |x|.$

Proposition 2.9 Toute suite convergente est bornée.

Proposition 2.10 Supposons que les deux suites (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers x et y et qu'il existe un entier $n_0 \geq 0$ pour lequel $n \geq n_0$ implique $x_n \leq y_n$. Alors, $x \leq y$.

Proposition 2.11 Soit (x_n) une suite bornée et (y_n) une suite qui converge vers 0. Alors, la suite $(x_n y_n)$ converge vers 0.

Proposition 2.12 (Théorème des deux gendarmes) Soit (x_n) , (u_n) et (v_n) trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- 1) les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ ;
- 2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 : u_n \leq x_n \leq v_n$.

Alors, la suite (x_n) converge vers ℓ .

Proposition 2.13 (Critère de d'Alembert) Soit (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{R}^* pour laquelle la limite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$$

existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers 0 tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

Proposition 2.14 (Critère de Cauchy) Soit (x_n) une suite pour laquelle la limite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$$

existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers 0 tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

2.4 Limites infinies

Parmi toutes les suites qui divergent, nous distinguerons celles dont la limite est infinie.

Définition 2.15 On dit que la suite (x_n) *tend vers* $-\infty$, si à tout $\alpha \in \mathbb{R}_-$, on peut associer $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\alpha$ implique $x_n \leq \alpha$. On écrit alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty.$$

Définition 2.16 On dit que la suite (x_n) *tend vers* $+\infty$, si à tout $\beta \in \mathbb{R}_+$, on peut associer $n_\beta \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\beta$ implique $x_n \geq \beta$. On écrit alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

Exemple 2.17 Soit $x_n = a_0 + a_1n + \dots + a_p n^p$ et $y_n = b_0 + b_1n + \dots + b_q n^q$ avec $a_p, b_q \neq 0$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ \sigma \infty & \text{si } p > q, \sigma \text{ signe de } \frac{a_p}{b_q}. \end{cases}$$

2.4.1 Propriétés

$$1) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ (y_n) \text{ bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \\ (y_n) \text{ bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$

$$3) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ \exists k \geq 0 \text{ t.q. } \forall n \geq k : y_n \geq x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty.$$

$$4) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \\ \exists k \geq 0 \text{ t.q. } \forall n \geq k : y_n \leq x_n \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty.$$

$$5) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ \exists \gamma \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\gamma \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_\gamma : y_n \geq \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = +\infty.$$

- 6) $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \\ \exists \gamma \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\gamma \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_\gamma : y_n \geq \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n y_n = -\infty.$
- 7) $\left. \begin{array}{l} (x_n) \text{ bornée} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$
- 8) $\left. \begin{array}{l} \exists \xi \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\xi \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_\xi : x_n \geq \xi \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : y_n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$
- 9) $\left. \begin{array}{l} \exists \xi \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n_\xi \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_\xi : x_n \geq \xi \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : y_n < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$

Proposition 2.18 Soit (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{R}^* telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = +\infty.$$

Alors, la suite (x_n) diverge.

2.4.2 Suites monotones

Définition 2.19 Une suite (x_n) est dite **croissante** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \leq x_{n+1}$.

Définition 2.20 Une suite (x_n) est dite **strictement croissante** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n < x_{n+1}$.

Définition 2.21 Une suite (x_n) est dite **décroissante** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n \geq x_{n+1}$.

Définition 2.22 Une suite (x_n) est dite **strictement décroissante** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n > x_{n+1}$.

Définition 2.23 Une suite (x_n) est dite **constante** si $n \in \mathbb{N}$ implique $x_n = x_{n+1}$.

Proposition 2.24 Toute suite croissante et majorée converge.

Proposition 2.25 Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Proposition 2.26 Toute suite décroissante et minorée converge.

Proposition 2.27 Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Proposition 2.28 (Théorème des suites adjacentes) Soit (x_n) une suite croissante et (y_n) une suite décroissante telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

Alors,

$$1) \forall n \in \mathbb{N} : x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0.$$

2) (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite.

Proposition 2.29 (Théorème de Stolz) Soit (x_n) et (y_n) deux suites qui vérifient les propriétés suivantes :

1) (y_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$;

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$.

Exemple 2.30 La suite $(x_n = (1 + \frac{1}{n})^n)$ est strictement croissante et majorée par 3. Par définition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exemple 2.31 La suite $(x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!})$ est strictement croissante et elle converge aussi vers e .

Exemple 2.32 La suite $(x_n = \sqrt[n]{n})$ est strictement décroissante pour $n \geq 3$ et minorée par 1. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$



POLYVALENT

2.5 Suites de Cauchy

Définition 2.33 Une suite est dite *de Cauchy* si à tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut associer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geq n_\varepsilon$ impliquent $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$.

Proposition 2.34 Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si elle converge.

2.6 Sous-suites

Définition 2.35 Si (n_k) est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on dit que (x_{n_k}) est une *sous-suite* ou encore *suite extraite* de la suite (x_n) .

Proposition 2.36 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée (x_n) , on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge.

Proposition 2.37 Si une suite (x_n) converge vers x , toutes ses sous-suites convergent vers x .

2.7 Limite supérieure

Définition 2.38 Soit (x_n) une suite majorée. A partir de cette suite, on peut définir une nouvelle suite (y_n) en posant

$$y_n = \sup \{x_k : k \geq n\} .$$

La suite (y_n) est décroissante. Par définition, sa limite est appelée la **limite supérieure** de la suite (x_n) et on la note par $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Lorsque (x_n) n'est pas majorée, on pose $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Proposition 2.39 De toute suite (x_n) , on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Proposition 2.40 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$.

Proposition 2.41 Soit

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|x_n|} .$$

Alors, si $\rho < 1$ la suite (x_n) converge vers 0.

Propriétés

1) $\forall \lambda > 0 :$
$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \lambda x_n = \lambda \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n .$$

2)
$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n .$$

3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ avec $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) = x + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n .$$

4) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \geq 0$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n y_n) = x \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n .$$

1. Sujet n° 1

a) Énoncé

Exercice 1

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)}$$

Exercice 2

Calculer le *PGCD* et le *PPCM* des deux polynômes suivants:

$$P_1 = X^4 + 2X^3 - 8X^2 - 18X - 9; P_2 = X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 36X + 27.$$

Exercice 3

On considère le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = a \\ -4x + 3y + bz = -2 \end{cases}, (a, b) \in \mathbb{R}.$$

1) Étudier l'existence de solution en fonction des valeurs des paramètres a et b .

Dans le cas où le système admet des solutions, on calculera ces solutions par la méthode de Cramer.

- 2) Dans le cas où $a = 2$, retrouver le résultat de la question précédente, mais cette fois en utilisant la méthode de Gauss.

Exercice 4

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par:

$$f(x, y, z) = (3x - y + z, x + 2y - z, x - 5y + 3z).$$

- 1) Déterminer la matrice A de f par rapport à la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .
- 2) Calculer $\det A$. L'application f est-elle bijective?
- 3) Déterminer une base et la dimension de $\ker F$.
- 4) On considère les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.
 - a) Montrer que le système $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice des applications suivantes:

$$f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}'),$$

$$f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}),$$

$$f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}').$$

Exercice 5

- 1) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

- 2) Déterminer le rang de la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel \mathbb{R}^4 engendré par la famille de vecteurs :

$$\{v_1 = (3, 2, 2, 6); v_2 = (2, 3, 2, 4); v_3 = (2, 2, 3, 9);$$

$$v_4 = (4, 2, 1, 3); v_5 = (3, 3, 1, 1)\}.$$

2) Corrigé du sujet n° 1

Exercice 1

La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F(X) = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{(X-1)^3} + \frac{DX+E}{X^2+1}.$$

En multipliant cette relation par $(X-1)^3$ puis en prenant la valeur $X=1$, on trouve $C = \frac{1}{2}$.

De la même façon, en multipliant par (X^2+1) puis en prenant la valeur $X=i$, on

trouve $Di + E = \frac{1}{(i-1)^3} = \frac{1-i}{4}$, soit $D = \frac{-1}{4}$ et $E = \frac{1}{4}$.

En prenant $\lim_{z \rightarrow +\infty} z \times F(X) = 0 = A + D$, on obtient : $A = \frac{1}{4}$.

Enfin, en prenant la valeur particulière $X=0$, on trouve : $-A + B - C + E = 0$, soit $B = \frac{-1}{2}$.

Exercice 2

Calcul du PGCD :

Utilisons l'algorithme d'Euclide :

Les divisions euclidiennes successives donnent :

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^3 - 8X^2 - 18X - 9 &= 1 \times (X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 36X + 27) \\ &+ (6X^3 - 2X^2 - 54X + 18), \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} &X^4 - 4X^3 - 6X^2 + 36X + 27 \\ &= (6X^3 - 2X^2 - 54X + 18) \left(\frac{1}{6}X - \frac{11}{18} \right) + \left(\frac{16}{9}X^2 - 16 \right), \end{aligned}$$

et enfin :

$$6X^3 - 2X^2 - 54X + 18 = \left(\frac{16}{9}X^2 - 16\right)\left(\frac{27}{8}X - \frac{9}{8}\right) + 0.$$

Le *PGCD* de P_1 et P_2 est donc le dernier reste non nul et normalisé dans les divisions euclidiennes successives précédentes :

$$PGCD(P_1, P_2) = X^2 - 9.$$

Calcul du *PPCM* :

Le polynôme $X^2 - 9$ est un diviseur commun à P_1 et P_2 :

$$\begin{cases} P_1 = (X^2 - 9)(X^2 + 2X + 1) \\ \quad = (X - 3)(X + 3)(X + 1)^2 \\ \\ P_2 = (X^2 - 9)(X^2 - 4X + 3) \\ \quad = (X - 3)(X + 3)(X - 1)(X - 3) \\ \quad = (X - 3)^2 (X + 3)(X - 1). \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$PPCM(P_1, P_2) = (X - 3)^2 (X + 3)(X + 1)^2 (X - 1).$$

Exercice 3

1) Intéressons-nous dans un premier temps au système linéaire :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = a. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire est donné par :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Cherchons les solutions de ce système linéaire en utilisant les formules de Cramer.

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{10} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1+3a}{10} \\ y = \frac{-1}{10} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = \frac{8+4a}{10} = \frac{4+2a}{5} \\ z = \frac{-1}{10} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = \frac{15-5a}{10} = \frac{3-a}{2}. \end{cases}$$

Il reste à voir si cette solution trouvée vérifie aussi la quatrième équation du système linéaire.

Calculons pour cela :

$$\begin{aligned} & -4\left(\frac{1+3a}{10}\right) + 3\left(\frac{4+2a}{5}\right) + b\left(\frac{3-a}{2}\right) \\ = & \frac{-4-12a+24+12a+15b-5ab}{10} \\ = & \frac{20+15b-5ab}{10}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\frac{20+15b-5ab}{10} = -2$$

$$\Leftrightarrow 20+15b-5ab = -20$$

$$\Leftrightarrow 15b-5ab = -40$$

$$\Leftrightarrow 3b-ab = -8.$$

Le système admet donc des solutions si et seulement si $3b-ab+8=0$.

2) Prenons $a=2$.

Le système linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ -x + 2y - z = 2 \\ -4x + 3y + bz = -2. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode de Gauss donne successivement :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 4 \\ -4x + 3y + bz = -2, \end{cases}$$


c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y - 2z = 7 \\ 5y = 8 \\ 5y - (b + 4)z = 10, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y - 2z = 7 \\ 2z = 1 \\ -(b + 2)z = 3, \end{cases}$$

ou encore :


$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y - 2z = 7 \\ 6z = 3 \\ -(b + 2)z = 3. \end{cases}$$

POLYVALENT CORPORATION

Deux cas se présentent suivant que $-(b + 2) = 6$ ou $-(b + 2) \neq 6$ c'est-à-dire suivant que $b = -8$ ou $b \neq -8$.

- 1^o cas : $b = -8$:

Dans ce cas, la solution du système linéaire est donnée par :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ y = \frac{8}{5} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 2^o cas : $b \neq -8$:

Dans ce cas, le système linéaire n'admet pas de solutions.

Exercice 4

1) La matrice A de f par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^3 est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Calculons $\det A$:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -14 & -5 & 3 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \\ -14 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -14 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit que l'application f n'est pas bijective.

3) Déterminons une base de $\ker f$:

Soit $u(x, y, z) \in \ker f$. On a alors:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire par la méthode de Gauss donne successivement :

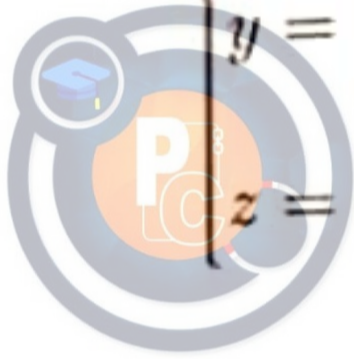
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \\ 3x - y + z = 0, \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -7y + 4z = 0 \\ -7y + 4z = 0. \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x = \frac{-10}{4}z \\ y = \frac{7}{4}z \\ z = z \end{cases}, z \in \mathbb{R}.$$



POLYVALENT
CORPORATION

Une base de $\ker f$ est donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a, de plus, $\dim \ker f = 1$.

4) a) Posons P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que cette matrice est inversible :


$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

On en déduit que le système $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Tout d'abord, calculons l'inverse de la matrice P précédemment définie :


$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de l'application $f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}')$:

La matrice de f relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est donnée par :

$$A_1 = AP = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de l'application $f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$:

La matrice de f relativement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} est donnée par :

$$A_2 = P^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & -7 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminons la matrice de l'application $f : (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}')$:


La matrice de f relativement à la base \mathcal{B}' est donnée par :

$$A_3 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

1) On a :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$


POLYVALENT CORPORATION

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

2) On a vu que :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0,$$

donc le rang de A vérifie :

$$\text{rg}(A) \geq 3.$$

Examinons les bordants :

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}, L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$



POLYVALENT
CORPORATION

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 13 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 13 & 7 \end{vmatrix}, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}, L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}, L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 13 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 13 & 7 \end{vmatrix}, C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 13 & 7 \end{vmatrix}, C_2 \leftarrow C_2 - 3C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -14 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -7 & -14 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Le rang de cette matrice A est : $rg(A) = 3$.

1) Les coordonnées de ces vecteurs sont les colonnes de la matrice A précédemment étudiée.

On a vu que $rg(A) = 3$, donc $\dim \text{vect} \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = 3$.

1

**COURS DE PHYSIQUE
AVEC EXERCICE
D'APPLICATION**



**POLYVALENT
CORPORATION**

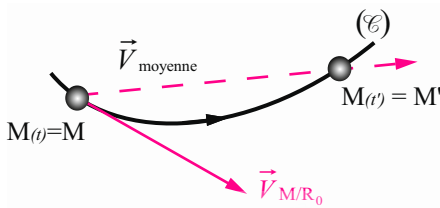
1 Cinématique du point matériel

1. EN QUELQUES MOTS...

Le mot cinématique vient du grec « *kinêma* » qui signifie mouvement. La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps, indépendamment des causes qui les produisent.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Vitesse moyenne



La vitesse moyenne représente la distance parcourue par un mobile M pendant le temps de parcours. Soit un point M occupant à l'instant t la position $M = M_{(t)}$ et à l'instant t' (avec $t' > t$) la position $M' = M_{(t')}$ sur la trajectoire orientée (\mathcal{C}) , alors la vitesse moyenne du point M entre les instants t et t'

$$\text{est : } \vec{V}_{\text{moyenne}} = \frac{\overline{MM'}}{t' - t} = \frac{\overline{OM}_{(t')} - \overline{OM}_{(t)}}{t' - t},$$

où le point O est l'origine de l'espace de référence à partir duquel la vitesse moyenne du point M est déterminée.

b) Vitesse instantanée

La **vitesse instantanée** est la limite de \vec{V}_{moyenne} lorsque t' tend vers t . Posons $t' = t + \delta t$ (avec δt variation infinitésimale de t), la vitesse instantanée du point M s'écrit alors :

$$\vec{V}_{(t)} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\overline{MM'}}{t' - t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{OM}_{(t + \delta t)} - \overline{OM}_{(t)}}{\delta t} = \frac{d\overline{OM}_{(t)}}{dt}$$

La vitesse instantanée d'un point M est donc la **dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overline{OM}_{(t)}$** . C'est un vecteur toujours **tangent à la trajectoire** du point M et dirigé dans le sens du mouvement du point M sur (\mathcal{C}) . Par la suite, la vitesse instantanée du point M, à l'instant t , relativement à un espace de référence spatial (R_0) sera notée $\vec{V}_{M/R_0(t)}$ ou plus simplement

$$\vec{V}_{M/R_0}, \text{ telle que : } \boxed{\vec{V}_{M/R_0} = \left. \frac{d\overline{OM}_{(t)}}{dt} \right|_{R_0}}$$

c) Accélération

L'**accélération** d'un point M par rapport à un référentiel (R_0) est la **dérivée première du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps**, ou la **dérivée seconde du vecteur position par**

rapport au temps. Par la suite, l'accélération du point M, à l'instant t , par rapport à un référentiel (R_0) sera notée $\vec{a}_{M/R_0}(t)$ ou plus simplement \vec{a}_{M/R_0} , telle que :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \left. \frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d^2 \overline{OM}(t)}{dt^2} \right|_{R_0}$$

d) Expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées

Voir tableau page suivante.

3. EN PRATIQUE...

À titre d'exercice, on propose d'établir les expressions du vecteur vitesse d'un point M par rapport à (R_0) en coordonnées cylindriques (ou polaires) et en coordonnées intrinsèques, puis l'expression du vecteur accélération d'un point M par rapport à (R_0) en coordonnées intrinsèques.

► Vitesse en coordonnées cylindriques (ou polaires)

Le vecteur vitesse d'un point M correspond à la dérivée première par rapport au temps du

vecteur position par rapport à (R_0) , d'où : $\vec{V}_{M/R_0} = \left. \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(r\vec{u}_r + z\vec{k})}{dt} \right|_{R_0}$

Les vecteurs unitaire \vec{u}_r et \vec{u}_θ sont mobiles, donc **dépendants du temps**, par rapport à (R_0) et le vecteur unitaire \vec{k} , élément de l'axe fixe $O\vec{k}$, est **indépendant du temps (Annexe A)**.

L'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur unitaire tournant \vec{u}_r , par rapport à (R_0)

s'écrit : $\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{R_0} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ avec $\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$ vitesse angulaire du vecteur \vec{u}_r ,

autour de l'axe fixe $O\vec{k}$.



Cette relation est applicable à tout vecteur $\overline{AB}(t)$ (de norme constante) en rotation autour d'un axe (Δ) fixe avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$: $\frac{d\overline{AB}}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \overline{AB}(t)$.

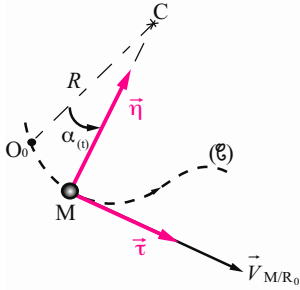
Le vecteur vitesse du point M par rapport au référentiel (R_0) en coordonnées cylindriques (ou polaires) s'écrit alors :

$$\vec{V}_{M/R_0} = \left. \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(r\vec{u}_r + z\vec{k})}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_{R_0} \vec{u}_r + r(t) \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{R_0} \vec{k} + z \underbrace{\left. \frac{d\vec{k}}{dt} \right|_{R_0}}_{= 0}$$

d'où : $\vec{V}_{M/R_0} = \underbrace{\dot{r}\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}\vec{u}_\theta}_{\text{coordonnées polaires}} + \dot{z}\vec{k}$

Vecteur position	Vecteur vitesse	Vecteur accélération
<p>Coordonnées cartésiennes (Annexe A)</p> $\vec{OM}_{(t)} = x_{(t)}\vec{i} + y_{(t)}\vec{j} + z_{(t)}\vec{k}$	$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\vec{OM}_{(t)}}{dt} \Big _{R_0} = \frac{dx_{(t)}}{dt}\vec{i} + \frac{dy_{(t)}}{dt}\vec{j} + \frac{dz_{(t)}}{dt}\vec{k}$ $\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\vec{OM}_{(t)}}{dt} \Big _{R_0} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ <p>la notation « pointée » signifiant qu'il s'agit d'une dérivée par rapport au temps vis-à-vis du référentiel (R₀). Par la suite, la notation « pointée » sera choisie préférentiellement par rapport à la notation « classique ».</p>	$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} \Big _{R_0} = \frac{d^2\vec{OM}_{(t)}}{dt^2} \Big _{R_0} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ <p>la notation du double point signifiant qu'il s'agit d'une dérivée seconde par rapport au temps vis-à-vis du référentiel (R₀).</p>
<p>Coordonnées cylindriques (ou polaires) (Annexe A)</p> $\vec{OM}_{(t)} = \underbrace{r_{(t)}\vec{u}_r}_{\text{coordonnées polaires}} + z_{(t)}\vec{k}$	$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\vec{OM}_{(t)}}{dt} \Big _{R_0} = \underbrace{\dot{r}\vec{u}_r + r_{(t)}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}_{\text{coordonnées polaires}} + \dot{z}\vec{k}$ <p>(Cf. En pratique fiche 2)</p>	$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d\vec{V}_{M/R_0}}{dt} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r_{(t)}\dot{\theta}^2 \right)\vec{u}_r + \left(r_{(t)}\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right)\vec{u}_\theta}_{\text{coordonnées polaires}} + \ddot{z}\vec{k}$
<p>Coordonnées sphériques (Annexe A)</p> $\vec{OM}_{(t)} = r_{(t)}\vec{u}_r$	$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{d\vec{OM}_{(t)}}{dt} \Big _{R_0} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{u}_\phi$	$\vec{a}_{M/R_0} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r_{(t)}\dot{\theta}^2 - r_{(t)}\dot{\phi}^2\sin^2\theta_{(t)} \\ r_{(t)}\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r_{(t)}\dot{\phi}^2\sin\theta_{(t)}\cos\theta_{(t)} \\ r_{(t)}\dot{\phi}\sin\theta_{(t)} + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta_{(t)} + 2r_{(t)}\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta_{(t)} \end{pmatrix} \Big _{(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)}$
<p>Coordonnées intrinsèques</p>	$\vec{V}_{M/R_0} = \frac{ds_{(t)}}{dt} \Big _{R_0} \vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$ <p>(Cf. En pratique fiche 2)</p>	$\vec{a}_{M/R_0} = \dot{s}\vec{\tau} + s^2\frac{\dot{\eta}}{R} = \underbrace{\frac{dV_{M/R_0}}{dt}}_{a_\tau} \vec{\tau} + \underbrace{\left(\frac{V_{M/R_0}}{R} \right)^2}_{a_\eta} \vec{\eta}$ <p>a_τ et a_η sont respectivement l'accélération tangentielle et l'accélération normale (Cf. En pratique fiche 2)</p>

► **Vitesse en coordonnées intrinsèques**



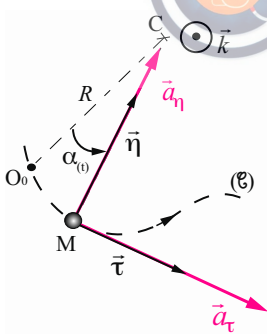
Pour certaines trajectoires (curvilignes par exemple), afin de connaître la vitesse du point M par rapport au référentiel (R_0), il est intéressant de lui affecter une base mobile, dite **base de Frenet**. Celle-ci est composée d'un vecteur tangent à la trajectoire (\mathcal{C}) noté $\vec{\tau}$ (dirigé dans le sens de la direction du déplacement du point M au cours du temps) et d'un vecteur normal à la trajectoire noté $\vec{\eta}$ (dirigé suivant le rayon de courbure de la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure).

Le long de la trajectoire (\mathcal{C}) le point M est repéré par son **abscisse curviligne**, notée $s(t)$, qui correspond à la longueur de l'arc de courbe orienté $\widehat{O_0M} = s(t)$. (le point O_0 étant un point arbitrairement choisi sur (\mathcal{C}) comme origine de l'espace de référence). La longueur de l'arc $\widehat{O_0M}$ est égale au produit du rayon de courbure R de la trajectoire de centre C par l'angle orienté $\left(\widehat{CO_0}, \widehat{CM}\right) = \alpha(t)$, soit : $s = \widehat{O_0M} = R\alpha(t)$.

La vitesse du point M en coordonnées intrinsèques, par rapport au référentiel (R_0), s'écrit

$$\text{alors : } \vec{V}_{M/R_0} = \frac{ds(t)}{dt} \Big|_{R_0} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}$$

► **Accélération en coordonnées intrinsèques**



Lorsque le point M est repéré à partir de son abscisse curviligne $s(t)$, l'accélération du point M dans la base de Frenet par rapport au référentiel (R_0) s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} \Big|_{R_0} = \frac{d(\dot{s} \vec{\tau})}{dt} \Big|_{R_0} = \vec{\tau} \frac{d\dot{s}}{dt} \Big|_{R_0} + \dot{s} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big|_{R_0}$$

Sur une portion de trajectoire (\mathcal{C}) suffisamment petite, la trajectoire du point M peut être assimilée à un cercle de centre C et de rayon de courbure R (cercle osculateur). Le vecteur $\vec{\tau}$, lié au point M est alors en rotation autour de l'axe fixe $O_0\vec{k}$ (axe normal au plan de la trajectoire, passant

par C et dirigé tel que $(\vec{\tau}, \vec{\eta}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe) avec une vitesse

$$\text{angulaire } \vec{\omega}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \vec{k} = \dot{\alpha} \vec{k}.$$

La dérivée par rapport au temps de $\vec{\tau}$ est donc : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{\tau} = \dot{\alpha} \vec{\eta}$. On peut alors écrire :

$$\vec{a}_{M/R_0} = \frac{d^2s(t)}{dt^2} \Big|_{R_0} = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s} \dot{\alpha} \vec{\eta} \text{ or } \begin{cases} \vec{V}_{M/R_0} = \dot{s} \vec{\tau} \\ s(t) = R\alpha(t) \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{M/R_0} = \ddot{s} \vec{\tau} + \dot{s}^2 \frac{\vec{\eta}}{R} = \underbrace{\frac{dV_{M/R_0}}{dt}}_{a_\tau} \vec{\tau} + \underbrace{\frac{(V_{M/R_0})^2}{R}}_{a_\eta} \vec{\eta}$$

a_τ et a_η sont respectivement l'accélération tangentielle et l'accélération normale et V_{M/R_0} la norme du vecteur vitesse \vec{V}_{M/R_0} .

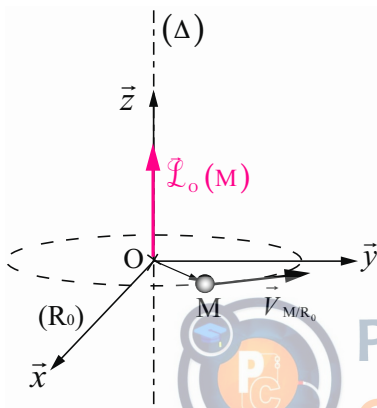
2 Théorème du moment cinétique

1. EN QUELQUES MOTS...

Le moment cinétique, noté $\vec{\mathcal{L}}$ (unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), est un concept très important en physique. Il est l'analogie de la quantité de mouvement pour les mouvements de rotation.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Moment cinétique



Considérons un point matériel M, de masse m , en rotation autour d'un axe fixe (Δ) dans le référentiel galiléen (R_0) , d'origine O, point fixé sur (Δ) . Le point M est animé d'une vitesse \vec{V}_{M/R_0} vis-à-vis du référentiel (R_0) . Le moment cinétique de M en O, noté $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$, est alors défini par :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overline{OM} \wedge m \vec{V}_{M/R_0}$$

ou

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overline{OM} \wedge \vec{p}$$

\vec{V}_{M/R_0} : vitesse de M par rapport à (R_0)

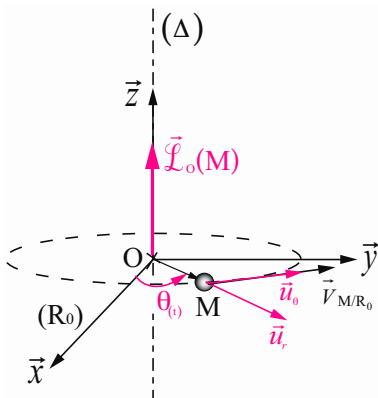
\overline{OM} : vecteur de O à M

\vec{p} : vecteur quantité de mouvement du point M

Le vecteur moment cinétique de M en O, est un vecteur perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \overline{OM} et \vec{V}_{M/R_0} , d'origine O (vecteur lié). Il est orienté suivant la règle du trièdre direct de la main droite.

Le moment cinétique en un point est donc le « moment de la quantité de mouvement, \vec{p} » en ce point.

b) Relation entre le moment cinétique et le moment d'inertie



Notons $r = OM$, la distance entre O et M, et $\theta_{(t)}$ l'angle polaire orienté tel que : $\theta_{(t)} = (\overline{Ox}, \overline{OM})$. L'expression de $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est :

de $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overline{OM} \wedge m \vec{V}_{M/R_0} = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(M) = \underbrace{r \vec{u}_r \wedge m \dot{r} \vec{u}_r}_{= \vec{0}} + r \vec{u}_r \wedge m r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(M) = m r^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad (\text{car } \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k})$$

Dans cette expression on reconnaît la quantité mr^2 qui est le **moment d'inertie**, noté \mathcal{I} , du point matériel M de masse m situé à la distance r du point O fixe sur l'axe de rotation (Δ). On peut alors écrire le moment cinétique de M en O en fonction du moment d'inertie \mathcal{I} :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M}) = \mathcal{I} \dot{\theta} \vec{k} \quad \begin{array}{l} \mathcal{I} : \text{moment d'inertie de M par rapport à O fixe sur l'axe de rotation} \\ (\Delta), \text{ tel que : } \mathcal{I} = m r^2 \\ \dot{\theta} : \text{vitesse angulaire de M par rapport à O fixe sur l'axe de rotation } (\Delta) \end{array}$$

c) Théorème du moment cinétique

La dérivée du moment cinétique d'un point matériel M, de masse m , en un point fixe O, par rapport au temps relativement au référentiel fixe supposé galiléen (R_0) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M})}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d}{dt} (\overline{\text{OM}} \wedge m\vec{V}_{\text{M}/R_0}) \right|_{R_0} \\ \Leftrightarrow \left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M})}{dt} \right|_{R_0} &= \underbrace{\left. \frac{d\overline{\text{OM}}}{dt} \right|_{R_0} \wedge m\vec{V}_{\text{M}/R_0}}_{= \vec{0}} + \overline{\text{OM}} \wedge \left. \frac{d(m\vec{V}_{\text{M}/R_0})}{dt} \right|_{R_0} = \overline{\text{OM}} \wedge m\vec{a}_{\text{M}/R_0} \\ &\text{car } \vec{V}_{\text{M}/R_0} \wedge m\vec{V}_{\text{M}/R_0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Or d'après le PFD on a : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_{\text{M}/R_0}$, d'où : $\left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M})}{dt} \right|_{R_0} = \overline{\text{OM}} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}}$.

La quantité $\overline{\text{OM}} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ représente la résultante des moments en O des forces extérieures appliquées au point M, noté : $\sum \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{ext}}} / (O)$. Le **théorème du moment cinétique** s'écrit alors :

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M})}{dt} \right|_{R_0} = \overline{\text{OM}} \wedge \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \sum \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{ext}}} / (O)}$$

Le **théorème du moment cinétique** permet d'écrire que dans un référentiel galiléen (R_0), la dérivée première par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M est égale au moment en O (fixe dans (R_0) au cours du temps) de la résultante des forces extérieures agissant sur M.

Si la résultante des moments des forces agissant sur M est nulle alors le moment cinétique du point M en O (O fixe) est constant : si $\sum \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{\text{ext}}} / (O) = \vec{0}$ alors $\vec{\mathcal{L}}_O(\text{M}) = \text{cste}$. Pour un **système isolé**, le moment cinétique d'un point M en O est une **constante du mouvement**, c'est-à-dire que le **moment cinétique de M en O (O fixe) se conserve au cours du mouvement**.

3 Intensité et tension en électrocinétique

1. EN QUELQUES MOTS...

L'électrocinétique est la partie de l'électromagnétisme traitée en utilisant des courants et des tensions. Un courant électrique correspond à un déplacement ordonné de charges électriques appelées « porteurs de charge ». L'intensité correspond au débit de ces charges dans un matériau conducteur. La tension aux bornes d'un composant électrique est une différence de potentiel entre deux points.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Intensité

Les porteurs de charges peuvent être:

- des électrons libres dans les métaux ;
- des ions (cations et anions) dans les solutions électrolytiques.

Dans un circuit électrique, l'intensité mesure le nombre de « porteurs de charges » qui traversent la section S du circuit par unité de temps.

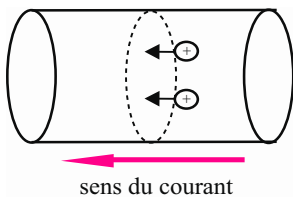
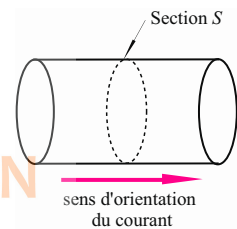
L'intensité du courant correspond au **débit de charges**.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

i : intensité du courant (A)

dq : charge élémentaire électrique traversant la section S d'un circuit (C)

dt : temps pendant lequel la surface S est parcourue par la quantité de charge dq (s)



Le courant est une grandeur algébrique : il peut être positif ou négatif.

Par convention, le courant circule dans le sens du déplacement des charges positives.

Dans un circuit électrique, on fixe le sens d'orientation du courant. Le courant circule de la borne + vers la borne - à l'extérieur du générateur, ce qui correspond à $I > 0$.

L'intensité du courant se mesure avec un **ampèremètre**, branché en série, dont le symbole est :



La valeur affichée se donne en **Ampère**, noté A, en hommage à André-Marie Ampère (1775 – 1836). Les valeurs peuvent varier de quelques milliampères à quelques ampères.

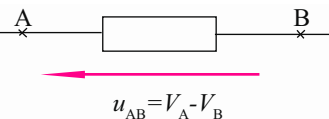
b) Tension

Dans un circuit électrique, le générateur est responsable de la mise en mouvement des porteurs de charges. L'énergie potentielle d'un porteur de charge à la sortie d'un générateur est très grande, mais diminue au fur et à mesure du circuit électrique, étant convertie en énergie thermique.

Au lieu de parler d'énergie en chaque point du circuit électrique, la notion de **potentiel électrique, noté V** , est introduite (fiche 45). Il n'est pas possible de mesurer le potentiel en un point. En revanche, une différence de potentiel entre deux points peut l'être.

Considérons les points A et B, placés de part et d'autre d'un composant électrique. La tension u_{AB} est **égale à la différence**

de potentiel (ddp) entre les points A et B : $u_{AB} = V_A - V_B$



On représente la tension u_{AB} par une flèche, **orientée de B vers A**.

Dans un circuit électrique, la tension se mesure avec un **voltmètre**, branché en **dérivation**, dont le symbole est :



Il est possible de visualiser les variations d'une tension à l'aide d'un oscilloscope. La valeur affichée se donne en **Volt**, noté V , en hommage à Alessandro Volta (1745-1827), qui réalisa de nombreux travaux sur l'électricité et inventa la première pile (1800).

Les valeurs peuvent être égales à quelques volts aux bornes d'une pile neuve, à quelques millions de volt entre les deux extrémités d'un éclair. Dans une maison, la tension au secteur fournie par EDF vaut 230 V.

c) Approximation des Régimes Quasi Stationnaires : A.R.Q.S

Comme la lumière dans un milieu transparent, les courants et les tensions électriques sont des grandeurs qui se propagent (ondes). L'intensité du courant varie donc en fonction du temps et des coordonnées d'espace. Sa vitesse de propagation est de l'ordre de la vitesse, c , de la lumière. Le temps de propagation du courant dans un circuit de longueur L , noté τ (*tau*), est donc $\tau = \frac{L}{c}$. Il faut le comparer au temps caractéristique du système, noté T (période du courant, temps de réponse...). Les phénomènes de propagation sont négligeables si $\tau \ll T$:

l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires, dite A.R.Q.S., est alors vérifiée. L'intensité et la tension ne dépendent ainsi que du temps.

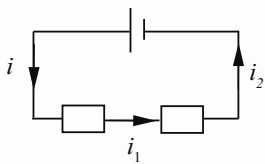
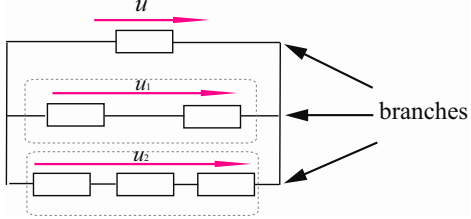
Dans la suite, nous nous placerons toujours dans le cadre de l'A.R.Q.S..

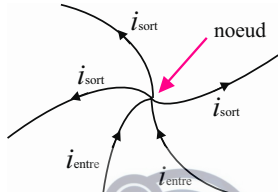
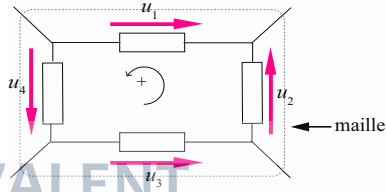
Outre les régimes transitoires, nous nous intéresserons à deux régimes permanents :

Régime	Propriétés	Notation
Régime continu	L'intensité et la tension sont constantes.	en majuscule : - intensité I - tension U
Régime sinusoïdal permanent	L'intensité et la tension sont des fonctions périodiques sinusoïdales : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$	en minuscule - intensité $i(t)$ - tension $u(t)$

I_0 : amplitude (A)
 U_0 : amplitude (V)
 ω : pulsation (rad.s⁻¹)

d) Lois vérifiées par l'intensité et la tension

Loi d'unicité de l'intensité	Loi d'unicité des tensions
 <p>L'intensité est la même en tout point d'un circuit en série : $i = i_1 = i_2$</p>	 <p>Les tensions aux bornes de branches parallèles sont égales : $u = u_1 = u_2$</p>

Lois de Kirchhoff	
Loi des nœuds	Loi des mailles ou loi d'additivité des tensions
 <p>La somme des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des courants qui en sortent : $\sum i_{\text{entree}} = \sum i_{\text{sort}}$</p> <p>Cela traduit la conservation de la charge.</p>	 <p>Dans une maille orientée, la somme des tensions est nulle : $\sum_{\text{maille}} \epsilon_i u_i = 0$ avec</p> <ul style="list-style-type: none"> $\epsilon_i = +1$ si la tension est orientée dans le sens de la maille $\epsilon_i = -1$ si la tension est orientée dans le contraire de la maille. <p>On peut donc écrire : $-u_1 + u_4 + u_3 + u_2 = 0$</p>

3. EN PRATIQUE...

- Un fil électrique en cuivre, de section droite $S = 1,0 \text{ mm}^2$, est parcouru par un courant d'intensité constante $I = 5,0 \text{ A}$ durant 10 heures. La quantité d'électricité circulant dans le fil électrique est : $|q| = I\Delta t = 5,0 \times 10 \times 60 \times 60 = 1,8 \times 10^5 \text{ C}$

Dans les métaux, les porteurs de charges sont les électrons libres, de charge négative égale à $-e$. Ainsi, $q = -1,8 \cdot 10^5 \text{ C}$. Le nombre « N » d'électrons libres s'étant déplacés est donc :

$$N = \frac{q}{-e} = \frac{-1,8 \cdot 10^5}{-1,6 \cdot 10^{-19}} \Leftrightarrow N = 1,125 \times 10^{24} \text{ électrons}$$

- Étudions le sens de déplacement des porteurs de charge dans les deux cas représentés ci-dessous :



$I = -4 \text{ A} < 0 \Rightarrow$ Le courant va de B vers A. Les porteurs de charges sont les électrons libres. Ils se déplacent en sens inverse, soit de A vers B.

$I = 7 \text{ A} > 0 \Rightarrow$ Le courant va de B vers A. Les électrons libres se déplacent en sens inverse, soit de A vers B.

• Le courant délivré par EDF est alternatif de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$. Il peut s'écrire : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$

→ Calculons la période T et la pulsation ω du courant :

$$T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow T = \frac{1}{50} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ s} \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{2,0 \times 10^{-2}} = 3,1 \times 10^2 \text{ rad.s}^{-1}$$

→ Regardons s'il est possible d'utiliser l'A.R.Q.S. au sein d'une maison ayant une installation électrique de longueur L .

L'onde se propage environ à la vitesse $v = 2,0 \cdot 10^5 \text{ km.s}^{-1}$. Son temps de propagation τ dans les fils électriques s'exprime donc : $\tau = \frac{L}{v}$. Le temps caractéristique du circuit est la période T du courant calculée précédemment. On peut se placer dans l'A.R.Q.S. lorsque $T \gg \tau$

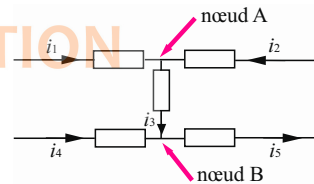
$$\Leftrightarrow T \gg \frac{L}{v} \Leftrightarrow L \ll vT \Leftrightarrow L \ll 2,0 \cdot 10^8 \times 2,0 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow L \ll 4,0 \times 10^6 \text{ m.}$$

La longueur des fils électriques étant bien inférieure à 4 000 km, on peut considérer le courant quasi-stationnaire dans une maison ou même un réseau électrique local.

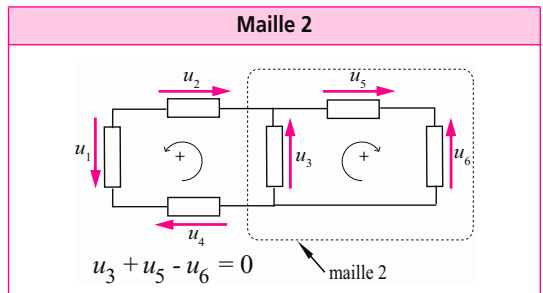
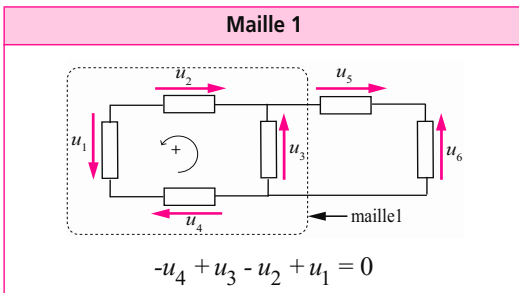
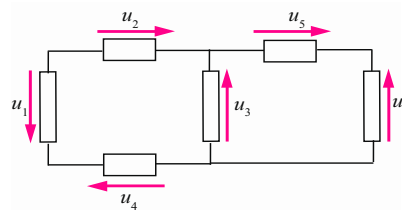
• Une portion de circuit électrique est représentée ci-contre. Cherchons une relation entre les divers courants.

La loi des nœuds s'applique :

$$\left. \begin{array}{l} \text{- nœud A : } i_1 + i_2 = i_3 \\ \text{- nœud B : } i_4 + i_3 = i_5 \end{array} \right\} \Rightarrow i_1 + i_2 + i_4 = i_5$$



• Considérons le circuit ci-contre comportant deux mailles. Dans chaque maille, il faut choisir un sens de façon arbitraire afin d'appliquer la loi des mailles.



4 Puissance instantanée

1. EN QUELQUES MOTS...

Un dipôle électrocinétique comporte une borne d'entrée et une borne de sortie. On distingue deux types de dipôles : les récepteurs et les générateurs.

- Un récepteur transforme de l'énergie électrique en une autre énergie (thermique, mécanique, lumineuse...).
 - Un générateur transforme une énergie chimique, lumineuse (ou autre) en énergie électrique.
- Pour les différencier, on regarde le signe de la puissance électrique.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

- Considérons un circuit comportant des générateurs et des récepteurs. Pour un de ces dipôles, la **puissance électrique instantanée, notée p** , est définie comme le travail électrique échangé pendant une unité de temps (fiche 7).

La puissance instantanée est égale au produit de la tension aux bornes du dipôle et de l'intensité du courant qui le traverse :

$$p(t) = u(t) i(t)$$

$p(t)$: Puissance électrique instantanée en Watt (W)
 $u(t)$: Tension aux bornes du dipôle en Volt (V)
 $i(t)$: Intensité du courant parcourant le dipôle en Ampère (A)

- Comme en thermodynamique, la puissance reçue par le dipôle est comptée positivement, tandis que celle cédée au milieu extérieur est négative. Il est possible de classer les dipôles suivant le signe de la puissance :

	Dipôle récepteur	Dipôle générateur
Puissance	Puissance reçue par le dipôle	Puissance cédée au reste du circuit
	Transforme de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie	Transforme une énergie non électrique en énergie électrique
Exemples	- moteur - lampe - conducteur ohmique - diode	- générateur basse fréquence G.B.F. - pile

Les conventions utilisées sont :

Convention récepteur	Convention générateur
Les flèches représentant u et i sont en sens inverse	Les flèches représentant u et i sont dans le même sens

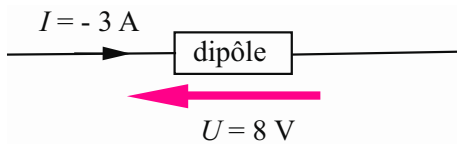
En convention récepteur,

Signe de la puissance instantanée	Positive $p(t) > 0$	Négative $p(t) < 0$
Type de dipôle	Le dipôle est un récepteur	Le dipôle est un générateur

3. EN PRATIQUE...

Plaçons-nous en régime continu. La tension et l'intensité sont constantes. La puissance électrique est donc aussi une constante.

Examinons le comportement du dipôle utilisé.



Le dipôle ci-contre est représenté en convention récepteur : la flèche de l'intensité et de la tension sont en sens contraire.

Calculons la puissance électrique :

$$P = UI$$

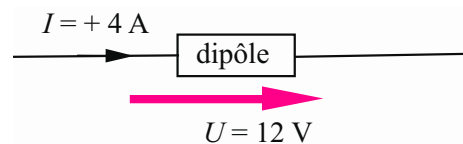
$$P = 8 \times (-3)$$

$$P = -24 \text{ W}$$

En convention récepteur, la puissance est négative.

Le dipôle considéré est donc un générateur, il fournit de l'énergie au reste du circuit.

En revanche, dans ce cas, le dipôle est en convention générateur : les flèches de tension et d'intensité sont dans le même sens.



Calculons la puissance électrique :

$$P = UI$$

$$P = 12 \times 4$$

$$P = 48 \text{ W}$$

En convention générateur, la puissance est positive.

Le dipôle considéré ici est donc un générateur.

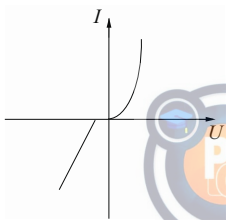
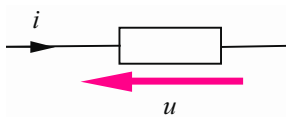
5 Dipôles électrocinétiques

1. EN QUELQUES MOTS...

Un dipôle est un composant comportant deux bornes, placé dans un circuit électrique. Dans l'A.R.Q.S. (Approximation du régime quasi-stationnaire), ces dipôles peuvent être qualifiés d'actifs ou de passifs, de linéaires ou non-linéaires, symétriques ou non-symétriques. Pour cela, il faut étudier leur caractéristique courant – tension.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Caractéristique statique courant-tension



La **caractéristique courant - tension** d'un dipôle est la courbe, en régime continu, représentant les variations de l'intensité I parcourant le dipôle en fonction de la tension U à ses bornes, soit $I = f(U)$.

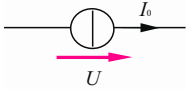
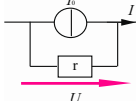
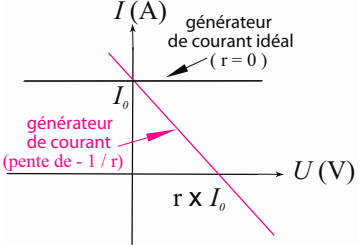
– Un dipôle est **linéaire** lorsqu'il existe une relation affine ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants entre l'intensité et la tension.

– Un dipôle est **passif** lorsque sa caractéristique courant – tension passe par l'origine, alors qu'il est **actif** si sa caractéristique ne passe pas par l'origine.

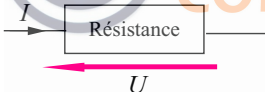
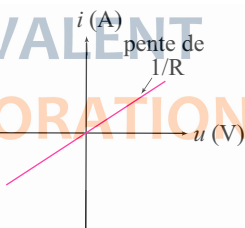
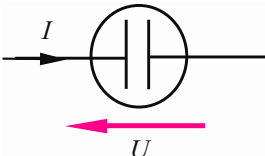
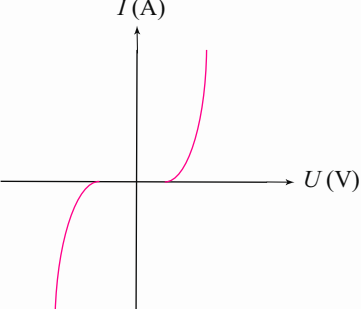
– Un dipôle est dit **symétrique** si sa caractéristique courant – tension est symétrique par rapport à O ; si ce n'est pas le cas, le dipôle est qualifié de **non-symétrique**.

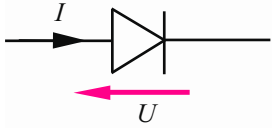
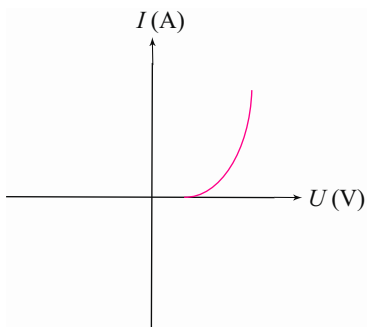
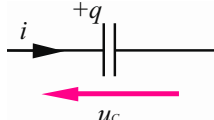
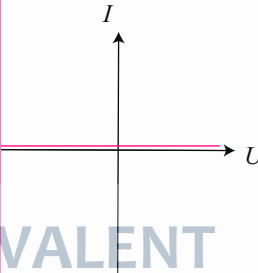
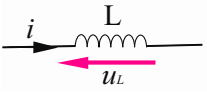
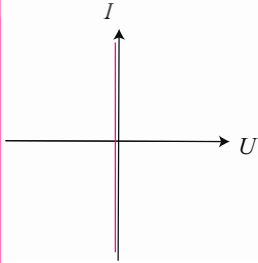
- Les générateurs de courant et de tension ont des caractéristiques courant – tension statiques.

Dipôle	Définition	Caractéristique	
Générateur de tension (modèle de Thévenin) - linéaire - actif - non-symétrique	Lorsque le générateur est idéal, la tension délivrée est constante : $U = E$ quel que soit le courant débité. Un générateur de tension réel délivre une tension $U = E - rI$. U : tension délivrée par le générateur en V E : force électromotrice (f.e.m.) en V r : résistance interne en Ω I : intensité du courant en A		
	Générateur de tension idéal :		Générateur de tension réel :

Dipôle	Définition	Caractéristique
Générateur de courant (modèle de Norton) - linéaire - actif - non-symétrique	<p>Lorsque le générateur est idéal, le courant délivré est constant : $I = I_0$ quelle que soit la tension à ses bornes.</p> <p>Un générateur de courant réel délivre un courant tel que</p> $I = I_0 - \frac{U}{r}$ <p>I_0 : courant de court-circuit en A</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Générateur de courant :</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Générateur de courant réel :</p>  </div> </div>	

- Étudions les divers dipôles récepteurs les plus utilisés en électrocinétique.

Dipôle	Définition et Schéma	Caractéristique courant tension
Conducteur ohmique noté : R unité : Ohm (Ω) - linéaire - passif - symétrique	<p>Composant qui s'oppose à la circulation du courant électrique</p> <p>Le passage du courant entraîne un échauffement de ce dipôle appelé l'effet Joule.</p> 	<p>Loi d'Ohm : $u = Ri$</p>  <p>u : Tension aux bornes de la résistance (V) i : Intensité qui parcourt la résistance (A) R : Résistance (Ω)</p>
Electrolyseur - non- linéaire - passif - symétrique	<p>Permet de réaliser des réactions chimiques en utilisant l'énergie électrique.</p> 	

Dipôle	Définition et Schéma	Caractéristique courant tension
<p>Diode à jonction</p> <ul style="list-style-type: none"> - non-linéaire - passif - non symétrique 	<p>Ne laisse passer le courant que dans un sens.</p> 	
<p>Condensateur</p> <p>noté : C</p> <p>unité : Farad (F)</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéaire - passif 	<p>Constitué de deux plaques métalliques séparées par un isolant.</p>  $q = Cu_c \Rightarrow i = C \frac{du_c}{dt}$ <p>q : Charge du condensateur (C) C : Capacité du condensateur (F) (fiche 49)</p>	 <p>Le courant est nul quelle que soit la tension constante à ses bornes.</p> <p style="text-align: center;">$I = 0$</p> <p>Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert</p>
<p>Inductance</p> <p>notée : L</p> <p>unité : Henry (H)</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéaire - passif 	<p>Constitué d'un enroulement de fil en forme de spires.</p>  $u_L = L \frac{di}{dt}$ <p>L : Inductance (H) (fiche 57)</p>	 <p>La tension à ses bornes est nulle quel que soit le courant constant la traversant</p> <p style="text-align: center;">$U = 0$</p> <p>L'inductance se comporte comme un fil.</p>

b) Caractéristique dynamique courant-tension

La caractéristique dynamique est obtenue en régime variable. Lorsque le signal est sinusoïdal de pulsation ω , la réponse des dipôles dépend de la fréquence. Cette notion est illustrée à l'aide du condensateur et de l'inductance en régime sinusoïdal. Quand $\omega \rightarrow 0$, la caractéristique dynamique tend vers la caractéristique statique.

	Condensateur	Inductance
Expression de la tension et du courant sinusoïdaux	$u_c(t) = U_m \cos(\omega t)$ $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = -C\omega U_m \sin(\omega t)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t)$ $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t)$
Caractéristique dynamique		
Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$	<p>Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert</p>	<p>L'inductance se comporte comme un fil</p>
Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$	<p>Le condensateur se comporte comme un fil</p>	<p>L'inductance se comporte comme un circuit ouvert</p>

3. EN PRATIQUE...

- Étudions différentes associations de conducteurs ohmiques.

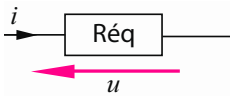
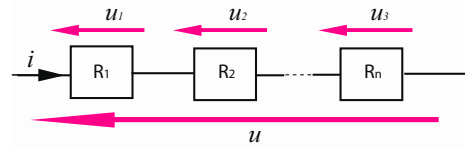
– Cherchons la valeur de la résistance équivalente à une association de résistances montées **en série**. Dans ce montage, chacune des résistances est parcourue par le même courant i .

D'après la loi d'additivité des tensions, $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

En utilisant la loi d'Ohm, on peut écrire :

$$u = (R_1 i) + (R_2 i) + \dots + (R_n i)$$

$$u = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) i$$

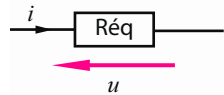
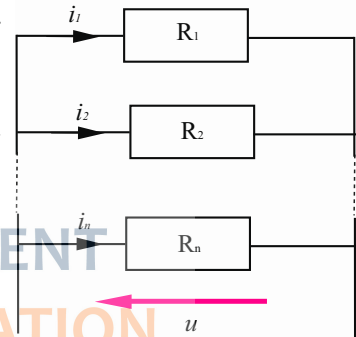


Une association de résistances montées en série peut être remplacée par une seule résistance de valeur $R_{eq} = \sum_k R_k$.

→ De la même manière, cherchons la valeur de la résistance équivalente, notée R_{eq} , à une association de résistances montées **en parallèle**. D'après la loi des nœuds, $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$. La tension aux bornes de chacune des résistances est la même, notée u .

En utilisant la loi d'Ohm, la relation devient :

$$\frac{u}{R_{eq}} = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \dots + \frac{u}{R_n} = u \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$



Une association de résistances en parallèle peut être remplacée par une seule résistance telle que $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$. En utilisant la conduc-

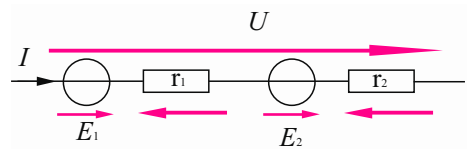
tance $G = \frac{1}{R}$, la relation devient : $G_{eq} = \sum_k G_k$.

- Considérons deux générateurs de tension montés en série.

D'après la loi d'additivité des tensions,

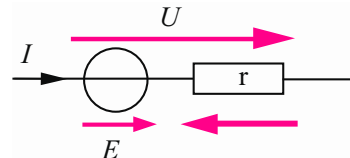
$$U = (E_1 - r_1 I) + (E_2 - r_2 I)$$

$$U = (E_1 + E_2) - (r_1 + r_2) I$$

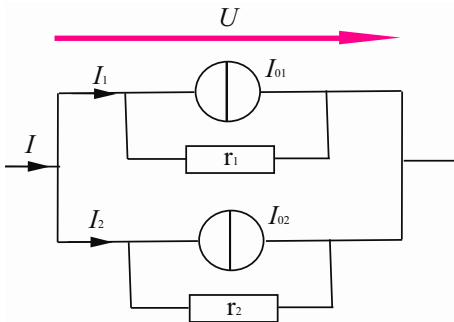


Il est donc possible d'assimiler cette association à un seul générateur de tension, avec :

$$\begin{cases} E = E_1 + E_2 \\ r = r_1 + r_2 \end{cases}$$



- Considérons deux générateurs de courant montés en parallèle. Cherchons le générateur de courant équivalent.



D'après la loi des nœuds, $I = I_1 + I_2$.
En remplaçant par le modèle de Norton, on obtient :

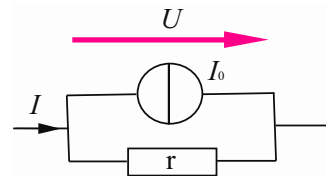
$$I = \left(I_{01} - \frac{U}{r_1} \right) + \left(I_{02} - \frac{U}{r_2} \right)$$

$$I = (I_{01} + I_{02}) - U \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Le générateur de Norton correspondant est

donc tel que :

$$\begin{cases} I_0 = I_{01} + I_{02} \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \end{cases} .$$

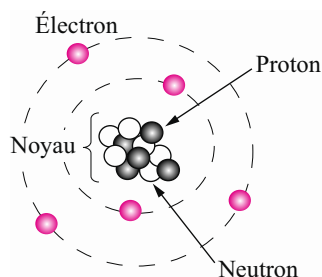


POLYVALENT
CORPORATION

6 Loi de Coulomb

1. QUELQUES MOTS...

D'un point de vue microscopique, la matière est composée d'atomes eux-mêmes composés de particules élémentaires. On entend ici par « particules élémentaires » les protons, les neutrons et les électrons, qui seront les seules « particules élémentaires » considérées par la suite. L'atome, qui est un édifice **électriquement neutre**, est constitué d'un noyau (proton + neutrons) et d'électrons qui « gravitent » autour du noyau (modèle de Bohr) (*Chimie Générale* fiche 33).



Seuls le proton et l'électron possèdent une charge électrique (ou charge électrique élémentaire), le neutron est non chargé. La **charge électrique négative de l'électron** est notée $-e$, et la **charge électrique positive du proton**, notée $+e$. Les 2 charges sont égales de signes opposés. La valeur de la **charge électrique élémentaire**, notée e , est environ égale à : $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ (unité le Coulomb, noté C).

Expérimentalement, il a été observé que les charges électriques de **même signe se repoussent** alors que celles de **signes opposés s'attirent**.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Conducteur et isolants

Selon la capacité de la matière à conduire l'électricité, il est possible de la classer en deux grandes catégories : les **conducteurs** et les **isolants**. Un matériau capable de conduire l'électricité est un matériau conducteur, en revanche lorsqu'il ne conduit pas l'électricité c'est un isolant. Un isolant se distingue d'un conducteur par le fait que ses électrons périphériques sont fortement liés au noyau (fort potentiel d'ionisation), contrairement à ceux des conducteurs qui sont libres de se déplacer dans le matériau (sous l'effet d'un champ électrique). Dans le cas des conducteurs, les électrons participant à la conduction du courant électrique sont appelés **électrons de conduction**.

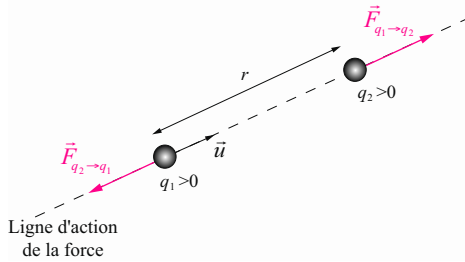
Il existe une troisième classe de matériaux, dont la physique ne sera pas abordée par la suite : les semi-conducteurs.

b) Invariance et principe de conservation des charges électriques

Contrairement à d'autres grandeurs physiques comme la vitesse ou la force, la charge électrique élémentaire est un **invariant**, c'est-à-dire que sa valeur reste inchangée quel que soit le référentiel d'étude. Cette propriété amène à énoncer le principe de conservation des charges électriques : la quantité de charges électriques produites au cours de n'importe quelle transformation est nulle (autant de charges positives que de charges négatives).

c) Loi de Coulomb

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , placées dans le vide de permittivité électrique ϵ_0 à une distance r l'une de l'autre. Pour l'exemple, on choisit arbitrairement de prendre q_1 et q_2 positives, mais le raisonnement est identique quel que soit le signe des deux charges.



La charge q_1 exerce sur la charge q_2 une **force électrostatique**, notée $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$, dirigée suivant le vecteur unitaire \vec{u} (vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique dirigé de q_1 vers q_2). Au même instant, la charge q_2 exerce sur la charge q_1 une force électrostatique, notée $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}$, dirigée en sens inverse de $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$.

Les 2 forces sont égales et opposées conformément à la 3^e loi de Newton (principe des actions réciproques). On montre que la force exercée entre les 2 charges est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance. La valeur approchée de la constante de proportionnalité K est d'environ : $K \approx 9.10^9 \text{ m.F}^{-1}$. On pose généralement : $K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$ (ce qui permet de définir ϵ_0). La loi de Coulomb s'écrit alors :

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = -\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}$$

$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$: force électrostatique de q_1 sur q_2 (N)

q_1, q_2 : charges électriques (C)

ϵ_0 : permittivité électrique du vide (F.m^{-1})

($\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$)

r : distance entre q_1 et q_2 (m)

\vec{u} : vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique

Lorsque les charges sont de même signe alors la force électrostatique est **répulsive**, si elles sont de signes opposés alors la force électrostatique est **attractive**.

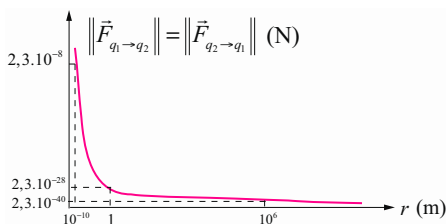


Lorsque le milieu considéré n'est pas le vide, il suffit d'introduire la **permittivité du milieu** considéré, notée ϵ , à la place de la permittivité électrique du vide dans la loi de Coulomb. On pose généralement : $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r est la **permittivité relative** du milieu considéré (grandeur sans dimension). Pour l'air $\epsilon_r = 1,00058$, de sorte que l'électrostatique étudiée dans l'air se confond pratiquement avec l'électrostatique étudiée dans le vide.

Par la suite, nous traiterons uniquement **l'électrostatique et la magnétostatique dans le vide**.

3. EN PRATIQUE...

Traçons la norme de la force électrostatique en fonction de la distance r entre 2 charges ponctuelles q_1 et q_2 . On choisit : $q_1 = q_2 = 1,6.10^{-19} \text{ C}$



La force électrostatique décroît en « $\frac{1}{r^2}$ », c'est une force dont la portée varie de l'Angstrom (10^{-10} m) jusqu'à théoriquement l'infini.

7 Champ électrostatique

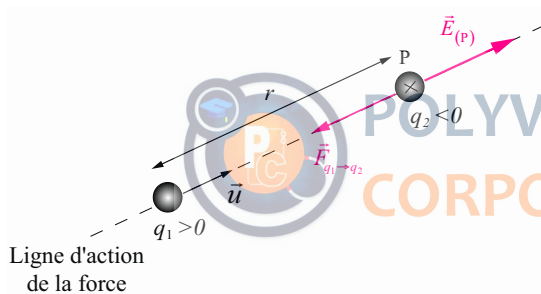
1. EN QUELQUES MOTS...

Toute charge électrique « perturbe » l'espace environnant en créant **en tout point de l'espace** un champ appelé champ électrique. Lorsque la distribution de charges est indépendante du temps (régime permanent) alors le champ créé est appelé **champ électrostatique** (unité le Volt par mètre, noté V.m^{-1}).

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Par définition, si une charge ponctuelle q est placée en un point P de l'espace où règne un champ électrostatique, noté $\vec{E}_{(P)}$, alors la charge est soumise à une force électrostatique, notée \vec{F} , telle que : $\vec{F} = q \vec{E}_{(P)}$.



L'expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q_1 en un point P de l'espace où se trouve une charge q_2 , est établie à partir de la notion de force électrostatique. Prenons deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , placées dans le vide de permittivité électrique ϵ_0 à une distance r l'une de l'autre, telle que : $q_1 > 0$ et $q_2 < 0$ (le choix du signe des charges est arbitraire).

La charge q_1 exerce sur la charge q_2 une force électrostatique, notée $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$, dirigée en sens inverse du vecteur unitaire \vec{u} (vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique et dirigé de q_1 vers q_2), tel que : $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$. En identifiant cette relation

avec la relation générale donnant la force électrostatique, \vec{F} , agissant sur une charge q , placée en un point P de l'espace, en fonction du champ électrostatique $\vec{E}_{(P)}$: $\vec{F} = q \vec{E}_{(P)}$, on obtient : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}$, où \vec{E} est le champ électrostatique créé par la charge q_1 à l'endroit où se trouve la charge q_2 .

D'une manière générale, le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q en un point P de l'espace à la distance r de q est :

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{E}_{(P)}$: champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q à la distance r de q ($V.m^{-1}$)

q : charge électrique (C)

ϵ_0 : permittivité électrique du vide ($F.m^{-1}$)

r : distance entre q et P (m)

\vec{u} : vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique

• Propriétés :

- Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q en un point P de l'espace, à la distance r de la charge, est inversement proportionnel au carré de la distance entre q et P.
- Il est porté par la droite passant par q et P, on dit alors que le champ électrostatique est **radial**.
- Le champ électrostatique est **non défini au point où se trouve la charge ponctuelle q** , car lorsque $r \rightarrow 0$, alors $\vec{E}_{(r \rightarrow 0)} \rightarrow \infty$.

b) Champ électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles

Si on dispose en n points M_i de l'espace une charge ponctuelle q_i , celles-ci vont créer en un point P, distant de r_i de chaque point M_i , un champ électrostatique résultant tel que :

$$\vec{E}_{(P)} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i .$$

Le champ électrostatique total est la **somme vectorielle** des champs \vec{E}_i créés en P par les différentes charges q_i : c'est le principe de superposition. Ainsi :

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i .$$

c) Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

À l'échelle macroscopique, les particules chargées sont très nombreuses et forment une sorte de « continuum de gaz électrique », ce qui permet d'introduire la notion de densité de charges.

• Distribution linéique de charges (méthode)

Dans le cas d'une distribution linéique de charges, les charges ponctuelles sont réparties sur une courbe (\mathcal{C}) (sur le schéma les charges sont choisies positives de façon arbitraire).

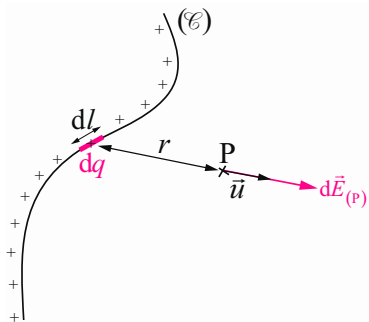
La répartition linéique des charges est caractérisée en chaque point de (\mathcal{C}), par la **densité linéique de charge**, notée λ , telle que :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

où dq est la charge élémentaire contenue sur l'élément

de longueur dl . En un point P de l'espace, situé à la distance r de la courbe (\mathcal{C}), l'élément de longueur dl portant la charge élémentaire dq crée un champ électrostatique élémentaire, noté $d\vec{E}_{(P)}$, tel

$$dq \text{ crée un champ électrostatique élémentaire, noté } d\vec{E}_{(P)}, \text{ tel que : } d\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \text{ (l'orientation du vecteur unitaire } \vec{u} \text{ est arbitraire).}$$



Le champ électrostatique total est alors obtenu par intégration du champ électrostatique élémentaire précédent, tel que :

$$\vec{E}_{(P)} = \int_{(\mathcal{C})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{E}_{(P)}$: champ électrostatique créé par une densité de charge linéique à la distance r ($V.m^{-1}$)
 λ : densité linéique de charge ($C.m^{-1}$)
 dl : élément de longueur contenant la charge élémentaire dq (m)
 ϵ_0 : permittivité électrique du vide ($F.m^{-1}$)
 r : distance entre dl et le point P (point où le champ est mesuré) (m)
 \vec{u} : vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique



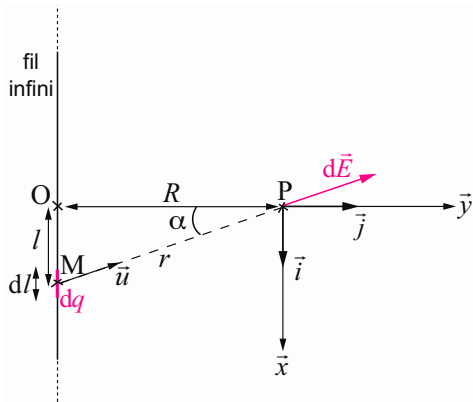
En pratique il faudra projeter chaque vecteur $d\vec{E}$ suivant la direction du champ résultant avant d'intégrer.

- Distribution surfacique de charges et distribution volumique de charges (résultats)

Distribution surfacique de charges	Distribution volumique de charges
Densité surfacique de charge :	Densité volumique de charge :
$\sigma = \frac{dq}{dS}$	$\rho = \frac{dq}{d\mathcal{V}}$
Expression du champ électrostatique :	Expression du champ électrostatique :
$\vec{E}_{(P)} = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$	$\vec{E}_{(P)} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\mathcal{V}}{r^2} \vec{u}$

3. EN PRATIQUE...

On se propose de calculer le champ électrostatique créé en un point P situé à une distance R d'un fil rectiligne infini, placé dans le vide, portant une densité linéique de charge uniforme telle que : $\lambda > 0$.



On choisit un point M quelconque sur le fil auquel correspond un élément de longueur dl . Cet élément de longueur « porte » une charge élémentaire dq , telle que : $dq = \lambda dl$. La charge dq crée alors en P, à la distance r de dl , un champ électrostatique élémentaire tel que :

$$d\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

La distance R étant fixée, la valeur du champ électrostatique dépend uniquement du paramètre angulaire α défini par $\alpha = (\widehat{OP, PM})$.

Il faut donc exprimer toutes les variables du problème, c'est-à-dire r et dl , en fonction de α .

→ Exprimons r en fonction de α : on a : $\cos\alpha = \frac{R}{r}$, d'où : $r = \frac{R}{\cos\alpha}$

→ Exprimons dl en fonction de α :

On commence par écrire l'expression de l en fonction de α , d'où : $l = R \tan \alpha$.

Pour obtenir l'expression de dl en fonction de α , on écrit la différentielle de l par rapport à α

que l'on assimile au déplacement élémentaire dl , soit : $dl = \frac{R}{\cos^2\alpha} d\alpha$.

D'après (1) le champ élémentaire $d\vec{E}_{(P)}$ s'écrit alors :

$$d\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} d\alpha \vec{u}. \quad (2)$$

Avant d'obtenir par intégration l'expression du champ résultant en P, il est nécessaire de projeter au préalable la relation (2) qui est une relation vectorielle sur les axes $P\vec{x}$ et $P\vec{y}$ afin d'obtenir deux relations scalaires que l'on pourra intégrer. On remarque que pour des raisons de symétrie, la composante du champ électrostatique total sur l'axe $P\vec{x}$ est nulle.

Projetons le champ élémentaire sur l'axe $P\vec{y}$: $\Rightarrow dE_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos\alpha d\alpha$

Intégration du champ élémentaire $d\vec{E}_{(P)}$ sur tout le fil (c'est-à-dire pour $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\pi}{2}$) :

$$E_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$E_{(P)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$$

Le champ total créé par un fil infini en un point P de l'espace à la distance R du fil infini est

donc : $\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \vec{j}$.

8 Potentiel électrostatique

1. EN QUELQUES MOTS...

De la même manière qu'il est possible d'affecter à chaque point de l'espace une grandeur vectorielle qui est le champ électrostatique, il est également possible de lui affecter une grandeur scalaire que l'on appelle **potentiel électrostatique** (ou plus simplement potentiel), noté V (unité le Volt, noté V).

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

L'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q en un point P de

l'espace à la distance r de la charge est donnée par : $V_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{cste.}$

Le potentiel électrostatique est une fonction scalaire **définie à une constante près**. La convention classique pour déterminer cette constante est de prendre le potentiel nul à l'infini (sous la condition qu'il n'y ait pas de charge à l'infini), d'où :

$V_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$V_{(P)}$: potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q à la distance r de q (V) q : charge électrique (C) r : distance entre q et le point P (point où le potentiel est mesuré) (m) ϵ_0 : permittivité électrique du vide ($\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$)
--	--

Comme pour le champ électrostatique, le potentiel électrostatique est **non défini au point où se trouve la charge ponctuelle** q , car lorsque $r \rightarrow 0$, alors $V_{(r \rightarrow 0)} \rightarrow \infty$.

b) Potentiel électrostatique créé par une distribution de charges ponctuelles

Lorsque l'on place en n points M_i de l'espace une charge ponctuelle q_i fixe, le potentiel électrostatique créé par ces charges en un point quelconque P de l'espace est la **somme algébrique des potentiels** créés par chacune de ces charges, tel que :

$$V_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}, \text{ où } r_i \text{ est la distance entre le point } M_i \text{ et le point P.}$$

c) Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

De façon similaire à ce qui a été fait pour le champ électrostatique dans le cas d'une distribution continue de charges, on peut déterminer le potentiel créé par cette distribution en un point P quelconque de l'espace.

La répartition des charges est caractérisée en chaque point de l'élément considéré (courbe (\mathcal{C}), surface (Σ), volume (\mathcal{V})), par la densité de charge (linéique λ , surfacique σ , volumique ρ).

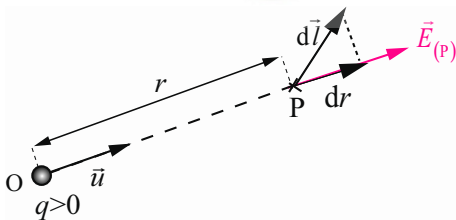
En un point P de l'espace, situé à la distance r de l'élément considéré, l'expression du potentiel électrostatique, noté $V_{(P)}$, est donné par :

Distribution linéique de charges	Distribution surfacique de charges	Distribution volumique de charges
Densité linéique de charge :	Densité surfacique de charge :	Densité volumique de charge :
$\lambda = \frac{dq}{dl}$	$\sigma = \frac{dq}{dS}$	$\rho = \frac{dq}{dV}$
Expression du potentiel électrostatique :	Expression du potentiel électrostatique :	Expression du potentiel électrostatique :
$V_{(P)} = \int_{(\mathcal{L})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r}$	$V_{(P)} = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$	$V_{(P)} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r}$

d) Relation entre potentiel et champ électrostatique

Considérons le champ électrostatique $\vec{E}_{(P)}$ créé par une charge ponctuelle q , placée en un point O, en un point P quelconque de l'espace à la distance r de O. La charge q est placée dans le vide et choisie arbitrairement positive. L'expression du champ électrostatique est donnée par : $\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$.

Considérons à présent le déplacement élémentaire du point P suivant la direction $d\vec{l}$ et calculons le produit scalaire $\vec{E}_{(P)} \cdot d\vec{l}$, on obtient : $\vec{E}_{(P)} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l}$.



Le vecteur champ électrostatique étant porté par le vecteur unitaire \vec{u} , seule la composante de $d\vec{l}$ suivant la direction du vecteur unitaire \vec{u} intervient dans le calcul du produit scalaire. On note dr la composante de $d\vec{l}$ suivant \vec{u} , on a alors :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{(P)} \cdot d\vec{l} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot dr \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{E}_{(P)} \cdot d\vec{l} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (1)$$

Calculons à présent l'expression du potentiel électrostatique créé par la charge q au point P :

$$V_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

En écrivant la différentielle de $V_{(P)}$ par rapport à r on a : $dV_{(P)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right)$

$$\Rightarrow dV_{(P)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr. \quad (2)$$

En identifiant les relations (1) et (2) on obtient : $dV_{(P)} = -\vec{E}_{(P)} \cdot d\vec{l}$.

Cette relation est fondamentale car elle relie le potentiel électrostatique au champ électrostatique. Elle permet de déterminer le champ électrostatique connaissant l'expression du potentiel ou le potentiel électrostatique connaissant l'expression du champ électrostatique :

$$\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

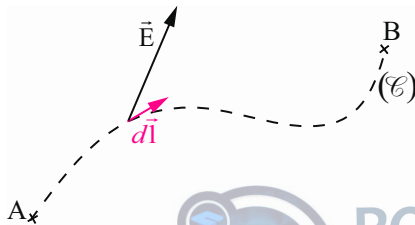
V : potentiel électrostatique (V)
 \vec{E} : champ électrostatique ($\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)
 $d\vec{l}$: déplacement élémentaire (m)

e) Notion de circulation

Par définition la circulation élémentaire du champ électrostatique, \vec{E} , le long d'une courbe (\mathcal{C}), d'extrémités A et B, s'écrit : $dC_{AB} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$, où $d\vec{l}$ est le vecteur déplacement élémentaire de \vec{E} le long de (\mathcal{C}).

En utilisant le fait que : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ alors la circulation élémentaire du champ électrostatique, \vec{E} , le long de la courbe (\mathcal{C}) s'écrit : $dC_{AB} = \vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$.

La circulation totale de \vec{E} le long de (\mathcal{C}) entre A et B est donnée par : $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{(A)} - V_{(B)}$.



La circulation de \vec{E} le long de la courbe (\mathcal{C}) est donc égale à la différence de potentiel entre le point A et le point B.

La circulation de \vec{E} le long de (\mathcal{C}) est indépendante du chemin suivi pour passer de A à B, mais dépend uniquement de l'état initial (A) et de l'état final (B).

Le champ électrostatique \vec{E} dérive donc d'un potentiel scalaire V , ce qui implique :

$$\boxed{\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V}$$

\vec{E} : champ électrostatique ($\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)
 V : potentiel électrostatique (V)
 $\overline{\text{grad}}$: opérateur gradient (il transforme un champ scalaire en un champ vectoriel)

Pour calculer le champ électrostatique à partir du potentiel électrostatique ou *vice versa*, on peut alors utiliser indifféremment l'expression de la circulation de \vec{E} : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ ou le fait que le champ électrostatique dérive d'un potentiel scalaire : $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$, car les deux relations sont strictement équivalentes : $\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Leftrightarrow \vec{E} = -\overline{\text{grad}} V}$.



Comme le champ électrostatique \vec{E} dérive d'un potentiel alors sa circulation le long d'une courbe fermée est nulle : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

f) Surfaces équipotentielles et lignes de champ

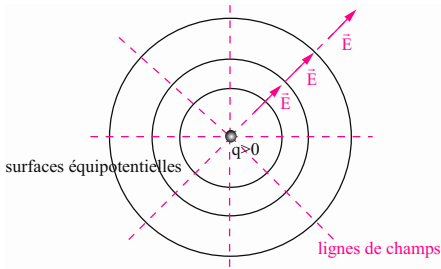
- Surfaces équipotentielles

Les surfaces équipotentielles sont constituées par l'ensemble des points ayant la même valeur de potentiel. Par définition, une surface équipotentielle est représentée par l'équation : $V(x,y,z) = \text{cste} \Leftrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.



Le champ électrostatique est toujours normal (ou perpendiculaire) aux surfaces équipotentielles.

• Lignes de champ



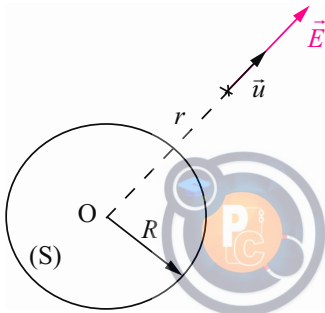
Une ligne de champ est une courbe telle que le champ électrostatique \vec{E} soit tangent en tout point à cette courbe. Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ électrostatique.

On vient de voir que le champ électrostatique étant toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles, **les lignes de champ sont toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.**



Le champ électrostatique est **toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants.**

3. EN PRATIQUE



Cherchons à calculer le potentiel électrostatique créé par une sphère (S) de rayon R , à la distance r du centre de la sphère O , telle que : $r > R$. La sphère porte une densité surfacique de charge uniforme, notée σ , telle que : $\sigma > 0$. On donne l'expression du champ électrostatique créé par la sphère (S) en r : $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}$ (étant

donnée la géométrie du problème le champ \vec{E} est radial). L'expression de \vec{E} est déterminée grâce au théorème de Gauss (Fiche 46).

On sait que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

\vec{E} ne dépend que de r et il est « porté » par \vec{u} , donc : $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}$

$$\text{d'où : } dV = E dr \Leftrightarrow dV = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int -\frac{R^2}{r^2} dr = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + \text{cste}$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$, alors $V \rightarrow 0$, d'où $\text{cste} = 0$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

9 Dipôle électrostatique

1. EN QUELQUES MOTS ...

Un dipôle électrostatique est un système composé de deux charges ponctuelles de signe opposé, $-q$ et $+q$, respectivement placées en deux points N et P distant de a . La distance a est très faible par rapport à la distance à laquelle on détermine le potentiel électrostatique et le champ électrostatique créé par le dipôle.

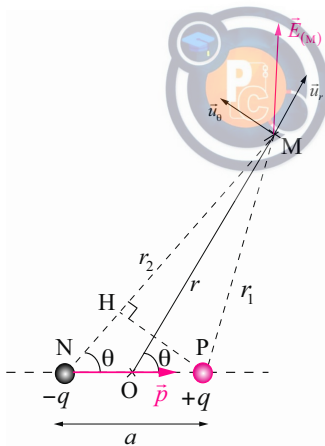
2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Potentiel créé par un dipôle

Le potentiel électrostatique créé par le dipôle électrostatique est calculé en un point M situé à une distance r du centre du dipôle (point O) telle que : $r \gg a$.

Le potentiel créé par le dipôle en M est : $V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2}$

$$\Rightarrow V_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right).$$



On appelle H la projection orthogonale de P sur \overline{NM} . Les angles $(\overline{ON}, \overline{NM})$ et $(\overline{OP}, \overline{PM})$ sont considérés comme égaux car $r \gg a$, et sont notés θ .

Comme $r \gg a$, on peut écrire : $r_2 - r_1 \approx NH \approx a \cos\theta$ et $r_2 r_1 \approx r^2$, le potentiel électrostatique créé par le dipôle en

M s'écrit alors : $V_{(M)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos\theta}{r^2}$

Le vecteur moment dipolaire ou plus simplement **moment dipolaire**, noté \vec{p} (unité le Coulomb mètre, noté C.m), est défini par : $\vec{p} = q \overline{NP}$.

La valeur q est toujours positive et le moment dipolaire est **orienté de la charge négative vers la charge positive**.

Le potentiel s'écrit :

$$V_{(M)} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$V_{(M)}$: potentiel électrostatique créé par le dipôle en M (V)

p : norme du moment dipolaire (C.m)

r : distance entre le centre du dipôle et le point M (m)

ϵ_0 : permittivité électrique du vide (F.mm⁻¹)

b) Champ électrostatique créé par un dipôle

L'expression du champ électrostatique créé par le dipôle en M est obtenue à partir de l'expression du potentiel en utilisant le fait que : $\vec{E}_{(M)} = -\overline{\text{grad}}V_{(M)}$. Le problème du dipôle

électrostatique ayant une symétrie de révolution autour de \overline{NP} , le champ électrostatique créé par le dipôle est contenu dans le plan formé par la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

Le potentiel dépendant du paramètre angulaire θ , il est judicieux d'utiliser l'expression du gradient en coordonnées polaires plutôt qu'en coordonnées cartésiennes, soit :

$$\vec{E}_{(M)} = -\frac{\partial V_{(M)}}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_{(M)}}{\partial \theta} \vec{u}_\theta.$$

On obtient alors pour l'expression du champ électrostatique créé par le dipôle en M :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

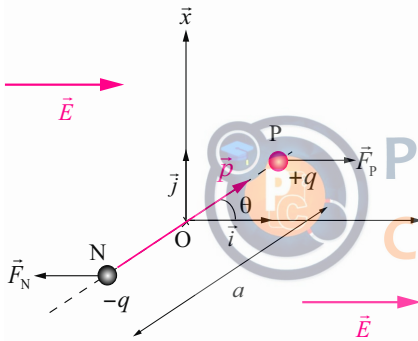
$\vec{E}_{(M)}$: champ électrostatique ($V.m^{-1}$)

p : norme du moment dipolaire (C.m)

r : distance entre le centre du dipôle et le point M (m)

ϵ_0 : permittivité électrique du vide ($F.m^{-1}$)

3. EN PRATIQUE...



Caractérisons l'action d'un champ électrostatique sur un dipôle. Plaçons ce dipôle, constitué de deux charges $-q$ et $+q$, dans un champ électrostatique uniforme, noté \vec{E} . Sous l'action du champ extérieur \vec{E} , le dipôle est soumis à une action mécanique. Cette action est caractérisée par une force résultante, notée \vec{F} et le moment de la force résultante au point O (centre du dipôle), noté $\overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O)$.

Exprimons la résultante des forces agissant sur le dipôle :

$$\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_P = -qE\vec{i} + qE\vec{i} = \vec{0}, \text{ la résultante des forces est nulle.}$$

Exprimons le moment de la force résultante agissant sur le dipôle :

$$\overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = \overline{OP} \wedge \vec{F}_P + \overline{ON} \wedge \vec{F}_N$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = \overline{OP} \wedge \vec{F}_P + \overline{NO} \wedge \vec{F}_P, \text{ car } \overline{ON} = -\overline{NO} \text{ et } \vec{F}_P = -\vec{F}_N$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = (\overline{NO} + \overline{OP}) \wedge \vec{F}_P = \overline{NP} \wedge \vec{F}_P$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = \overline{NP} \wedge q\vec{E} = q\overline{NP} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Le dipôle est en équilibre lorsque : $\overline{\mathcal{M}}_{\vec{F}}(O) = \vec{0}$, c'est-à-dire : $\|\vec{p}\| \|\vec{E}\| \sin\theta = 0$.

Il existe alors deux positions qui vérifient la condition d'équilibre :

- si $\theta = 0$, alors \vec{p} et \vec{E} sont dans le même sens (équilibre stable) ;
- si $\theta = \pi$, alors \vec{p} et \vec{E} sont en sens contraire (équilibre instable).

Le moment de la force résultante au point O tend donc à aligner le dipôle dans le sens du champ \vec{E} . Autrement dit, il fait tourner le dipôle autour de O de façon ce que \vec{p} et \vec{E} soient colinéaires.

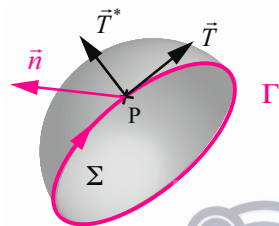
10 Théorème de Gauss

1. EN QUELQUES MOTS...

Le théorème de Gauss est un outil puissant qui permet de calculer facilement le champ électrostatique créé par une distribution de charges. En pratique, le théorème de Gauss s'applique essentiellement lorsque les charges sont réparties régulièrement sur un plan, ou dans l'espace avec une symétrie sphérique autour d'un point fixe, ou une symétrie cylindrique autour d'un axe de révolution.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Orientation d'une surface



Considérons une surface ouverte Σ , s'appuyant sur un contour fermé Γ , orienté. Soit \vec{T} le vecteur unitaire tangent au contour Γ , en un point P . Soit \vec{T}^* le vecteur unitaire orthogonal à \vec{T} , situé dans le plan tangent en P à Σ . Par convention, le sens de la normale positive, \vec{n} , en P à Σ est donné par : $\vec{n} = \vec{T} \wedge \vec{T}^*$.

Une **surface** est dite **ouverte** lorsqu'elle s'appuie sur un contour fermé. Une **surface fermée** est formée de 2 surfaces ouvertes s'appuyant sur le même contour fermé.

Dans le cas d'une **surface fermée**, par convention, la normale positive est toujours dirigée de l'intérieur de la surface vers l'extérieur de la surface.



Si la surface est ouverte, il est possible de passer d'une face à l'autre sans traverser la surface. En revanche, si la surface est fermée, elle sépare l'espace en deux zones correspondant aux deux faces, intérieur et extérieur, et il faut traverser la surface pour passer d'une zone à l'autre.

b) Flux du champ électrostatique

Le flux électrostatique élémentaire, noté $d\phi$, du vecteur champ électrostatique \vec{E} , à travers un élément de surface $d\vec{S}$ ($d\vec{S} = \vec{n} dS$), est le scalaire, tel que :

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \text{ ou } d\phi = \|\vec{E}\| \cdot \|d\vec{S}\| \cos(\widehat{\vec{E}, d\vec{S}}).$$

Le flux du vecteur champ électrostatique \vec{E} , à travers une surface finie S est alors :

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ϕ : flux du champ électrostatique (V.m)

\vec{E} : champ électrostatique (V.m⁻¹)

$d\vec{S}$: surface élémentaire à travers laquelle on calcule le flux de \vec{E} (m²)

c) Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet d'écrire que le flux du champ électrique à travers une **surface S fermée**, appelée **surface de Gauss**, est égal à la somme des charges intérieures au volume délimité par S divisée par ϵ_0 , d'où :

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

ϕ : flux du champ électrostatique (V.m)

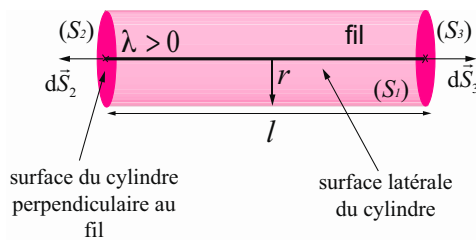
\vec{E} : champ électrostatique (V.m^{-1})

$d\vec{S}$: vecteur surface élémentaire

Q^{int} : charge totale contenue dans le volume délimité par la surface de Gauss S considérée (C)

ϵ_0 : permittivité électrique du vide (F.m^{-1})

3. EN PRATIQUE...



Reprenons l'exemple précédent d'un fil rectiligne de longueur l portant une densité linéique de charge uniforme telle que : $\lambda > 0$. On cherche à déterminer le champ électrostatique créé par le fil à la distance r . Pour des raisons de symétrie on choisit comme surface de Gauss la surface S d'un cylindre de rayon r et de longueur l .

Le flux total du champ électrostatique créé par le fil à travers S est la somme de trois contributions : ϕ_1 le flux à travers la surface latérale S_1 , ϕ_2 et ϕ_3 les flux à travers les deux surfaces S_2 et S_3 . On obtient alors :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

Le champ électrostatique étant radial (orienté suivant le rayon du cylindre), le flux de \vec{E} à travers les surfaces S_2 et S_3 est nul : $\phi_2 = 0$ et $\phi_3 = 0$, car $\vec{E} \perp d\vec{S}_2$ et $\vec{E} \perp d\vec{S}_3$ (où $d\vec{S}_2$ et $d\vec{S}_3$ sont les vecteurs surfaces élémentaires sur les faces S_2 et S_3).

Le vecteur surface élémentaire $d\vec{S}_1$ sur la surface S_1 , orientée vers l'extérieur de la surface, est un vecteur radial, donc : $\vec{E} \parallel d\vec{S}_1$, d'où le flux ϕ_1 sur la paroi latérale :

$$\phi = \phi_1 = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} E \times dS_1 = E \iint_{S_1} dS_1 \text{ car } E \text{ uniforme sur } S_1, \text{ d'où :}$$

$$\phi = \phi_1 = ES_1 = E 2\pi r l$$

La charge intérieure au volume du cylindre est : $Q^{\text{int}} = \int \lambda dl = \lambda \int dl = \lambda l$.

D'après le théorème de Gauss on a alors : $E 2\pi r l = \frac{\lambda}{\epsilon_0} l$.

La norme du champ électrostatique pour un fil rectiligne de longueur l portant une densité

linéique de charge uniforme est donc : $E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$.

11 Conducteurs en équilibre

1. EN QUELQUES MOTS ...

Un conducteur est un corps qui contient des porteurs de charges susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Un conducteur est dit en équilibre électrostatique lorsque le mouvement d'ensemble des porteurs de charges est nul (les charges libres sont immobiles).

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

Les charges à l'intérieur d'un conducteur en équilibre sont immobiles, elles ne sont soumises à aucune force, d'où : $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$. On en déduit donc que le champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, noté \vec{E}_{int} , est nul : $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$.

b) Potentiel à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

Le champ électrostatique étant nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, ceci implique que le potentiel électrostatique est **constant** en tout point à l'intérieur d'un conducteur en équilibre :

$$V_{\text{int}} = \text{cste}.$$



À cause de la propriété de continuité de la fonction potentiel, le potentiel électrostatique est également constant sur la surface du conducteur en équilibre.

c) Densité volumique de charge à l'intérieur d'un conducteur en équilibre

D'après le théorème de Gauss pour une densité volumique de charge, notée ρ , le flux du champ électrostatique à l'intérieur d'une surface de Gauss, notée S , délimitant le volume

du conducteur en équilibre s'écrit : $\phi = \oiint_S \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho dv}{\epsilon_0}$. Le champ électrostatique

étant nul à l'intérieur du conducteur ($E_{\text{int}} = 0$), le flux électrostatique est alors nul à l'intérieur de celui-ci. La densité volumique de charge est donc nulle à l'intérieur d'un conducteur en équilibre :

$$\rho_{\text{int}} = 0.$$

Par conséquent, la charge est **uniquement répartie à la surface** du conducteur en équilibre, avec une densité surfacique de charge σ .

d) Théorème de Coulomb

D'après le théorème de Coulomb en un point M, **au voisinage extérieur** d'un conducteur chargé en équilibre ($\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$; $V_{\text{int}} = \text{cste}$; $\rho_{\text{int}} = 0$), le champ est normal à la surface du conducteur et a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

\vec{n} : normale à la surface du conducteur, orientée vers l'extérieur

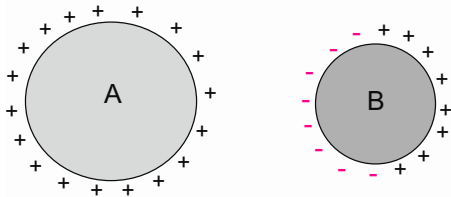
σ : densité surfacique de charges au voisinage de M

ϵ_0 : permittivité électrique du vide (F.m^{-1})

Le théorème de Coulomb montre que le champ électrostatique \vec{E} est discontinu à la traversée d'un conducteur en équilibre, puisque, nul à l'intérieur, il a une valeur finie juste à l'extérieur. Par convention le champ électrostatique sur la surface d'un conducteur en équilibre est égal à la moyenne arithmétique entre la valeur du champ à l'intérieur du conducteur et sa valeur au voisinage immédiat, d'où : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

e) Phénomènes d'influence

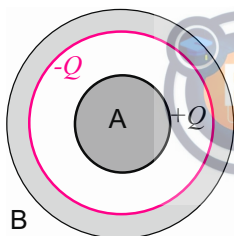
- Influence partielle



Considérons un conducteur (A) chargé positivement et un conducteur (B) électriquement neutre. Si les deux conducteurs sont suffisamment loin l'un de l'autre il n'y aura aucune influence entre eux.

En revanche, lorsque l'on rapproche (A) et (B), on constate qu'il y a apparition à la surface de (B) de charges négatives sur la partie faisant face à (A) et de charges positives sur l'autre partie, la charge totale de (B) restant neutre. On dit alors que (A) et (B) sont en position d'**influence partielle**.

- Influence totale



Deux conducteurs sont en position d'**influence totale** lorsque l'un des deux entoure complètement l'autre. Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont alors égales et opposées. Il va apparaître, si (A) est chargée $+Q$, une charge $-Q$ sur la face interne de (B).

3. EN PRATIQUE...

Cherchons à déterminer la pression électrostatique (force par unité de surface de nature électrique), notée P , à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique.

Prenons un élément de surface dS à la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique et supposons que la densité surfacique de charge σ est constante sur toute la surface. Il existe un champ électrostatique \vec{E} sur la surface du conducteur tel que : $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$.

La charge élémentaire dq contenue sur dS est alors soumise à une force électrostatique élémentaire, notée $d\vec{F}$, tel que : $d\vec{F} = dq \vec{E}$.

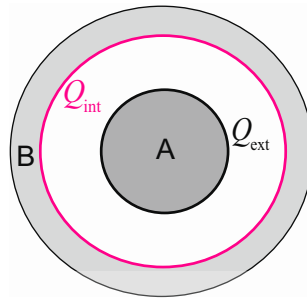
On définit alors la **pression électrostatique**, notée P (unité le Pascal, noté Pa), comme le rapport $\|d\vec{F}\|$ sur dS , d'où :

$$P = \frac{\|d\vec{F}\|}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

12 Condensateurs

1. EN QUELQUES MOTS...

Un condensateur est un ensemble de 2 conducteurs (A) et (B) en position d'influence totale, donc : $Q_{\text{ext}} = -Q_{\text{int}}$, où Q_{ext} et Q_{int} sont respectivement les charges sur la partie externe de (A) et sur la partie interne de (B). Les parties (A) et (B) sont appelées les armatures du condensateur. On appelle Q la **charge du condensateur**, il s'agit de la valeur absolue commune des charges des deux armatures : $Q = |Q_{\text{ext}}| = |Q_{\text{int}}|$.



2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Capacité d'un condensateur

La capacité d'un condensateur (unité le Farad, noté F) est une grandeur positive. C'est une caractéristique intrinsèque du condensateur qui dépend uniquement de sa géométrie. Elle est définie par :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

C : capacité du condensateur (F)

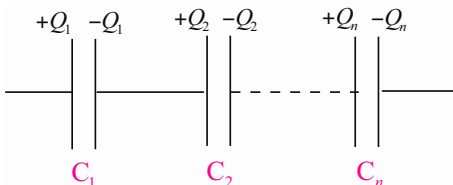
Q : charge du condensateur (C)

$V_1 - V_2$: différence de potentiel aux bornes du condensateur, également notée U . Par convention $V_1 - V_2 > 0$, donc V_1 est le potentiel de l'armature chargée $+Q$ et V_2 celui de l'armature chargée $-Q$.

b) Association de condensateurs

De la même façon que pour les résistances, il est possible d'associer des condensateurs en série, ou en parallèle (dérivation) afin de calculer la capacité équivalente, notée C_{eq} .

En série :

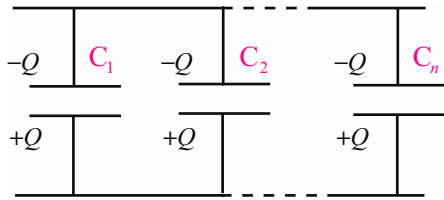


$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

C_{eq} : Capacité équivalente (F)

C_i : i ème capacité (F)

En parallèle :



$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

C_{eq} : Capacité équivalente (F)
 C_i : i ème capacité (F)

La neutralité électrique impose que la charge est la même pour tous les condensateurs.

3. EN PRATIQUE

Cherchons à déterminer la capacité C d'un condensateur plan de surface S . La distance entre les deux armatures est notée d et le vide est établi entre elles. Le potentiel de l'armature chargée $+Q$ est V_1 , et celui de l'armature chargée $-Q$ est V_2 . Il existe entre les deux armatures un champ électrostatique, \vec{E} , dirigé dans le sens des potentiels décroissants ($V_1 \rightarrow V_2$). Pour calculer le champ électrostatique on peut utiliser le théorème de Gauss. On choisit alors une surface de Gauss parallélépipédique liée à la géométrie du problème, notée S . La surface de Gauss est composée de six faces, notées : S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6 .

Le théorème de Gauss s'écrit : $\phi = \iiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, où Q est la charge intérieure contenue dans S .

Le flux de \vec{E} à travers les faces S_1, S_2, S_3 et S_4 est nul car $\vec{E} \perp d\vec{S}_i$ (avec $i \in [1,4]$). Il est également nul à travers S_5 car S_5 est à l'intérieur du conducteur et $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.

Le flux du champ électrostatique à travers S_6 s'écrit : $\phi = E \times S_6 = \frac{Q}{\epsilon_0}$, car $\vec{E} \parallel d\vec{S}_6$.

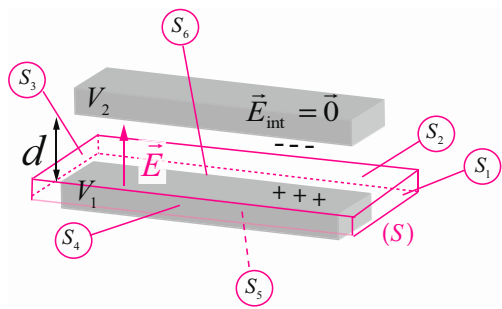
La norme du champ électrostatique est alors : $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S_6} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ car le flux de \vec{E} à travers S_6

est équivalent au flux de \vec{E} à travers S .

À partir de la circulation du champ \vec{E} entre les deux armatures, on détermine la différence de potentiel $V_1 - V_2$ aux bornes du condensateur : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

\vec{E} et $d\vec{l}$ sont colinéaires entre les 2 armatures, donc : $\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^d E \, dl$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = - \int_0^d E \, dl \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \tag{1}$$



Or, on sait que la capacité d'un condensateur, quelle que soit sa géométrie, est de

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

Par conséquent d'après (1), on obtient :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

La capacité d'un condensateur plan dépend uniquement de la surface des armatures et de la distance entre elles.

13 Énergie électrostatique

1. EN QUELQUES MOTS...

L'expression de l'énergie potentielle électrostatique, ou plus simplement l'énergie électrostatique est calculée pour tous les cas envisagés précédemment : charge ponctuelle, conducteur en équilibre électrostatique, condensateur, dipôle.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Énergie électrostatique d'une charge ponctuelle placée dans un champ électrostatique uniforme

Considérons une charge q , située en un point P de l'espace où règne un champ électrostatique \vec{E} dérivant d'un potentiel V . On appelle **énergie potentielle électrostatique**, ou **énergie électrostatique**, notée \mathcal{E}_p , de la charge q le travail à fournir pour amener cette charge de l'infini (où le potentiel est nul) à la position P (où le potentiel est $V_{(P)}$), telle que :

$$\mathcal{E}_p = qV_{(P)}$$

\mathcal{E}_p : énergie potentielle électrostatique (J)

q : charge électrique (C)

$V_{(P)}$: potentiel au point P (V)

(L'énergie électrostatique est définie à une constante additive près).

b) Énergie électrostatique d'interaction de deux charges ponctuelles

Appliquons le résultat précédent à la situation où le potentiel au point P, où se trouve une charge q_1 , est créé par une charge ponctuelle q_2 située à la distance r de q_1 . La charge q_1 est alors soumise au potentiel V_2 , tel que : $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$. L'énergie électrostatique d'interaction est alors :

$$\mathcal{E}_p = q_1 V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

\mathcal{E}_p : énergie potentielle électrostatique (J)

q_1 et q_2 : charges électriques (C)

V_2 : potentiel créé par la charge q_2 au point où se trouve q_1 (V)

r : distance entre q_2 et q_1 (m)

c) Énergie électrostatique d'interaction de n charges ponctuelles

L'énergie électrostatique d'interaction d'un système formé de n charges ponctuelles, s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

La sommation se fait sur tous les couples (i, j) avec $i \neq j$. Le facteur $\frac{1}{2}$ corrige le fait que l'interaction de chaque couple de charges est comptée deux fois.

d) Énergie électrostatique d'une distribution continue de charges

Pour une distribution continue de charges, la généralisation de la formule précédente (cas de n charges ponctuelles) permet d'écrire :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \int dq V_{(P)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_p : \text{énergie potentielle électrostatique (J)} \\ dq : \text{charge élémentaire contenu autour du point P} \\ V_{(P)} : \text{potentiel au point P} \end{array} \right.$$

e) Énergie électrostatique d'un condensateur

L'énergie électrostatique d'un condensateur est définie par :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_p : \text{énergie potentielle électrostatique (J)} \\ Q : \text{charge du condensateur (C)} \\ V : \text{différence de potentielle aux bornes du condensateur (V)} \\ C : \text{capacité du condensateur (F)} \end{array} \right.$$

3. EN PRATIQUE

On propose d'établir l'expression de l'énergie électrostatique d'un dipôle NP placé dans un champ électrostatique externe uniforme \vec{E} . On s'intéresse à l'énergie électrostatique entre le dipôle et le champ \vec{E} et non à l'énergie d'interaction du dipôle lui-même (interaction entre la charge $+q$ et la charge $-q$ du dipôle lui-même). On considère donc le dipôle comme un système de deux charges, $+q$ et $-q$, qui n'interagissent pas entre elles, placées respectivement en P et N. On note $V_{(P)}$ et $V_{(N)}$ les potentiels en P et en N. L'énergie électrostatique du dipôle s'écrit : $\mathcal{E}_p = qV_{(P)} - qV_{(N)} = q(V_{(P)} - V_{(N)})$. (1)

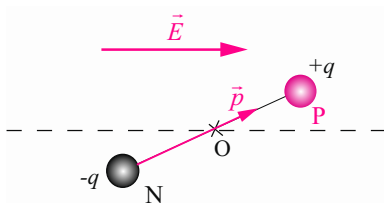
En écrivant la circulation du champ électrostatique \vec{E} entre N et P, on obtient : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\int_{V_{(N)}}^{V_{(P)}} dV = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_{(P)} - V_{(N)} = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E} \int_N^P d\vec{l}$$

$$V_{(P)} - V_{(N)} \approx -\vec{E} \cdot \overline{NP} \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient : $\mathcal{E}_p = -q\vec{E} \cdot \overline{NP} = -\vec{E} \cdot q\overline{NP}$.



La quantité $q\overline{NP}$ correspond au moment dipolaire du dipôle NP, également noté \vec{p} . L'énergie potentielle électrostatique d'un dipôle placé dans un champ \vec{E} externe uniforme est donc égale au produit scalaire entre le champ externe et le moment dipolaire du dipôle, d'où :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_p : \text{énergie potentielle électrostatique (J)} \\ \vec{p} : \text{moment dipolaire (C.m)} \\ \vec{E} : \text{champ électrostatique (V.m}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

14 Champ magnétique

1. 1. EN QUELQUES MOTS...

Un fil parcouru par un courant électrique ou encore un aimant crée en son voisinage un champ magnétique. Présentons les principales propriétés du champ magnétique. En régime permanent, le champ magnétique sera appelé champ magnétostatique.

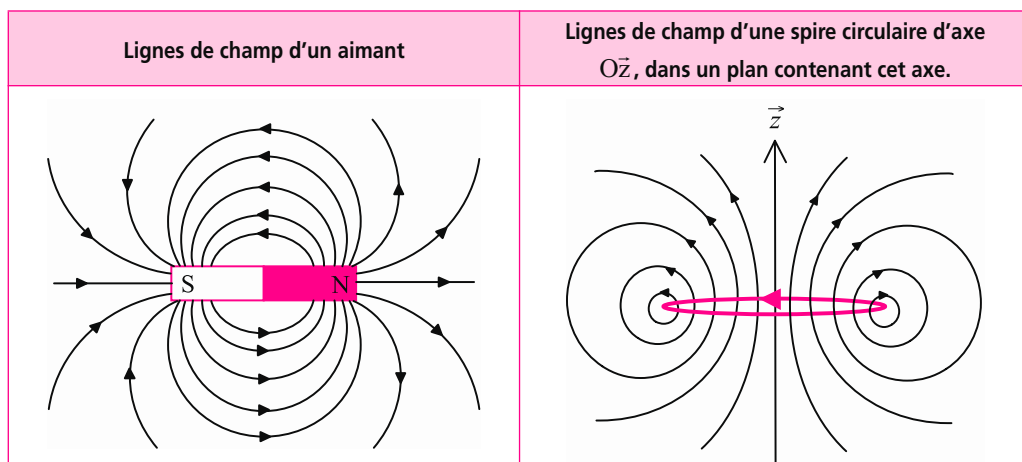
2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Sources de champ magnétique

- On peut distinguer deux sources de champ magnétique :
 - les **aimants** : certains matériaux, comme le fer, le nickel ou le cobalt, sont capables d'engendrer en leur voisinage un champ magnétique ; ils constituent des aimants permanents et sont dits ferromagnétiques.
Un aimant possède toujours deux pôles, un pôle nord et un pôle sud, même si l'aimant est brisé en deux : il n'est pas possible d'isoler les deux pôles. Par opposition, une substance électrisée présente soit une charge positive, soit une charge négative.
 - les **courants électriques**, c'est-à-dire des charges en mouvement d'ensemble : un conducteur parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique en son voisinage.
- Unité du champ magnétique : le Tesla (T).
- Ordres de grandeur :
 - Champ créé par un aimant : 0,1 à 1 T
 - Champ magnétique terrestre : $5 \cdot 10^{-5}$ T

b) Lignes de champ

- Les courbes tangentes au champ magnétique \vec{B} sont appelées **lignes de champ**. Elles sont orientées dans le sens du champ magnétique. Ainsi, l'équation d'une ligne de champ s'écrit : $d\vec{l} \wedge \vec{B} = 0$ où $d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire le long de la ligne de champ. La ligne de champ issue d'un point initial est obtenue par intégration de cette équation.
- Citons des exemples de lignes de champ :



- Un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée constitue un **tube de champ**.

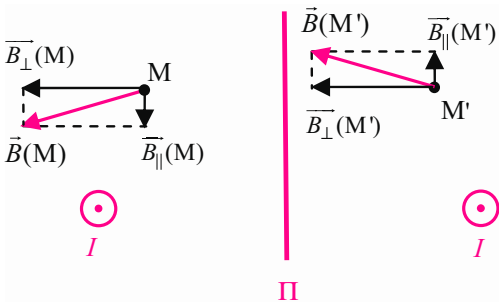
c) Propriétés de symétrie du champ magnétique

Pour déterminer la direction du champ magnétique créé par une distribution de courant, il est souvent utile d'étudier les propriétés de symétrie de cette distribution. Cela permet également de déterminer les variables d'espace dont le champ magnétique dépend et simplifie alors son calcul.

• **Plans de symétrie** : Soit une distribution de courant présentant un plan de symétrie Π .

– Si M et M' sont deux points symétriques par rapport au plan Π , alors le champ magnétique au point M' est l'opposé du symétrique du champ magnétique au point M .

Considérons par exemple deux fils rectilignes infinis parallèles parcourus par un courant I de même sens.



Le champ \vec{B} peut se mettre sous forme de la somme d'une composante parallèle \vec{B}_{\parallel} et d'une composante perpendiculaire \vec{B}_{\perp} au plan de symétrie.

$\vec{B}(M')$ étant l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport au plan Π , on a :

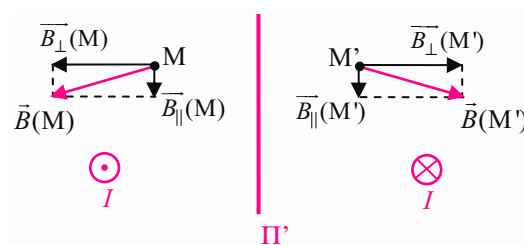
$$\vec{B}_{\perp}(M') = \vec{B}_{\perp}(M) \text{ et } \vec{B}_{\parallel}(M') = -\vec{B}_{\parallel}(M)$$

– Si M appartient au plan Π de symétrie, alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie. En effet $M' \equiv M \Rightarrow \vec{B}_{\parallel}(M) = -\vec{B}_{\parallel}(M) \Rightarrow \vec{B}_{\parallel}(M) = \vec{0}$.

• **Plans d'antisymétrie** : Soit une distribution de courant présentant un plan d'antisymétrie Π' .

– Si M et M' sont deux points symétriques par rapport au plan Π' , alors le champ magnétique au point M' est le symétrique du champ magnétique au point M .

Prenons l'exemple de deux fils rectilignes infinis parallèles parcourus par un courant I . Le sens du courant est opposé dans les deux fils.



$\vec{B}(M')$ étant le symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport au plan Π' , on a :

$$\vec{B}_{\perp}(M') = -\vec{B}_{\perp}(M) \text{ et } \vec{B}_{\parallel}(M') = \vec{B}_{\parallel}(M)$$

– Si M appartient au plan Π' , alors le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est contenu dans le plan d'antisymétrie Π' . En effet $M' \equiv M \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = -\vec{B}_{\perp}(M) \Rightarrow \vec{B}_{\perp}(M) = \vec{0}$.

• **Invariance par translation** : Si la distribution de courant est invariante par translation le long d'un axe $O\vec{z}$ alors le champ magnétique est indépendant de la coordonnée d'espace z .

• **Invariance par rotation** : Si la distribution de courant est invariante par rotation autour d'un axe $O\vec{z}$ alors le champ magnétique est indépendant de l'angle radial θ .

Il faut noter que le champ magnétique \vec{B} n'a pas les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrostatique \vec{E} .

15 Loi de Biot et Savart

1. EN QUELQUES MOTS...

De la même manière que la loi de Coulomb permet de calculer le champ électrostatique créé en un point de l'espace par une distribution de charges, la loi de Biot et Savart permet de déterminer le champ magnétostatique créé en un point de l'espace par une distribution de courant.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

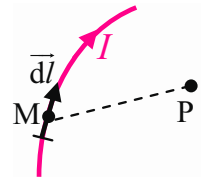
- Considérons un élément de conducteur filiforme de longueur $d\vec{l}$, centré au point M, et parcouru par un courant I . La loi de Biot et Savart permet de déterminer le champ magnétostatique élémentaire $d\vec{B}$ créé en un point P par l'élément de courant $I d\vec{l}$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|^3}$$

I : intensité du courant électrique (Ampère, A)

$d\vec{l}$: élément de longueur de conducteur orienté dans le sens du courant électrique (m)

μ_0 : perméabilité du vide ; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
(H : Henry)



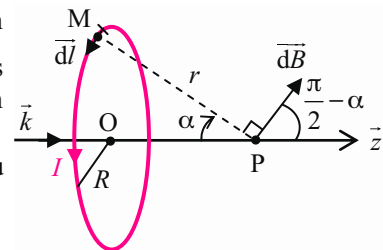
- Caractéristiques de : $d\vec{B}$
 - Direction : $d\vec{B}$ est orthogonal au plan formé par la portion de conducteur et le vecteur \vec{MP} .
 - Sens : il est déterminé par la règle des trois doigts de la main droite :
Pouce : sens du courant électrique ; Index : sens de \vec{MP} ; Majeur : sens de $d\vec{B}$.
- Pour un circuit filiforme (\mathcal{C}) parcouru par un courant I , le champ magnétostatique créé en un point P s'obtient par sommation vectorielle des champs élémentaires créés par l'ensemble des éléments de courant du circuit :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\mathcal{C})} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|^3}$$

3. EN PRATIQUE...

Déterminons le champ magnétostatique \vec{B} créé par un solénoïde infini de rayon R , d'axe \vec{Oz} , comportant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant I , en un point P de son axe.

→ Commençons par calculer le champ créé par une spire du solénoïde, de centre O, en un point P de son axe.



Le champ élémentaire \vec{dB} créé au point P par un élément de longueur $d\vec{l}$ de la spire, centré au point M est orthogonal à $d\vec{l}$ et à \vec{MP} .

Notons r la distance $\|\vec{MP}\|$ et α l'angle (\vec{PO}, \vec{PM}) . Lorsque le point M décrit la spire, \vec{dB} décrit un cône de sommet M et de demi-angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Le champ \vec{B} résultant est donc selon \vec{k} .
 Exprimons la norme $\|\vec{dB}\|$ du champ élémentaire \vec{dB} puis sa composante selon l'axe Oz :

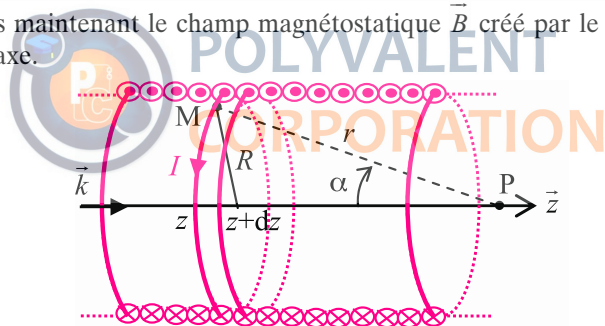
$$\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin(\widehat{dl, MP})}{MP^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \frac{\pi}{2}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

$$dB_z = \|\vec{dB}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \|\vec{dB}\| \sin \alpha$$

Le champ résultant s'écrit donc : $\vec{B} = \int_{\text{spire}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin \alpha \vec{k}$
 Or r et α sont constants lorsque le point M décrit la spire,

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} \int_{\text{spire}} dl \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} 2\pi R \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{k}$$

→ Déterminons maintenant le champ magnétostatique \vec{B} créé par le solénoïde infini en un point P de son axe.



D'après les résultats obtenus pour une spire, \vec{B} est selon l'axe Oz . Exprimons le champ élémentaire dB_z créé par les spires situées entre les cotes z et $z + dz$, au nombre de $dn = ndz$, parcourues par le courant élémentaire $dI = ndzI$:

$$dB_z = \frac{\mu_0 n dz I}{2R} \sin^3 \alpha$$

Exprimons dz en fonction de $d\alpha$: $\tan \alpha = -\frac{R}{z} \Rightarrow dz = \frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$, d'où $dB_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha$

Pour décrire le solénoïde complet, α doit varier entre 0 et π :

$$\vec{B}(P) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{k} = \frac{\mu_0 n I}{2} [-\cos \alpha]_0^\pi \vec{k}$$

$$\Leftrightarrow \vec{B}(P) = \mu_0 n I \vec{k}$$

16 Théorème d'Ampère

1. EN QUELQUES MOTS...

Le théorème d'Ampère permet le calcul du champ magnétostatique créé par une distribution de courant lorsque celle-ci présente des symétries élevées. C'est l'équivalent du théorème de Gauss en électrostatique (fiche 46).

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Vecteur densité de courant électrique \vec{j}

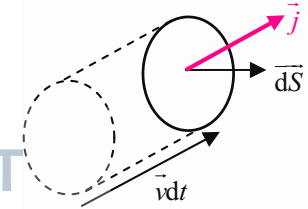
Le vecteur densité de courant électrique \vec{j} est la charge élémentaire traversant une unité de surface par unité de temps. Ainsi, la charge élémentaire dQ qui traverse la surface élémentaire dS pendant dt est donnée par :

$$dQ = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$$

ou

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

$\vec{dS} = \vec{n} dS$: vecteur surface élémentaire avec dS surface élémentaire (m^2), \vec{n} vecteur unitaire normal à dS , orienté vers l'extérieur
 dQ : charge élémentaire traversant la surface élémentaire dS (Coulomb, C)
 \vec{j} : vecteur densité de courant électrique ($A \cdot m^{-2}$)
 dI : intensité élémentaire du courant électrique traversant la surface élémentaire dS (A)



On en déduit l'intensité du courant I traversant une surface S :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

- Les particules de charge q , de vitesse \vec{v} , traversant la surface dS pendant dt sont celles contenues dans un cylindre de base dS et de génératrice $\vec{v} dt$ (volume V_{cyl}). Appelons n la densité particulaire. La charge élémentaire dQ traversant la surface élémentaire dS pendant dt est donc :

$$dQ = nqV_{cyl} = nq\vec{v} dt \cdot \vec{dS}$$

En identifiant avec l'expression : $dQ = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$, on obtient l'expression du vecteur densité de courant électrique associé à un mouvement d'ensemble de particules à la vitesse \vec{v} :

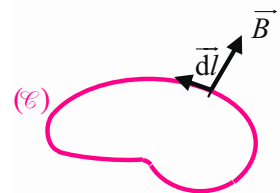
$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

b) Circulation du champ magnétique

Considérons une courbe fermée quelconque (\mathcal{C}) orientée. La circulation du champ magnétique sur cette courbe est définie par :

$$C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

\vec{B} : champ magnétique (T)
 dl : élément de longueur du contour (m)
 C : circulation du champ magnétique (T.m)



c) Théorème d'Ampère

Considérons un ensemble de fils parcourus par des courants d'intensité I_1, I_2, \dots, I_n et une courbe fermée orientée quelconque (\mathcal{C}) enlaçant certains de ces courants. Soit \vec{n} un vecteur unitaire normal à une surface S s'appuyant sur (\mathcal{C}) et orienté selon la règle du tire-bouchon : un tire-bouchon tournant dans le sens choisi pour (\mathcal{C}) traverse la surface S dans le sens de \vec{n} .

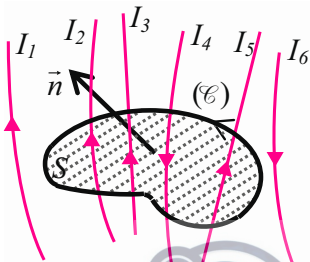
$$C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

$I_{\text{enlacé}}$: intensité du courant électrique enlacé par le contour (\mathcal{C}), comptée algébriquement.

Ainsi, $I_{\text{enlacé}} = \sum_i \varepsilon_i I_i$ où :

$\varepsilon_i = 1$ si I_i traverse la surface S dans le sens de \vec{n}

$\varepsilon_i = -1$ si I_i traverse la surface S dans le sens de $-\vec{n}$



Sur le schéma ci-contre, on a par exemple :

$$I_{\text{enlacé}} = I_2 + I_3 - I_4 + I_5$$

La géométrie du contour (\mathcal{C}) est choisie de telle manière que le champ magnétique soit uniforme sur le contour. Il faut donc d'abord examiner les symétries de la distribution et en déduire la direction du champ et les variables d'espace dont il dépend.

3. EN PRATIQUE...

- Déterminons le champ magnétostatique créé par un tube conducteur creux infiniment long, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , parcouru par un courant d'intensité I avec un vecteur densité volumique de courant \vec{j} uniforme. Déterminons le champ magnétique $\vec{B}(P)$ créé en tout point P de l'espace.

Compte tenu de la symétrie cylindrique de la distribution de courant, utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe Oz étant l'axe du tube.

→ 1^{re} étape : Examinons les propriétés de symétrie de la distribution de courants :

Les plans contenant l'axe Oz sont des plans de symétrie. Au point P , $\vec{B}(P)$ est perpendiculaire au plan contenant P et l'axe Oz :

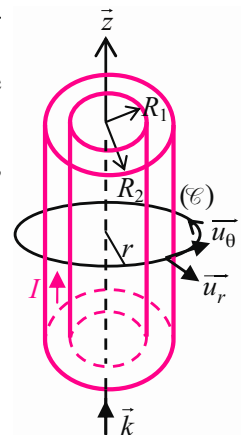
$$\vec{B}(P) = B_\theta(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

La distribution de courant est invariante :

– par translation le long de l'axe Oz : $\vec{B}(P)$ ne dépend pas de la coordonnée z .

– par rotation autour de l'axe Oz : $\vec{B}(P)$ ne dépend pas de la coordonnée θ .

On a donc : $\vec{B}(P) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$.



Compte tenu de la symétrie cylindrique de la distribution de courant, utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe $O\bar{z}$ étant l'axe du tube.

→ 2^e étape : Choisissons un contour d'Ampère adapté aux symétries de la distribution de courants. Le champ magnétostatique ne dépendant que de la coordonnée d'espace r , on choisit un contour orienté (\mathcal{C}) circulaire, de rayon r et d'axe $O\bar{z}$, sur lequel le champ est uniforme.

→ 3^e étape : Exprimons la circulation du champ magnétostatique sur ce contour :

$$C = \oint_{(\mathcal{C})} \bar{B} \cdot d\bar{l} = \int_0^{2\pi} B_\theta(r) \bar{u}_\theta \cdot r d\theta \bar{u}_\theta = 2\pi r B_\theta(r).$$

→ 4^e étape : Examinons le courant enlacé par le contour d'Ampère. Trois cas doivent être distingués :

- Si $r \leq R_1$, $I_{\text{enlacé}} = 0 \Rightarrow 2\pi r B_\theta(r) = 0 \Leftrightarrow B_\theta(r) = 0$
- Si $R_1 \leq r \leq R_2$, il faut calculer le courant traversant la section du conducteur creux comprise à l'intérieur du contour d'Ampère :

$I = \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S}$ où S est la section du conducteur. \bar{j} étant uniforme et colinéaire à $d\bar{S}$, on obtient :

$$\begin{cases} I = jS = j(\pi R_2^2 - \pi R_1^2) \\ I_{\text{enlacé}} = jS_i = j(\pi r^2 - \pi R_1^2) \end{cases} \Rightarrow I_{\text{enlacé}} = I \frac{\pi r^2 - \pi R_1^2}{\pi R_2^2 - \pi R_1^2} = I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

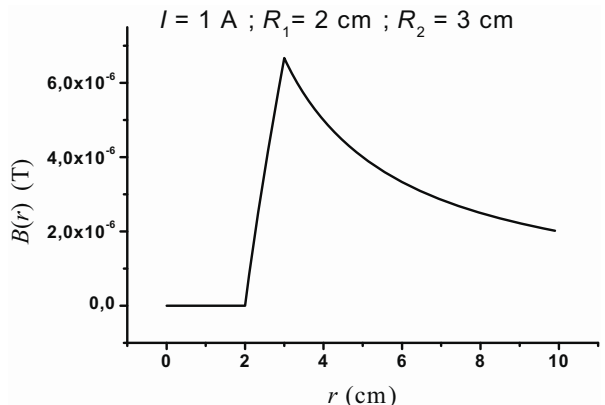
où S_i est la section du conducteur à l'intérieur du contour.

On obtient donc : $2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \Leftrightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$

- Si $r \geq R_2$, $I_{\text{enlacé}} = I \Rightarrow 2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I \Leftrightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Le champ magnétostatique est continu en $r = R_1$ et $r = R_2$. Son expression en fonction de r est donc :

$$\begin{cases} \bar{B} = \bar{0} \text{ pour } r \leq R_1 \\ \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \bar{u}_\theta \text{ pour } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \bar{u}_\theta \text{ pour } r \geq R_2 \end{cases}$$



- Déterminons le champ magnétostatique créé en tout point P de l'espace par un solénoïde infini, de section circulaire (rayon R), comportant n spires par unité de longueur, et parcouru par un courant I .

Compte tenu de la symétrie cylindrique de la distribution de courant, utilisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe $O\vec{z}$ étant l'axe du solénoïde.

→ 1^{re} étape : Examinons les propriétés de symétrie de la distribution de courants :

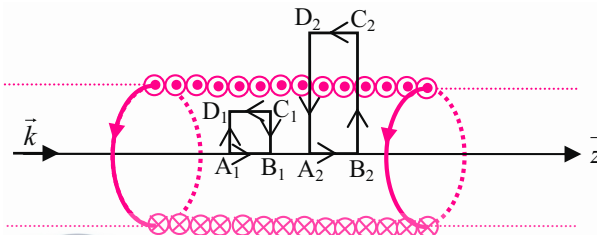
Les plans normaux à l'axe $O\vec{z}$ du solénoïde sont des plans de symétrie, donc $\vec{B}(P)$ est perpendiculaire à ces plans : $\vec{B}(P) = B_z(r, \theta, z) \vec{k}$.

La distribution de courant est invariante :

- par translation le long de l'axe $O\vec{z}$: $\vec{B}(P)$ ne dépend pas de la coordonnée z .
- par rotation autour de l'axe $O\vec{z}$: $\vec{B}(P)$ ne dépend pas de la coordonnée θ .

Ainsi, $\vec{B}(P) = B_z(r) \vec{k}$

→ 2^e étape : Choisissons un contour d'Ampère adapté aux symétries de la distribution de courants. Le champ magnétique ne dépend que de la coordonnée d'espace r et est colinéaire à l'axe $O\vec{z}$; choisissons un contour orienté rectangulaire ABCD dont deux des côtés sont parallèles au champ, le côté AB étant sur l'axe $O\vec{z}$.



→ 3^e étape : Exprimons la circulation du champ magnétique sur ce contour :

$$C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B B_z(r=0) \vec{k} \cdot d\vec{l} + \int_C^D B_z(r) \vec{k} \cdot d\vec{l} = \|\overline{AB}\| B_{\text{axe}} - \|\overline{CD}\| B_z(r) = \|\overline{AB}\| (B_{\text{axe}} - B_z(r))$$

où B_{axe} est le champ magnétostatique sur l'axe $O\vec{z}$ du solénoïde ($r=0$) calculé dans la fiche 52 relative à la loi de Biot et Savart : $B_{\text{axe}} = \mu_0 n I$. La contribution des côtés BC et DA s'annule car la distribution de \vec{B} est la même sur les deux côtés qui sont parcourus en sens inverse.

→ 4^e étape : Examinons le courant enlacé par le contour d'Ampère. Deux cas se distinguent :

- Si le contour rectangulaire est entièrement à l'intérieur du solénoïde (contour $A_1B_1C_1D_1$), alors $I_{\text{enlacé}} = 0$. Ainsi $B_z(r) = B_{\text{axe}} = \mu_0 n I$ pour $r < R$: le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde.
- Si le contour rectangulaire traverse le solénoïde (contour $A_2B_2C_2D_2$), alors

$I_{\text{enlacé}} = \mu_0 n \|\overline{A_2B_2}\| I$ où $n \|\overline{A_2B_2}\|$ représente le nombre de spires sur la longueur $\|\overline{A_2B_2}\|$. Ainsi $C = \|\overline{A_2B_2}\| (B_{\text{axe}} - B_z(r)) = \mu_0 n \|\overline{A_2B_2}\| I$. Or $B_{\text{axe}} = \mu_0 n I \Rightarrow B_z(r) = 0$ pour $r > R$.

Finalement :
$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 n I \vec{k} \text{ à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{B} = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Le champ magnétostatique présente donc une discontinuité à la traversée de la surface du solénoïde qui peut être assimilée à une distribution surfacique de courant.

17 Phénomènes d'induction

1. EN QUELQUES MOTS...

Un circuit électrique peut être le siège d'un courant induit s'il est placé dans un champ magnétique variable ou s'il se déplace dans son ensemble ou en partie au cours du temps dans un champ magnétique constant. Ce phénomène est appelé induction électromagnétique.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Flux du champ magnétique

- Considérons une surface S . Le flux du champ magnétique à travers la surface S est la somme des flux élémentaires à travers tous les éléments de surface dS la constituant.

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

\vec{B} : champ magnétique (T)

$d\vec{S} = \vec{n} dS$: vecteur élément de surface (m^2) avec \vec{n} vecteur unitaire normal à l'élément de surface dS .

Φ : flux du champ magnétique (Weber, Wb)

- Propriétés :

Le flux du champ magnétique à travers une surface S fermée est nul : $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$.

Soit un contour fermé. Le flux du champ magnétique est indépendant du choix de la surface orientée s'appuyant sur ce contour.

Un tube de champ magnétique a le même flux dans toute section. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif. Cela signifie que si la section du tube de champ se rétrécit, les lignes de champ sont plus concentrées et le champ magnétique est plus intense.

b) Loi de Faraday

- Toute variation du flux Φ du champ magnétique à travers un circuit électrique induit une force électromotrice (f.é.m.) dans ce circuit. La loi de Faraday relie la f.é.m. induite $e(t)$ à la variation du flux :

$$e(t) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Φ : flux du champ magnétique (Wb)

t : temps (s)

e : force électromotrice induite (Volts, V)

- Le flux Φ du champ magnétique à travers un circuit électrique peut varier si la surface du circuit varie au cours du temps, si le champ magnétique est variable ou enfin si l'orientation du circuit par rapport au champ \vec{B} varie au cours du temps.
- La création d'une f.é.m. induite se traduit par le passage d'un courant induit dans le circuit.

c) Loi de Lenz

- Le courant induit s'oppose toujours à la cause qui lui a donné naissance.

Cette loi justifie le signe négatif dans la loi de Faraday.

- Détermination du sens du courant induit :

On choisit un sens positif arbitraire sur le circuit. L'application de la règle du tire-bouchon impose alors le sens du vecteur unitaire \vec{n} . On exprime ensuite le flux Φ du champ magnétique à travers le circuit puis la f.é.m. induite $e(t)$. Le sens du courant induit est déduit du signe de $e(t)$.

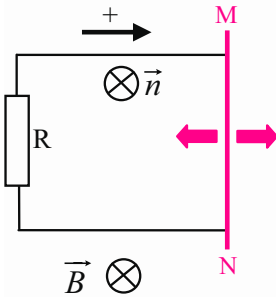
Si $e(t) > 0$, le courant induit circule dans le sens positif choisi ; si $e(t) < 0$, le courant induit circule dans le sens opposé au sens positif choisi.

3. EN PRATIQUE...

- Étudions le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique uniforme et constant.

Un circuit électrique comprenant une résistance et terminé par une tige conductrice mobile MN est placé dans un champ magnétique \vec{B} constant et uniforme, de direction perpendiculaire au plan du circuit. Montrons qu'un déplacement de la tige conductrice MN induit un courant électrique dans le circuit, dont le sens dépend du sens de déplacement de la tige.

MN est placé dans un champ magnétique \vec{B} constant et uniforme, de direction perpendiculaire au plan du circuit. Montrons qu'un déplacement de la tige conductrice MN induit un courant électrique dans le circuit, dont le sens dépend du sens de déplacement de la tige.



Le flux du champ magnétique à travers le circuit varie au cours du temps par l'intermédiaire de la variation de la surface S du circuit. Choisissons un sens positif sur le circuit. La règle du tire-bouchon fixe alors le sens du vecteur unitaire \vec{n} normal à la surface du circuit. Le champ magnétique \vec{B} étant uniforme sur la surface du circuit, le flux du champ magnétique s'écrit : $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = BS$

La f.é.m. induite $e(t)$ se déduit de la loi de Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt}$, B étant constant.

Ainsi si la tige MN est déplacée vers la droite (S augmente) alors $e(t) < 0$: le courant induit circule dans le sens opposé au sens positif choisi. Si la tige MN est déplacée vers la gauche (S décroît), alors $e(t) > 0$: le courant induit circule dans le sens positif choisi.

- Étudions le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable.

Un solénoïde infini, d'axe Oz , de rayon R , comportant n spires par unité de longueur, est parcouru par un courant variable $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. On rappelle que le champ magnétique produit par un solénoïde infini est uniforme et égal à :

$$\begin{cases} \vec{B}(t) = \mu_0 n i(t) \vec{k} & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{B}(t) = \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

Un cadre carré placé dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) entoure le solénoïde. Montrons qu'un courant induit sinusoïdal circule dans le cadre.

Le flux du champ magnétique à travers le cadre varie au cours du temps par l'intermédiaire de la variation du champ magnétique au cours du temps. Choisissons un sens positif sur le cadre. La règle du tire-bouchon fixe alors le sens du vecteur unitaire \vec{n} normal à la surface du cadre.

Exprimons le flux du champ magnétique à travers la surface S du cadre :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ or } \vec{B}(t) = \vec{0} \text{ à l'extérieur du solénoïde donc le flux n'est non nul}$$

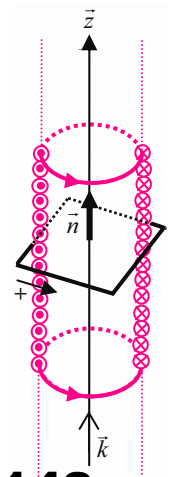
qu'à travers la section $S_{sol} = \pi R^2$ du solénoïde :

$$\Phi = \iint_{S_{sol}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{sol}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 n i(t) S_{sol} = \mu_0 n i(t) \pi R^2, B \text{ étant uniforme sur}$$

la section du solénoïde.

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 n \pi R^2 \frac{di}{dt} = \mu_0 n \pi R^2 i_0 \omega \sin(\omega t)$$

Le cadre est donc parcouru par un courant sinusoïdal orienté dans le sens positif choisi.



18 Équations de Maxwell

1. EN QUELQUES MOTS...

Les lois locales décrivant les propriétés du champ électromagnétique en tout point de l'espace sont établies en régime permanent (indépendant du temps). Ces lois, qui constituent les équations de Maxwell, sont obtenues à partir des équations intégrales comme le théorème de Gauss ou le théorème d'Ampère. Les équations de Maxwell générales qui permettent de décrire les phénomènes électromagnétiques dépendant du temps, tels que l'induction, sont ensuite énoncées.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Équations de Maxwell en régime permanent

Présentons, en régime permanent, le passage des équations intégrales aux équations locales :

Forme intégrale	Relations de passage	Forme locale
<p>Théorème de Gauss</p> $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q^{\text{int}}$ <p>(fiche 47)</p>	<p>– Théorème de Green-Ostrogradski (annexe B) :</p> $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E} \, d\mathcal{V}$ <p>– Charge Q^{int} contenue à l'intérieur de la surface de Gauss :</p> $Q^{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$	<p>Équation de Maxwell-Gauss :</p> $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ <p>\vec{E} : champ électrostatique (V.m^{-1}) ρ : densité volumique de charge (C.m^{-3}).</p>
<p>Circulation du champ électrostatique nulle sur un contour fermé (\mathcal{C}) :</p> $C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ <p>(fiche 45)</p>	<p>Théorème de Stokes (annexe B) :</p> $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$	<p>Équation de Maxwell-Faraday :</p> $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ <p>\vec{E} : champ électrostatique (V.m^{-1})</p>
<p>Théorème d'Ampère :</p> $C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlacé}}$ <p>(fiche 53)</p>	<p>– Théorème de Stokes (annexe B) :</p> $\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$ <p>– Courant électrique enlacé par le contour d'Ampère (\mathcal{C}) :</p> $I_{\text{enlacé}} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$	<p>Équation de Maxwell-Ampère :</p> $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ <p>\vec{B} : champ magnétostatique (T) \vec{j} : vecteur densité de courant électrique (A.m^{-2})</p>
<p>Flux du champ magnétostatique nul à travers une surface fermée S :</p> $\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ <p>(fiche 56)</p>	<p>Théorème de Green-Ostrogradski (annexe B) :</p> $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{B} \, d\mathcal{V}$	<p>Équation de Maxwell-Flux :</p> $\text{div } \vec{B} = 0$ <p>\vec{B} : champ magnétostatique (T)</p>

b) Équations de Maxwell en régime dépendant du temps

Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère sont modifiées en régime dépendant du temps ; elles couplent le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} . Les quatre équations de Maxwell s'écrivent alors :

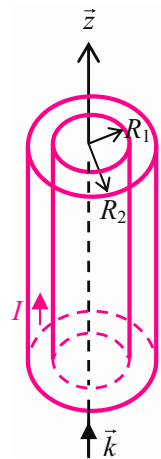
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

3. EN PRATIQUE...

Déterminons le champ magnétostatique $\vec{B}(P)$ créé en tout point P de l'espace par un tube conducteur creux infiniment long, parcouru par un courant d'intensité I , avec un vecteur densité volumique de courant \vec{j} uniforme et selon l'axe $O\vec{z}$ du tube. On note R_1 le rayon intérieur du tube et R_2 son rayon extérieur. Montrons que l'équation locale de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ permet de retrouver le résultat obtenu précédemment par le théorème d'Ampère (fiche 53).

Nous avons montré que : $\vec{B}(P) = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$ dans la base de coordonnées cylindriques. L'expression de $\text{rot } \vec{B}$ dans cette base se réduit donc à :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} \vec{k} \quad (\text{Annexe B}).$$



Écrivons l'équation de Maxwell-Ampère pour chacune des régions de l'espace :

- Si $r \leq R_1$, $\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = 0 \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{C_1}{r}$ où C_1 est une constante. Or, $B_\theta(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

- Si $R_1 \leq r \leq R_2$, $\vec{j} = j \vec{k} \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \mu_0 j \Leftrightarrow B_\theta(r) = \mu_0 j \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$ où C_2 est une constante.

- Si $r \geq R_2$, $\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow B_\theta(r) = \frac{C_3}{r}$ où C_3 est une constante.

Les constantes sont déterminées avec les conditions de continuité en $r = R_1$ et $r = R_2$.

On obtient ainsi l'expression du champ magnétostatique en fonction de r :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r \leq R_1 \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \vec{u}_\theta \text{ pour } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2r} (R_2^2 - R_1^2) \vec{u}_\theta \text{ pour } r \geq R_2 \end{array} \right.$$

Or la densité volumique de courant j est reliée à l'intensité I par la relation : $I = j (\pi R_2^2 - \pi R_1^2)$.

On retrouve bien l'expression du champ magnétostatique obtenue précédemment par le théorème d'Ampère.

19 Réflexion et réfraction

1. EN QUELQUES MOTS...

Lorsque la lumière passe d'un milieu transparent à un autre, sa trajectoire est déviée. De plus, une partie de la lumière est réfléchiée dans le milieu d'origine. Ces phénomènes appelés respectivement réfraction et réflexion sont décrits par les lois de Snell-Descartes.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

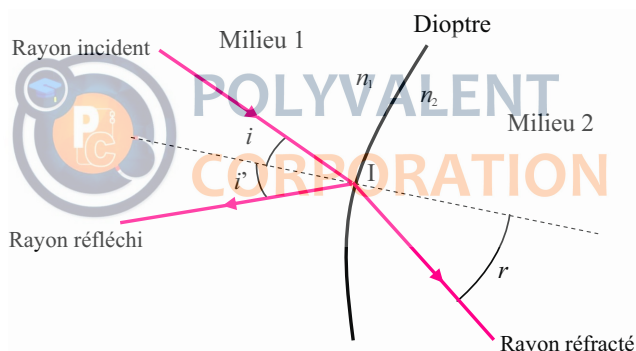
a) Lois de la réflexion et de la réfraction : lois de Snell-Descartes

On appelle **dioptre** la surface séparant deux milieux transparents d'indices optiques différents.

On note n_1 l'indice optique du milieu 1 et n_2 celui du milieu 2.

Un rayon lumineux dans le milieu 1 intercepte le dioptre en un point noté I appelé point d'incidence. Ce rayon, dit **incident**, donne lieu à un rayon **réfracté** dans le milieu 2 et à un rayon **réfléchi** dans le milieu 1.

On appelle **plan d'incidence** le plan contenant le rayon incident au point I et la normale au dioptre en ce point.



Les lois de Snell-Descartes régissent la réflexion et la réfraction de la lumière sur le dioptre :

→ Lois de la réflexion :

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.
- Le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident par rapport à la normale au dioptre ; l'angle de réflexion i' est égal à l'angle d'incidence i .

→ Lois de la réfraction :

- Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.
- L'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

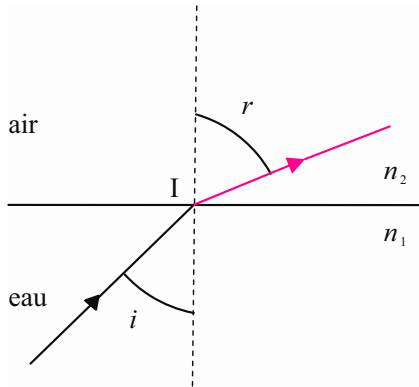
b) Phénomène de réflexion totale

Prenons l'exemple d'un dioptre plan séparant deux milieux d'indices optiques n_1 (milieu 1) et n_2 (milieu 2). Considérons un rayon incident sur ce dioptre dans le milieu 1. Deux cas peuvent se présenter suivant que le milieu 1 est plus réfringent (plus réfracteur) ou moins réfringent que le milieu 2 :

	$n_1 < n_2$	$n_1 > n_2$
Comparaison entre les angles d'incidence et de réfraction	La 2 ^e loi de la réfraction, $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, implique : $i > r$. Ainsi, le rayon réfracté se rapproche de la normale.	La 2 ^e loi de la réfraction, $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, implique : $i < r$. Ainsi, le rayon réfracté s'écarte de la normale.
Schéma	<p>Rayon incident Rayon réfléchi</p> <p>Milieu 1</p> <p>Milieu 2</p> <p>Rayon réfracté</p>	<p>Rayon incident Rayon réfléchi</p> <p>Milieu 1</p> <p>Milieu 2</p> <p>Rayon réfracté</p>
Angle limite	<p>Le rayon réfracté existe donc quel que soit l'angle d'incidence i compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.</p> <p>L'angle de réfraction limite r_{lim} est obtenu pour $i = \frac{\pi}{2}$:</p> $n_1 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \sin r_{\text{lim}}$ $\Leftrightarrow r_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)$	<p>Lorsque i varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il existe un angle d'incidence limite i_{lim} au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté. L'angle d'incidence limite i_{lim} est obtenu pour $r = \frac{\pi}{2}$:</p> $n_1 \sin i_{\text{lim}} = n_2 \sin \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \frac{n_2}{n_1}$ <p>Ainsi, si $i > i_{\text{lim}}$, il n'y a pas de rayon réfracté ; on dit qu'il y a réflexion totale.</p>

3. EN PRATIQUE...

- Un rayon lumineux se propageant dans l'eau arrive avec un angle d'incidence $i = 45^\circ$ sur un dioptre eau-air. On donne les indices de réfraction de l'eau $n_1 = 1,33$ et de l'air $n_2 = 1,00$. Cherchons s'il existe un rayon réfracté.
- Le rayon passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent ; il peut donc être totalement réfléchi si $i \geq i_{\text{lim}}$ où i_{lim} est l'angle limite de réflexion totale. Calculons i_{lim} :



$$i_{\text{lim}} = \text{Arc sin} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) = 48,8^\circ.$$

$i < i_{\text{lim}} \Rightarrow$ il existe un rayon réfracté.

Calculons l'angle de réfraction r :

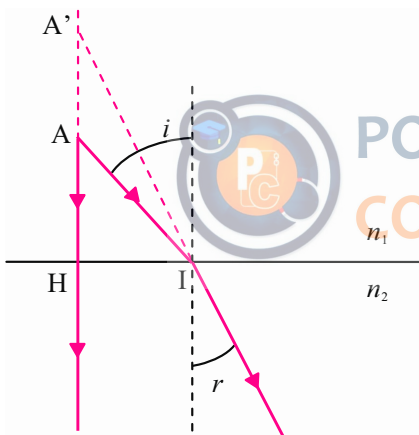
$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \Leftrightarrow \sin r = \frac{1,33}{1,00} \sin 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow r = 70,1^\circ$$

On peut donc tracer le rayon réfracté, en rouge sur la figure.

• Étudions le **stigmatisme du dioptre plan**.

Un dioptre plan sépare deux milieux d'indices optiques n_1 (milieu 1) et n_2 (milieu 2) avec $n_1 < n_2$. Considérons un point objet A réel dans le milieu 1 et H son projeté orthogonal sur la surface du dioptre. Traçons l'image A' de A .



Le rayon AH normal à la surface du dioptre se réfracte sans déviation. L'image A' de A se trouve donc sur la droite (AH) .

Traçons un second rayon AI arrivant sur le dioptre en I avec un angle d'incidence i et se réfractant avec un angle de réfraction r tel que :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

Les deux rayons émergents étant divergents, l'image A' est virtuelle et située à l'intersection des prolongements des rayons émergents.

On note que A et A' sont du même côté du dioptre : si l'objet A est réel, l'image A' est virtuelle et inversement.

→ Étudions le stigmatisme rigoureux du dioptre plan :

La propriété de stigmatisme rigoureux est vérifiée si la position de l'image ponctuelle A' est indépendante de l'angle d'incidence i du rayon AI .

On a les relations géométriques suivantes :

$$\begin{cases} \tan i = \frac{HI}{HA} \\ \tan r = \frac{HI}{HA'} \end{cases} \Rightarrow HA' = HA \frac{\tan i}{\tan r}$$

Sachant que $n_1 \sin i = n_2 \sin r$, on peut exprimer HA' en fonction de HA et i :

$$HA' = HA \frac{\sin i \cos r}{\sin r \cos i} \Leftrightarrow HA' = HA \frac{n_2 \sqrt{1 - \sin^2 r}}{n_1 \cos i}$$

$$\Leftrightarrow HA' = HA \frac{n_2}{n_1} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i}}{\cos i} \Leftrightarrow HA' = HA \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{n_1 \cos i}.$$

Cette expression montre que lorsque l'angle d'incidence i varie, la distance HA' ne reste pas constante. Ainsi, la position de l'image de A n'est pas unique : **le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique pour un point objet A quelconque.**

Le stigmatisme rigoureux n'est obtenu que pour deux positions particulières de l'objet ponctuel A : à l'infini et sur la surface du dioptre.

→ Étudions les conditions de stigmatisme approché du dioptre plan :

Si l'angle d'incidence i est faible, alors : $\cos i \approx 1$ et $n_1^2 \sin^2 i \ll n_2^2$.

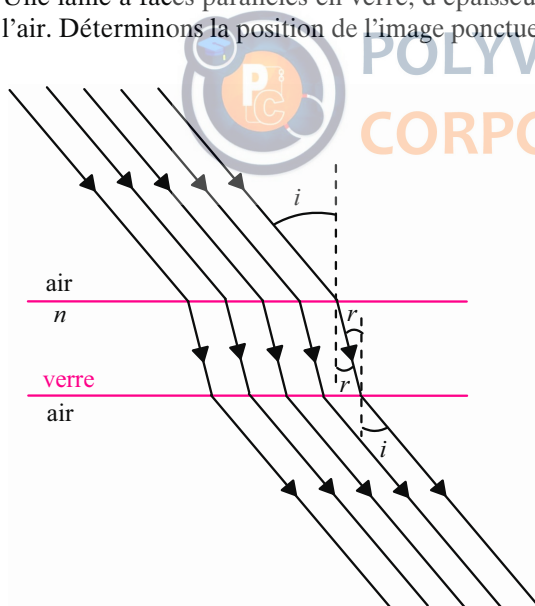
L'équation précédente devient : $HA' = HA \frac{n_2}{n_1}$.

Ainsi, lorsque l'angle d'incidence i est faible, la distance HA' est indépendante de i : la position de A' devient unique.

Il y a stigmatisme approché pour tout point objet à distance finie qui n'envoie sur la surface du dioptre qu'un faisceau de rayons peu inclinés par rapport à la normale.

• Étudions l'image par une lame à faces parallèles d'un point objet à l'infini.

Une lame à faces parallèles en verre, d'épaisseur e , d'indice optique $n = 1,5$, est placée dans l'air. Déterminons la position de l'image ponctuelle A' d'un objet ponctuel A à l'infini.



L'objet ponctuel A envoie un faisceau parallèle incliné d'un angle $i = 40^\circ$ par rapport à la normale à la lame.

Les rayons sont réfractés sur le premier dioptre air-verre. On obtient donc dans la lame un faisceau parallèle incliné d'un angle r tel que :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow r = 25,4^\circ$$

Les rayons sont incidents sur le dioptre verre-air avec un angle d'incidence $r = 25,4^\circ$. L'angle d'émergence r' des rayons est donc donné par la relation :

$$n \sin r = \sin r'$$

Ainsi $r' = i = 40^\circ$.

On obtient ainsi en sortie de la lame un faisceau parallèle dont la direction est la même que celle du faisceau incident. L'image d'un objet ponctuel à l'infini par une lame à faces parallèles est à l'infini, dans la même direction que l'objet.

20 La thermodynamique

1. EN QUELQUES MOTS...

Les principales notions utilisées en thermodynamique (système, état d'équilibre thermodynamique, transformation) sont définies. La méthode de résolution d'un problème de thermodynamique est décrite.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Système thermodynamique

- Le **système** est l'objet de l'étude. Les systèmes thermodynamiques sont des systèmes macroscopiques : ils comportent un grand nombre de particules. Par exemple, le système constitué de 3 g d'eau est un système macroscopique, il contient 10^{23} molécules d'eau. Le **milieu extérieur** est, par définition, le complément du système dans « l'Univers ».
- Les échanges avec le milieu extérieur (échange de matière, échange d'énergie) ont lieu au niveau de la surface séparant celui-ci du système. D'où les différents systèmes :
 - **Isolé** : le système n'a aucun échange avec le milieu extérieur.
 - **Fermé** : le système échange de l'énergie, mais pas de matière avec le milieu extérieur.
 - **Ouvert** : le système échange de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur.

Un système est **homogène**, si ses propriétés sont les mêmes en tous ses points.

b) État d'équilibre thermodynamique et variables thermodynamiques

Les propriétés du système sont décrites par un petit nombre de variables macroscopiques. Définissons l'équilibre thermodynamique

- Un **état stationnaire** est un état décrit par des variables indépendantes du temps.
- Un **état d'équilibre thermodynamique** est un état où le système est dans un état **stationnaire** et est **homogène**. Il est décrit par des **variables thermodynamiques** qui sont **indépendantes du temps** et ont la **même valeur en tout point** du système, par exemple la pression, la température. L'état d'équilibre thermodynamique est un état d'équilibre global.
- Propriétés des variables thermodynamiques

→ Variables extensives, variables intensives

Deux systèmes identiques dans le même état d'équilibre thermodynamique sont réunis en un seul système. Les variables thermodynamiques décrivant le système global sont :

- Soit multipliées par 2, ces variables sont appelées **variables extensives**, par exemple la masse, le volume, l'énergie... Les variables extensives vérifient la propriété d'additivité.
- Soit identiques à leurs valeurs initiales, ces variables sont appelées **variables intensives**, par exemple la pression, la température, la masse volumique...

→ Toutes les variables décrivant un système à l'équilibre thermodynamique ne sont pas indépendantes. Elles sont reliées par une relation appelée **équation d'état**.

Considérons, par exemple, l'état d'équilibre thermodynamique d'un gaz. Le nombre n de moles, la pression p , la température T et le volume V décrivent l'état du gaz. Ces variables ne sont pas indépendantes et sont reliées par l'équation d'état : $p = f(n, V, T)$.

Si le système gazeux est fermé, n est fixé, il n'y a donc que deux variables indépendantes. Les états d'équilibre thermodynamique de ce système peuvent être représentés dans un espace à deux dimensions muni d'axes orthonormés, par exemple le diagramme de Watt (p, V).

c) Transformation

- Une **transformation** est une évolution du système d'un état à un autre. Dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre, l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre thermodynamique. On distingue :
 - **transformation spontanée** : les états intermédiaires ne sont pas nécessairement des états d'équilibre (les variables thermodynamiques du système ne sont pas définies à cause des inhomogénéités du système lors de la transformation).
 - **transformation quasistatique** : c'est une suite d'états d'équilibre du système ; c'est donc une transformation suffisamment lente. Les variables définissant le système sont connues dans tous les états intermédiaires.
- Transformations particulières

Transformation	Définition
cyclique	l'état final est identique à l'état initial
isochore	le volume du système reste constant lors de la transformation
monobare	la pression du milieu extérieur est constante durant la transformation
monotherme	la température du milieu extérieur est constante durant la transformation
isobare	la pression du système est constante durant la transformation
isotherme	la température du système est constante durant la transformation

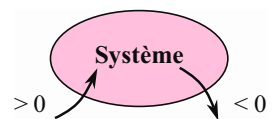
Les transformations **isobare** et **isotherme** sont nécessairement **quasistatiques**, car l'état du système est défini pendant toute la transformation.

d) Échanges d'énergie

- Le **travail** est le transfert d'énergie associé au travail de forces non conservatives (ne dérivant pas d'une énergie potentielle). Il est lié à des mouvements macroscopiques ; exemple : le travail des forces de pression.
- Le **transfert thermique** (ou **chaleur**) correspond à tout transfert d'énergie qui n'est pas du travail. Au niveau microscopique, il correspond à un transfert d'énergie d'une forme d'énergie à de l'énergie microscopique d'agitation moléculaire existant dans tout système.

Les **échanges** sont des **grandeurs algébriques** qui sont :

- **positives** si elles sont **reçues** du milieu extérieur par le système ;
- **négatives** si elles sont **cédées** au milieu extérieur par le système.



- Différents types de parois peuvent limiter un système :

→ les **parois adiabatiques ou calorifugées** ne permettent pas le transfert thermique, la transformation subie par le système est appelée **transformation adiabatique**.

→ les **parois diathermanes** permettent le transfert thermique

→ lorsque les **parois** sont **fixes et rigides**, le travail des forces de pression est nul.

3. EN PRATIQUE...

Pour traiter un problème en thermodynamique, il est nécessaire de :

1. définir le système étudié ; le choix n'est pas unique
2. caractériser la transformation subie par le système
3. caractériser l'état initial et l'état final.

Cela permet de déterminer, en particulier, les variables inconnues du problème.

Ensuite, les conditions d'équilibre, l'équation d'état et les principes de la thermodynamique sont utilisés pour résoudre le problème.

20 Gaz et phases condensées

1. EN QUELQUES MOTS...

Dans la vie courante, on parle de solides, de liquides et de gaz. Les gaz sont parfois décrits par le modèle du gaz parfait ; les solides et les liquides peuvent dans certains cas être modélisés par une phase condensée indilatable et incompressible. L'aspect microscopique de ces modèles est étudié.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) États de la matière

- Aspect macroscopique :

Les **coefficients thermoélastiques** relient la variation relative de volume à la variation de température (à pression constante) ou à la variation de pression (à température constante).

$$\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \begin{array}{l} V : \text{volume (m}^3\text{)} \\ \alpha_p : \text{coefficient de dilation thermique isobare (unité : K}^{-1}\text{)} \\ T : \text{température} \end{array}$$
$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \begin{array}{l} \chi_T : \text{compressibilité isotherme (unité : Pa}^{-1}\text{) avec } \chi_T > 0 \\ p : \text{pression (Pa)} \end{array}$$

L'équation d'état d'une masse donnée $V=f(p,T)$ s'obtient à partir des coefficients thermoélastiques. En différentiant, on obtient :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp \quad \Leftrightarrow \quad dV = V\alpha_p dT - V\chi_T dp.$$

Donnons quelques ordres de grandeur des coefficients thermoélastiques pour un solide, un liquide et un gaz à la pression atmosphérique et à température ambiante :

Matériau	α_p (K ⁻¹)	χ_T (Pa ⁻¹)	masse volumique ρ (kg.m ⁻³)
aluminium	7,2 10 ⁻⁵	1,4 10 ⁻¹¹	2,7 10 ³
eau	2,1 10 ⁻⁴	4,6 10 ⁻¹⁰	10 ³
dioxygène	3,3 10 ⁻³	10 ⁻⁵	1,43

Les masses volumiques des liquides et des solides sont comparables et très supérieures à celles des gaz. Les liquides et les solides ont des compressibilités isothermes très inférieures à celles des gaz, les liquides étant plus compressibles que les solides. **Les solides et les liquides sont appelés phases condensées.**

- Aspect microscopique :

- Le solide est le plus ordonné, il possède un ordre à longue portée dû aux interactions attractives entre les particules qui le composent (atomes, molécules, ions). L'effet de la température (agitation thermique) est de faire vibrer les particules autour de leur position moyenne.
- Le gaz est le plus désordonné. Les forces attractives sont à courte portée (de l'ordre de quelques tailles moléculaires). L'agitation thermique induit un désordre total avec de nombreux chocs entre les molécules de gaz ou avec les parois du récipient qui le contient.
- Le liquide est intermédiaire. Chaque molécule conserve des interactions avec ses plus proches voisins, mais est en mouvement par rapport aux autres. Il en résulte un ordre à courte portée.

b) Phase condensée indilatable et incompressible

Les liquides et les solides peuvent être décrits, en première approximation, par cette phase.

Elle est définie par : $\alpha_p = 0$ et $\chi_T = 0$. L'équation devient : $dV = 0 \Rightarrow \boxed{V = V_0}$

C'est l'équation d'état : **le volume d'une masse de phase condensée indilatable et incompressible est constant, indépendant de la température et de la pression.**

c) Gaz parfait

- Le gaz parfait est un gaz dans lequel les molécules sont sans interaction. Il correspond au cas limite où la densité moléculaire est faible, si bien que la distance moyenne entre molécules est grande ; les interactions entre molécules sont alors négligeables.
- L'équation d'état du gaz parfait a été déterminée expérimentalement au XVIII^{ème} siècle sur l'air dans un domaine limité de pression et de température. Elle s'écrit :

$$\boxed{pV = nRT} \quad \left| \begin{array}{l} p : \text{pression du gaz (Pa)} ; \\ n : \text{nombre de moles de gaz (mol)} ; \\ R : \text{constante des gaz parfaits} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} V : \text{volume du gaz (m}^3\text{)} \\ T : \text{température du gaz (Kelvin, K)} \\ \text{avec } R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}\text{.mol}^{-1} \end{array} \right.$$

→ La température T est la **température thermodynamique exprimée en K** ; elle est reliée à la température en °C par : $T(\text{en K}) = T(\text{en } ^\circ\text{C}) + 273,15$. La température thermodynamique est nécessairement positive et est celle qui intervient en thermodynamique.

→ Un modèle microscopique du gaz parfait (molécules ponctuelles et hypothèse statistique sur la distribution des vitesses des molécules) conduit à cette équation d'état.

d) Gaz réels

Les gaz parfaits ne peuvent pas être liquéfiés, car il n'y a pas d'interaction.

Pour décrire les gaz réels, un modèle souvent utilisé est le gaz de van der Waals qui tient compte de la taille finie des molécules et des forces attractives entre les molécules, ces forces diminuant quand le volume molaire augmente.

Des tables thermodynamiques permettent aussi de décrire ces gaz.

3. EN PRATIQUE...

- Déterminons les coefficients thermoélastiques du gaz parfait :

$$\text{le coefficient de dilation thermique isobare } \alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V} \left(\frac{nR}{p} \frac{\partial T}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}$$

$$\text{la compressibilité isotherme } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(nRT \frac{\partial (p^{-1})}{\partial p} \right)_T = -\left(\frac{nRT}{V} \right) \left(-\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p}$$

- Déterminons la variation relative de volume de l'eau quand la pression varie de 10^5 Pa à 10^6 Pa à $T = 20^\circ\text{C}$. La compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est indépendante de p . Le volume ne dépend alors que de p ; la définition de la compressibilité isotherme donne :

$$\frac{dV}{V} = -\chi_T dp \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\int_{p_1}^{p_2} \chi_T dp \Leftrightarrow \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = -\chi_T (p_2 - p_1) \text{ ou } V_2 = V_1 e^{-\chi_T (p_2 - p_1)}$$

Comme $\chi_T (p_2 - p_1) = 4,14 \cdot 10^{-4}$, la relation peut donc être approximée par :

$$V_2 \cong V_1 (1 - \chi_T (p_2 - p_1)) \Leftrightarrow \frac{V_2 - V_1}{V_1} \cong -\chi_T (p_2 - p_1) = 4,14 \cdot 10^{-4}$$

Cet ordre de grandeur montre que l'approximation de la phase condensée est justifiée.

21 Travail des forces de pression

1. EN QUELQUES MOTS...

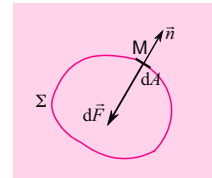
Le travail des forces de pression est un exemple de travail de forces non conservatives.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Définition de la pression

Considérons un fluide au repos. Soit une surface fermée fictive Σ dans ce fluide et dA un élément de surface au point M sur Σ .

La pression au point M est définie à partir de la force $d\vec{F}$ due à l'action du fluide extérieur à Σ agissant sur l'élément de surface dA au voisinage du point M .



$p(M)$: pression au point M

$d\vec{F}$: force exercée sur la surface dA

dA : élément de surface sur Σ au voisinage du point M

\vec{i} : vecteur unitaire normal extérieur à Σ au point M

La pression au point M est un scalaire.

b) Condition d'équilibre mécanique du piston

Un gaz est enfermé dans un cylindre fermé par un piston de surface A . L'ensemble se trouve dans une atmosphère à la pression p_{ext} .

Le système considéré est le gaz ; le milieu extérieur est constitué du cylindre, du piston et de l'atmosphère. Le vecteur \vec{i} est le vecteur unitaire normal extérieur au piston dans la direction x .

Le gaz est dans un état d'équilibre thermodynamique à la pression p .

La force exercée par l'atmosphère sur le piston est : $\vec{F}_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} A \vec{i}$.

La force exercée par le gaz sur le piston est : $\vec{F}_{\text{gaz}} = p A \vec{i}$

À l'équilibre mécanique du piston : $\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{gaz}} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{p = p_{\text{ext}}}$.

c) Travail élémentaire des forces de pression reçu par le système du milieu extérieur

Lorsque le piston subit un déplacement infinitésimal dx dans la direction \vec{i} , le travail élémentaire δW reçu par le gaz est : $\delta W = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{i} dx = -p_{\text{ext}} A dx$.

En appelant $dV = A dx$, la variation de volume du système, ce travail s'écrit : $\boxed{\delta W = -p_{\text{ext}} dV}$.

• Pourquoi la pression extérieure intervient-elle dans l'expression du travail élémentaire ?

L'atmosphère, qui a une taille beaucoup plus grande que le système, n'est pas perturbée par le mouvement du piston. La pression extérieure est toujours définie pendant la transformation, ce qui n'est pas le cas de la pression du système.

- **Le travail W dépend du chemin suivi.** Lors d'une transformation infinitésimale, le travail échangé est une forme différentielle notée δW .

Lors d'une transformation de (I) à (F) le long du chemin (\mathcal{C}), le travail W des forces de pression est l'intégrale le long du chemin (\mathcal{C}) :

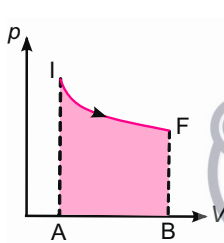
$$W = - \int_{V_I(\mathcal{C})}^{V_F} p_{\text{ext}} dV$$

- L'expression élémentaire du travail des forces de pression est le produit d'une variable intensive ($-p$) par la variation d'une grandeur extensive (V).

D'autres travaux peuvent être utilisés, ceux-ci auront la même forme. Prenons l'exemple d'un fil élastique soumis à une tension \mathcal{F} , il subit un allongement $d\ell$ et reçoit du milieu extérieur le travail : $\delta W = \mathcal{F} d\ell$.

d) Expression du travail des forces de pression dans quelques cas particuliers

- **Transformation isochore** (volume du système constant) : $W = 0$.
- **Transformation monobare** (à pression extérieure constante) : $W = -p_{\text{ext}} \Delta V$ (ΔV est la variation de volume lors de la transformation).
- **Transformation quasistatique** : c'est une suite d'états d'équilibre entre l'état initial (I) et l'état final (F), par suite la pression p du système en tout point de la transformation est définie et égale à la pression extérieure : $p_{\text{ext}} = p \Rightarrow$ Le travail élémentaire s'écrit : $\delta W = -pdV$.



Tous les points de la transformation peuvent être représentés dans le diagramme p, V (figure ci-contre) ; le chemin suivi (\mathcal{C}) est la courbe rouge entre (I) et (F).

Le travail échangé W lors de la transformation est : $W = - \int_{V_I(\mathcal{C})}^{V_F} p dV$.

L'aire sous la courbe (zone rouge) correspond au travail reçu par le système. Cette aire délimitée par la courbe IFBA est orientée par le sens de la transformation.

Le travail est positif si la courbe IFBA est parcourue dans le sens trigonométrique.

Sur la figure, c'est le sens opposé : le travail est donc négatif ; le travail est fourni par le système au milieu extérieur. La transformation étudiée est la détente d'un gaz.

3. EN PRATIQUE...

Une mole de gaz parfait monoatomique est comprimé de la pression initiale $p_I = 10^5$ Pa à la pression finale $p_F = 2 \cdot 10^5$ Pa lors d'une transformation isotherme à la température $T = 300$ K. Déterminons le travail W reçu par le gaz.

La transformation étant isotherme, elle est quasistatique.

\Rightarrow La pression p du système est alors connue en tout point de la transformation.

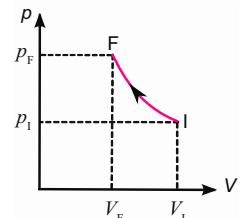
Cette transformation peut être représentée dans le diagramme p, V . L'équation de la courbe est : $pV = RT = \text{cste}$; c'est l'équation d'une hyperbole.

En tout point de la transformation $p_{\text{ext}} = p \Rightarrow \delta W = -p_{\text{ext}} dV = -pdV$.

Le travail W reçu par le gaz lors de la transformation s'écrit donc :

$$W = - \int_{V_I}^{V_F} p dV = -RT \int_{V_I}^{V_F} \frac{dV}{V} = -RT \ln \left(\frac{V_F}{V_I} \right).$$

$$p_I V_I = p_F V_F \Rightarrow W = -RT \ln \left(\frac{p_I}{p_F} \right) = RT \ln \left(\frac{p_F}{p_I} \right) = 1,73 \text{ kJ}.$$



22 Premier Principe

1. EN QUELQUES MOTS...

L'existence de forces non conservatives (forces de frottements...) entraîne la non-conservation de l'énergie mécanique. L'énergie totale d'un système est définie ainsi que son énergie interne. L'équation de bilan de l'énergie totale d'un système fermé correspond au premier principe.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

Considérons un système **fermé**.

a) Définition de l'énergie totale

$$E_{\text{tot}} = E_C + E_p \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\text{tot}} : \text{énergie totale du système (J)} \\ E_C : \text{énergie cinétique du système (J)} \\ E_p : \text{énergie potentielle du système (J)} \end{array} \right.$$

À l'aide du théorème de Koenig (fiche 16), l'énergie cinétique E_C du système s'écrit :

$$E_C = E_K + E_T \quad \left\{ \begin{array}{l} E_C : \text{énergie cinétique du système} \\ E_K : \text{énergie cinétique macroscopique due au mouvement d'ensemble} \\ E_T : \text{énergie cinétique microscopique dans le référentiel barycentrique} \\ \quad (\text{énergie d'agitation thermique}). \end{array} \right.$$

L'énergie potentielle E_p du système est donnée par :

$$E_p = E_{p\text{ext}} + E_{p\text{int}} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_p : \text{énergie potentielle du système} \\ E_{p\text{ext}} : \text{énergie potentielle due aux forces extérieures dérivant d'un} \\ \quad \text{potentiel} \\ E_{p\text{int}} : \text{énergie potentielle intérieure (on suppose que les forces inté-} \\ \quad \text{rieures d'interaction dérivent d'un potentiel et qu'elles sont à courte} \\ \quad \text{portée)} \end{array} \right.$$

L'énergie totale est une **grandeur extensive**. Elle est définie à une constante près.

b) Définition de l'énergie interne

L'énergie totale du système E_{tot} se met sous la forme :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{Macro}} + U \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\text{tot}} : \text{énergie totale du système} \\ E_{\text{Macro}} : \text{énergie macroscopique } E_{\text{Macro}} = E_K + E_{p\text{ext}} \\ U : \text{énergie microscopique } U = E_T + E_{p\text{int}} \end{array} \right.$$

- La partie microscopique U est par définition l'énergie interne U du système.

L'énergie interne U d'un système est son **énergie microscopique dans le référentiel barycentrique**.

On en déduit que l'énergie interne U est aussi une grandeur extensive.

c) Fonction d'état

- Définition : Une **fonction d'état** est une fonction dont la variation lors d'une transformation ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Cette variation ne dépend donc pas du chemin suivi lors de la transformation.

- Les énergies cinétiques E_C et les énergies potentielles E_p sont des fonctions d'état. En conséquence, l'énergie totale E_{tot} et l'énergie interne U sont des fonctions d'état.
- Lors d'une transformation finie de l'état initial (I) à l'état final (F), la variation d'une fonction d'état $f(x, y)$ dépendant de deux variables est notée Δf et donnée par :

$$\Delta f = f(x_F, y_F) - f(x_I, y_I)$$

où les indices I et F représentent respectivement l'état initial (I) et l'état final (F).

- Une fonction d'état est une différentielle totale (Annexe A).

d) Premier principe pour un système fermé

- Énoncé : pour un système fermé évoluant entre deux états d'équilibre thermodynamique (I) et (F), la variation d'énergie totale ΔE_{tot} est égale à la somme du travail W et du transfert thermique Q reçus du milieu extérieur :

$$\Delta E_{\text{tot}} = E_{\text{tot}}(F) - E_{\text{tot}}(I) \\ = W + Q$$

ΔE_{tot} : variation d'énergie totale (J) avec $E_{\text{tot}} = E_{\text{Macro}} + U$

W : travail (des forces non conservatives) reçu du milieu extérieur (J)

Q : transfert thermique reçu du milieu extérieur (J)

Le transfert thermique Q et le travail W dépendent du chemin suivi lors de la transformation.

- Le premier principe est un exemple d'équation de bilan d'une grandeur extensive. Néanmoins, c'est un cas particulier où il n'existe pas de terme de création ou d'annihilation (destruction) d'énergie : la grandeur est dite conservative.
- Considérons quelques cas particuliers :
 - Lorsque le système est isolé : il n'y a pas d'échange d'énergie avec le milieu extérieur $\Rightarrow \Delta E_{\text{tot}} = 0$: l'énergie totale d'un système isolé est conservée.
 - Lorsque le système fermé subit une transformation cyclique : l'état final (F) est identique à l'état initial (I) $\Rightarrow \Delta E_{\text{tot}} = 0$
 - Lorsque le système est au repos ($\Delta E_K = 0$) et soumis à un potentiel extérieur dont les variations sont négligeables ($\Delta E_{p\text{ext}} = 0$) $\Rightarrow \Delta E_{\text{Macro}} = 0 \Leftrightarrow \Delta E_{\text{tot}} = \Delta U$. Le premier principe s'écrit alors : $\Delta U = W + Q$.

e) Capacité thermique à volume constant

La capacité thermique à volume constant \mathcal{C}_V est, par définition : $\mathcal{C}_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ (unité J.K⁻¹). On utilise plus souvent :

- la capacité thermique massique $c_V = \frac{\mathcal{C}_V}{m}$ (unité J. kg⁻¹.K⁻¹) où m est la masse du système ;
- la capacité thermique molaire $C_V = \frac{\mathcal{C}_V}{m} M$ (unité J. mol⁻¹.K⁻¹) où M est la masse molaire.

f) Énergie interne de quelques systèmes simples

Système	Énergie interne molaire U_M	Capacité thermique molaire à volume constant C_V
Gaz parfait	U_M ne dépend que de la température $U_M(T)$ (1 ^{re} loi de Joule)	$C_V(T)$ $dU_M(T) = C_V(T)dT$
Gaz parfait monoatomique	$U_M = \frac{3}{2}RT$	$C_V = \frac{3}{2}R$
Gaz parfait diatomique (températures ordinaires)	$U_M = \frac{5}{2}RT$	$C_V = \frac{5}{2}R$
Gaz parfait (zone restreinte de T)	$U_M = C_V T + U_0$ (U_0 constante)	C_V constante $C_V > \frac{3}{2}R$
Phase condensée incompressible indilatable	$dU_M(T) = C_V(T)dT$	$C_V(T)$
Solide (températures ordinaires)	$U_M = 3RT$	$C_V = 3R$

3. EN PRATIQUE...

- Un corps solide incompressible et indilatable de masse $m = 1$ kg de capacité thermique massique supposée indépendante de la température $c_V = 460 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ en mouvement de translation dans le champ de pesanteur reçoit du milieu extérieur un travail de 21 J, fournit au milieu extérieur un transfert thermique de 28 J alors que sa vitesse varie de 2 m.s^{-1} à 5 m.s^{-1} tandis que son altitude diminue de 3 m. L'accélération de la pesanteur est $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Déterminons la variation de température du solide

→ *Système* : le corps solide, c'est un système fermé.

État initial (I) : vitesse $v_I = 2 \text{ m.s}^{-1}$ et altitude z_I ; température T_I

État final (F) : vitesse $v_F = 5 \text{ m.s}^{-1}$ et altitude $z_F = z_I - 3$; température T_F

→ Énergie échangée : travail $W = 21 \text{ J}$; transfert thermique $Q = -28 \text{ J}$.

→ Variation d'énergie macroscopique : $\Delta E_{\text{Macro}} = \Delta E_K + \Delta E_{p \text{ ext}}$

– variation de l'énergie cinétique macroscopique : $\Delta E_K = \frac{1}{2}m(v_F^2 - v_I^2) = 10,5 \text{ J}$;

– variation de l'énergie potentielle due aux forces extérieures conservatives, dans ce cas les forces de pesanteur, par suite $E_{p \text{ ext}} = mgz \Rightarrow \Delta E_{p \text{ ext}} = mg(z_F - z_I) = -30 \text{ J}$.

→ Le premier principe, pour cette transformation, est donné par :

$$\Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_K + \Delta E_{p \text{ ext}} + \Delta U = W + Q$$

Par suite, la variation d'énergie interne est $\Delta U = W + Q - \Delta E_K - \Delta E_{p \text{ ext}} = 12,5 \text{ J}$.

→ Le solide étant incompressible et indilatable et sa capacité thermique étant indépendante de la température, la variation d'énergie interne ΔU du solide est $\Delta U = mc_V(T_F - T_I)$.

La variation de température du solide est donc :

$$\Delta T = T_F - T_I = \frac{\Delta U}{mc_V} = \frac{12,5}{1 \times 460} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ K} = 27 \text{ mK}.$$

Il y a échauffement du corps solide dû aux frottements.

- Considérons une mole de gaz parfait monoatomique enfermée dans un cylindre fermé par un piston sans masse et sans frottement. Le piston, de surface $A = 1 \text{ dm}^2$, est libre de se déplacer verticalement. Le cylindre et le piston sont calorifugés. L'accélération de la pesanteur est $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$.

Le système est en contact avec l'atmosphère à la pression $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

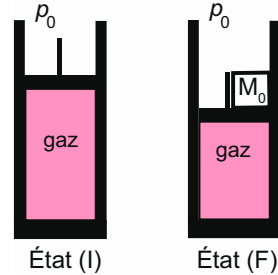
Le système, dans l'état initial (I), est à l'équilibre thermodynamique à la température $T_1 = 300 \text{ K}$.

Une masse $M_0 = 10 \text{ kg}$ est alors posée sur le piston. Au bout d'un certain temps, le gaz atteint l'état d'équilibre thermodynamique (F).

Déterminons l'état final (F) du gaz : (p_F , T_F , V_F).

→ *Système* : gaz (système fermé)

→ *État initial* (I) : $T_1 = 300 \text{ K}$



L'équilibre mécanique du piston entraîne : $p_1 = p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

Utilisons l'équation d'état pour obtenir le volume initial du gaz :

$$V_1 = n \frac{RT_1}{P_1} = 1 \times \frac{8,32 \times 300}{10^5} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

→ Quand la masse est posée sur le piston, la pression extérieure devient :

$$p_{ext} = p_0 + \frac{M_0 g}{A} = 10^5 + \frac{10 \times 10}{10^{-2}} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

→ La transformation subie par le système est

– adiabatique, car les parois sont calorifugées ;

– monobare, car la pression extérieure est constante et égale à $p_{ext} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

→ *État final* (F) ; il y a 3 inconnues p_F , T_F , V_F et trois relations :

– l'équilibre mécanique du piston : $p_F = p_{ext} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;

– l'équation d'état $p_F V_F = RT_F$;

– l'expression du premier principe :

Le système étant au repos, le premier principe s'écrit : $\Delta U = W + Q$

La transformation étant adiabatique : $Q = 0 \Rightarrow \Delta U = W$

Le gaz est monoatomique $\Rightarrow \Delta U = \frac{3R}{2}(T_F - T_1)$, car il n'y a qu'une mole.

Le travail lors de cette transformation (monobare à p_{ext}) est $W = -p_{ext}(V_F - V_1)$

$$\Rightarrow \frac{3R}{2}(T_F - T_1) = -p_{ext}(V_F - V_1) = -p_{ext}R \left(\frac{T_F}{p_F} \right) + p_{ext}V_1 = -RT_F + p_{ext}V_1$$

L'état final (F) est défini par :

– la pression finale : $p_F = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;

– la température finale : $T_F = \frac{3}{5}T_1 + \frac{2p_{ext}V_1}{5R} = 312 \text{ K}$;

– le volume final : $V_F = \frac{RT_F}{p_F} = 2,36 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$.

Le gaz a subi une compression adiabatique, ce qui conduit à son échauffement, car en recevant du travail de l'extérieur, son énergie interne augmente.

23 Enthalpie

1. EN QUELQUES MOTS...

L'enthalpie est une fonction d'état qui est bien adaptée pour décrire des systèmes soumis à une transformation monobare où le système est en équilibre avec l'atmosphère dans l'état initial et dans l'état final. L'exemple de la calorimétrie est développé.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

a) Définition de l'enthalpie

- Le système considéré est au repos ; il n'est sensible qu'aux forces de pression. Ce système est en contact avec une atmosphère à la pression p_0 , le système étant en équilibre avec l'atmosphère dans l'état initial (I) et dans l'état final (F).

État initial (I) : pression $p_I = p_0$, volume V_I

État final (F) : pression $p_F = p_0$, volume V_F

- Le système subit une transformation monobare à la pression extérieure p_0 .

Le travail échangé avec le milieu extérieur est : $W = -p_0(V_F - V_I)$

Le transfert thermique avec le milieu extérieur est appelé Q .

- Appliquons le premier principe à ce système (fiche 20) :

$$\Delta U = U_F - U_I = Q - p_0(V_F - V_I)$$
$$p_0 = p_I = p_F \Rightarrow U_F - U_I = Q - (p_F V_F - p_I V_I) \Leftrightarrow (U_F + p_F V_F) - (U_I + p_I V_I) = Q$$
$$\Leftrightarrow \Delta H = H_F - H_I = Q \text{ avec}$$

$H = U + pV$	H : enthalpie (J)	p : pression du système (Pa)
	U : énergie interne (J)	V : volume du système (m^3)

L'enthalpie H est une **grandeur extensive** et une **fonction d'état**, car sa variation ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

b) Expression particulière du premier principe

Un système fermé subit une transformation monobare entre deux états d'équilibre (I) et (F), le système étant en équilibre avec l'atmosphère dans l'état initial et dans l'état final ($p_F = p_I = p_0$). Le travail reçu par le système est la somme du travail des forces de pression et du travail W' des autres forces non conservatives.

La variation d'enthalpie du système **lors de cette transformation** est la somme du transfert thermique Q et du travail W' des autres forces non conservatives reçus par le système :

$$\Delta H = H_F - H_I = Q + W'$$

c) Capacité thermique à pression constante

Elle est notée \mathcal{C}_p (unité J.K^{-1}) ; c'est la dérivée de l'enthalpie par rapport à la température à

pression constante : $\mathcal{C}_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p$.

d) Enthalpie de quelques systèmes simples

- Phases condensées incompressibles et indilatables** (solide ou liquide)

Les capacités thermiques à pression constante et à volume constant sont les mêmes : $\mathcal{C}_p \approx \mathcal{C}_v = \mathcal{C}$.

Par suite, pour une transformation infinitésimale $dH = \mathcal{C}(T) dT$, car \mathcal{C} ne dépend que de T .

• **Gaz parfaits**

Système	Enthalpie molaire H_M	Capacité thermique molaire à pression constante C_p
Gaz parfait	H_M ne dépend que de la température $H_M(T)$ (2 ^e loi de Joule)	$C_p(T)$ $dH_M = C_p(T) dT$
Gaz parfait monoatomique	$H_M = U_M + pV = U_M + RT = \frac{5}{2} RT$	$C_p = \frac{5}{2} R$
Gaz parfait diatomique (températures ordinaires)	$H_M = \frac{7}{2} RT$	$C_p = \frac{7}{2} R$
Gaz parfait diatomique (zone restreinte de T)	$H_M = C_p T + H_0$ (H_0 constante)	C_p est constante

Les capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant d'un gaz parfait

sont reliées par la relation de Mayer : $C_p - C_V = R$. En posant $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$.

3. EN PRATIQUE...

Prenons l'exemple d'une mesure de calorimétrie. Considérons un calorimètre adiabatique fermé par un couvercle dont l'intérieur est à la pression atmosphérique p_0 . La capacité thermique du calorimètre et de ses accessoires est $C_0 = 150 \text{ JK}^{-1}$. Initialement, le calorimètre contient une masse $m_1 = 200 \text{ g}$ de liquide de capacité thermique massique $c_1 = 2850 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$. On y plonge rapidement un bloc de cuivre de masse $m_2 = 250 \text{ g}$ et de capacité thermique massique c_2 pris initialement à la température $T_2 = 80^\circ\text{C}$. Dans l'état final, l'ensemble contenu dans le calorimètre est à la température $T_F = 27,2^\circ\text{C}$. Les solides et les liquides seront supposés incompressibles et indilatables, de capacité thermique massique indépendante de la température.

Déterminons la capacité thermique massique c_2 du bloc de cuivre.

- *Système* : masse m_1 de liquide + calorimètre et accessoires + bloc de cuivre de masse m_2 .
- *État initial* : masse m_1 de liquide + calorimètre et accessoires à T_1 , à la pression $p_1 = p_0$
masse m_2 de cuivre à T_2 , à la pression $p_1 = p_0$
- *État final* : masse m_1 de liquide + calorimètre + masse m_2 de cuivre à T_F , à la pression $p_F = p_0$.
- La transformation est monobare à la pression p_0 et adiabatique (calorimètre adiabatique).
- Le 1^{er} principe appliqué à cette transformation monobare avec $p_1 = p_F = p_0$ s'écrit :

$$\Delta H = Q + W' \text{ or } \begin{cases} W' = 0 : \text{pas de travail autre que celui des forces de pression} \\ Q = 0 : \text{transformation adiabatique} \end{cases} \Rightarrow \Delta H = 0$$

L'enthalpie H étant une fonction d'état, on peut choisir le chemin entre (I) et (F) pour calculer sa variation. Choisissons le chemin fictif suivant :

masse m_1 de liquide + calorimètre à $T_1, p_0 \xrightarrow{1}$ masse m_1 de liquide + calorimètre à T_F, p_0
 masse m_2 de cuivre à $T_2, p_0 \xrightarrow{2}$ masse m_2 de cuivre à T_F, p_0

La variation d'enthalpie pour la transformation 1 est : $\Delta H_1 = (m_1 c_1 + C_0)(T_F - T_1)$.

La variation d'enthalpie pour la transformation 2 est : $\Delta H_2 = m_2 c_2 (T_F - T_2)$.

L'enthalpie étant une grandeur extensive, $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$

$$\Rightarrow (m_1 c_1 + C_0)(T_F - T_1) + m_2 c_2 (T_F - T_2) = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{(m_1 c_1 + C_0)(T_F - T_1)}{m_2 (T_2 - T_F)} = 390 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

24 Second Principe

1. EN QUELQUES MOTS...

Le second principe est un principe d'évolution ; il permet de prévoir si une transformation est possible ou non.

2. CE QU'IL FAUT RETENIR...

Considérons un système fermé comprenant N particules.

a) Thermostat (ou source de chaleur)

Un thermostat est un système fermé n'échangeant aucun travail avec l'extérieur, mais échangeant de l'énergie sous forme de transfert thermique, sans que sa température ne varie.

Un système en équilibre avec un thermostat est à la même température que celui-ci.

b) Transformation irréversible, transformation réversible

- Une **transformation spontanée** est **irréversible** : par exemple, le transfert thermique passe naturellement d'un corps chaud vers un corps froid ; par contre le transfert thermique spontané d'un corps froid vers un corps chaud n'est jamais observé.

Les causes d'irréversibilité sont le transfert thermique, les frottements, les inhomogénéités de température, de masse volumique ou de pression, les phénomènes de mélange.

- Une transformation **réversible** est une **succession continue d'états d'équilibre pour le système étudié et le milieu extérieur** avec lequel il interagit. La transformation inverse de l'état final (F) à l'état initial (I) passe par les mêmes états d'équilibre **pour le système et le milieu extérieur** que la transformation de (I) à (F). Elle est nécessairement quasi-statique.

Une transformation quasi-statique n'est pas nécessairement réversible. Un piston présentant des frottements et déplacé très lentement donne lieu à une transformation irréversible.

c) Second principe pour un système fermé

- Pour tout système fermé, il existe **une fonction d'état S extensive, non conservative, appelée entropie**, telle que sa variation lors d'une transformation entre deux états d'équilibre est la somme de l'entropie échangée $S_{\text{éch}}$ avec le milieu extérieur et de l'entropie créée $S_{\text{créée}}$ dans le système. L'entropie créée $S_{\text{créée}}$ est nécessairement positive ou nulle.

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créée}}$$

ΔS : variation d'entropie lors de la transformation (en J.K^{-1})
 $S_{\text{éch}}$: entropie échangée avec le milieu extérieur (en J.K^{-1})
 $S_{\text{créée}}$: entropie créée dans le système : $\begin{cases} \text{transformation irréversible } S_{\text{créée}} > 0 \\ \text{transformation réversible } S_{\text{créée}} = 0 \end{cases}$

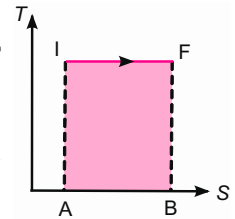
- Entropie échangée

Transformation	Transfert thermique Q reçu du milieu extérieur	Entropie échangée $S_{\text{éch}}$
adiabatique	$Q = 0$	$S_{\text{éch}} = 0$
monotherme	milieu extérieur : thermostat à la température T_{ext} (K)	$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_{\text{ext}}}$

L'entropie échangée $S_{\text{éch}}$, comme l'entropie créée $S_{\text{créée}}$, n'est pas une fonction d'état.

- Le second principe est une équation de bilan d'une grandeur extensive, l'entropie, dans laquelle il existe un terme de création d'entropie, qui traduit le sens d'évolution du système.
- Système isolé** : $Q = 0 \Rightarrow S_{\text{ech}} = 0 \Leftrightarrow \Delta S = S_{\text{créée}} \geq 0$.
L'entropie d'un système isolé ne peut que croître.

- Transformation isotherme réversible** : c'est une suite d'états d'équilibre entre l'état initial (I) et l'état final (F), par suite la température T et l'entropie S du système sont définies en tout point de la transformation, la température T_0 du système étant constante. Dans le diagramme entropique T en fonction de S , la transformation est représentée par une droite parallèle à l'axe S . $S_{\text{créée}} = 0 \Rightarrow Q = T_0 \Delta S$. L'aire sous la courbe (partie rougeie) représente le transfert thermique. Cette aire est algébrique ; elle est négative si elle est parcourue dans le sens trigonométrique.



d) Interprétation microscopique de l'entropie

L'entropie d'un système macroscopique permet de mesurer son **degré de désordre**. En effet, le système sera d'autant plus désordonné (et donc son entropie d'autant plus élevée) que le nombre d'états microscopiques accessibles sera grand.

3. EN PRATIQUE...

Une masse $m = 1$ g de gaz (vapeur d'eau) est enfermée dans un cylindre fermé par un piston mobile sans masse et sans frottement. L'ensemble est en contact avec l'atmosphère à la pression $p_0 = 10^5$ Pa. Initialement, la vapeur d'eau est à la température $T_1 = 200$ °C. L'ensemble est placé dans un thermostat à la température $T_0 = 100$ °C et atteint l'état d'équilibre final (p_F, T_F, V_F). Les tables thermodynamiques de la vapeur d'eau sont :

Température T	Volume massique v	Enthalpie massique h	Entropie massique s
100 °C	1,75 m ³ .kg ⁻¹	2681 kJ.kg ⁻¹	7,41 kJ.K ⁻¹ .kg ⁻¹
200 °C	2,49 m ³ .kg ⁻¹	2875 kJ.kg ⁻¹	7,85 kJ.K ⁻¹ .kg ⁻¹

Calculons l'entropie créée $S_{\text{créée}}$ lors de cette transformation.

- Le système utilisé est le gaz.
- La transformation est monobare à la pression p_0 et monotherme à la température T_0 .
- État initial : $T_1 = 200$ °C = 473 K ; l'équilibre mécanique du piston implique $p_1 = p_0 = 10^5$ Pa. Le volume initial est obtenu à l'aide du volume massique à 200 °C : $V_1 = m v(200) = 2,49 \cdot 10^{-3}$ m³.
- État final : l'équilibre mécanique du piston implique : $p_F = p_0 = 10^5$ Pa. L'équilibre thermique avec le thermostat donne : $T_F = T_0 = 100$ °C = 373 K. Le volume final est obtenu à l'aide du volume massique à 100 °C : $V_F = m v(100) = 1,75 \cdot 10^{-3}$ m³.

- D'après le *second principe* : $\Delta S = \frac{Q}{T_0} + S_{\text{créée}}$, $\Leftrightarrow S_{\text{créée}} = \Delta S - \frac{Q}{T_0}$ où Q est le transfert thermique échangé par le gaz avec l'extérieur lors de cette transformation.
- La variation d'entropie se calcule à partir des tables : $\Delta S = m(s(100) - s(200))$
 $\Delta S = -0,44$ J.K⁻¹ ; $\Delta S < 0$ car le gaz est plus ordonné dans l'état final que dans l'état initial.
- Pour obtenir Q , le *premier principe* est utilisé.
La transformation étant monobare avec $p_1 = p_F = p_0$, il s'écrit en utilisant l'enthalpie (fiche 21) : $\Delta H = Q$, car seulement travail des forces de pression.
 $\Delta H = m(h(100) - h(200)) \Rightarrow Q = \Delta H = -194$ J ; Q est cédé par le gaz au thermostat.
- La température étant en K, $S_{\text{créée}} = 0,08$ J.K⁻¹ ; l'entropie créée est bien positive en accord avec le second principe. La transformation est irréversible.

TD ET CORRIGES PHYSIQUE



**POLYVALENT
CORPORATION**

Exercice MECANIQUE DU POINT

1 Une course automobile

Deux pilotes amateurs prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A , démarre avec une accélération constante de $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, le deuxième, B , a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante de $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. A a cependant plus de réflexes que B et démarre une seconde avant.

- 1 • Quelle durée faudra-t-il à B pour rattraper A ?
- 2 • Quelle distance auront-ils parcourue quand B doublera A ?
- 3 • Quelles seront les vitesses à cet instant-là ?
- 4 • Représenter $x(t)$ et $v(t)$ et la trajectoire de phase de A et B , en précisant la position de l'événement « B dépasse A » sur ces représentations des mouvements.

Conseils Déterminer l'équation horaire du mouvement de chaque voiture.

2 Mouvement d'un point matériel sur une parabole

Un point matériel M décrit la courbe d'équation polaire

$$r \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \text{ où } a \text{ est une constante positive, } \theta \text{ de } -\pi \text{ à } +\pi.$$

- 1 • Montrer que la trajectoire de M est une parabole. La construire.
- 2 • On suppose de plus que le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r : $v = kr$, où k est une constante positive.
 - a. Calculer, en fonction de θ , les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse de M .
 - b. Déterminer la loi du mouvement $\theta(t)$ en supposant que θ est nul à l'instant $t = 0$ et que θ croît.

$$\text{On donne } \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Conseils

- 1) Penser à remplacer $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ par $\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ et à utiliser les relations entre (x, y) et (r, θ) pour donner l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- 2) La condition $v = kr$ permet d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ , donc de ne plus faire apparaître explicitement le temps dans les équations, mais seulement θ .

3 Ascension d'un ballon sonde

Un ballon sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude. Le vent lui communique une vitesse

horizontale $v_x = \frac{z}{t_c}$ proportionnelle à l'altitude z atteinte.

- 1 • Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
- 2 • Calculer le vecteur accélération du ballon.

4 Trajectoire et hodographe d'un mouvement plan

Un point M se déplace dans le plan (xOy) à la vitesse : $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta)$, où \vec{e}_θ est le vecteur orthoradial de la base locale des coordonnées polaires (r, θ) .

- 1 • Établir les équations polaire et cartésienne de la trajectoire à caractériser.
- 2 • Faire de même pour l'hodographe.
- 3 • Faire le lien entre l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{r})$ et l'angle $\varphi = (\vec{e}_x, \vec{v})$.

Conseils

Il suffit de passer du système de coordonnées cartésiennes (x, y) au système de coordonnées polaires (r, θ) , et inversement, pour obtenir l'une ou l'autre des équations recherchées.

5 Aller et retour sur un fleuve

Un rameur s'entraîne sur un fleuve en effectuant le parcours aller et retour entre deux points A et B , distants de ℓ . Il rame à vitesse constante v par rapport au courant. Le fleuve coule de A vers B à la vitesse u . Son entraîneur l'accompagne à pied le long de la rive en marchant à la vitesse v sur le sol, il fait lui aussi l'aller et retour entre A et B .

Seront-ils de retour en même temps au point de départ ? Si non, lequel des deux (rameur ou entraîneur) arrivera le premier en A ? Commenter.

Conseils

Utiliser la composition des vitesses en faisant attention au sens des vecteurs vitesse.

6 Chasseur et oiseau

Un oiseau se trouve sur une branche d'arbre, à une hauteur H au dessus du niveau du sol. Un chasseur se trouve sur le sol à la distance D du pied de l'arbre. Il vise l'oiseau et tire. Au moment du coup de feu, l'oiseau, voyant la balle sortir du canon, prend peur et se laisse tomber instantanément en chute libre. À chaque instant, l'accélération de la balle et de l'oiseau dans un référentiel fixe est $-g \vec{e}_z$ (l'axe (Oz) est la verticale ascendante). L'oiseau est-il touché ? L'étude sera faite :

- dans le référentiel fixe ;
- dans le référentiel lié à l'oiseau.

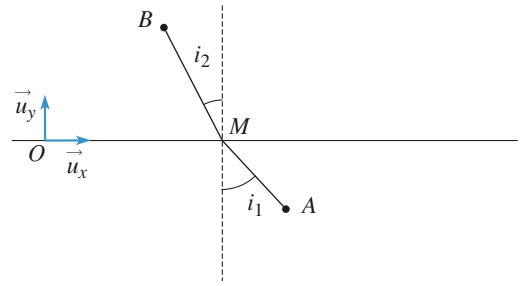
Conseils

Déterminer les trajectoires de l'oiseau et de la balle dans le référentiel choisi et déterminer leur intersection.

7 Quand il faut aller vite

Pour aller au secours d'un nageur en détresse, un maître-nageur part du poste de secours situé au point A pour aller jusqu'au nageur situé en B . Sachant que le sauveteur court à $v_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur la plage et nage à $v_2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans

l'eau, en quel point M doit-il entrer dans l'eau pour atteindre au plus vite le nageur ? On situera ce point à l'aide d'une relation entre v_1 , v_2 , i_1 et i_2 indiqués sur le schéma.



8 Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

(D'après ENAC 02)

Dans le plan (xOy) du référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un mobile ponctuel P décrit la parabole d'équation cartésienne : $y^2 = 2px$ avec p constante positive.

Sa vitesse $\vec{v}(P/R)$, de composantes X, Y est telle que l'ensemble des points $N(X, Y)$, hodographe du mouvement de pôle O , a pour équation cartésienne : $X^2 = 2qY$ avec q constante positive.

- Exprimer X et Y en fonction de y .
- Exprimer l'accélération $\vec{a}(P/R)$ du point P en fonction du vecteur position \vec{OP} . Préciser la nature du mouvement de P .
- Établir les expressions de x et y en fonction du temps t , sachant que le mobile passe en O à l'instant initial $t = 0$.

Corrigés TD MECANIQUE DU POINT

1 Une course automobile

1 • Nous avons :

$$x_A(t) = \frac{1}{2} a_A t^2 \text{ et } x_B(t) = \frac{1}{2} a_B (t - t_0)^2,$$

cette deuxième expression étant applicable à $t \geq t_0 = 1 \text{ s}$.
Les deux voitures sont au même niveau à l'instant t_1 , soit :

$$a_A t_1^2 = a_B (t_1 - t_0)^2$$

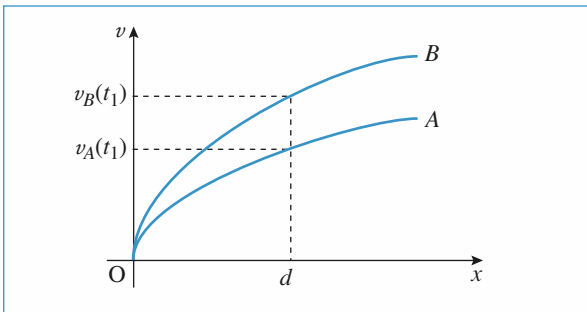
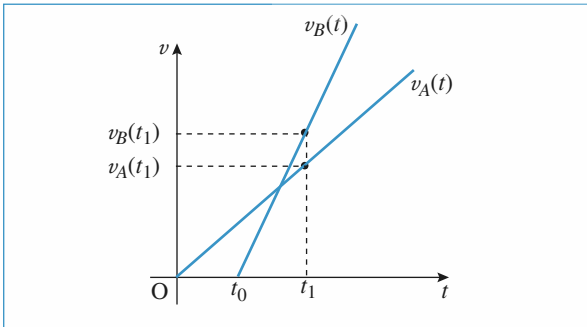
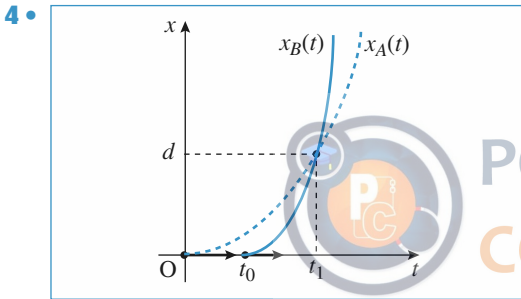
ce qui donne :

$$t_1 = t_0 \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{a_A}{a_B}}} \approx 9,5 \text{ s.}$$

2 • À l'instant t_1 :

$$d = x_A(t_1) = x_B(t_1) = \frac{1}{2} a_A t_1^2 \approx 1,8 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

3 • $v_A(t_1) = a_A t_1 \approx 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_B(t_1) = a_B (t_1 - t_0) \approx 42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



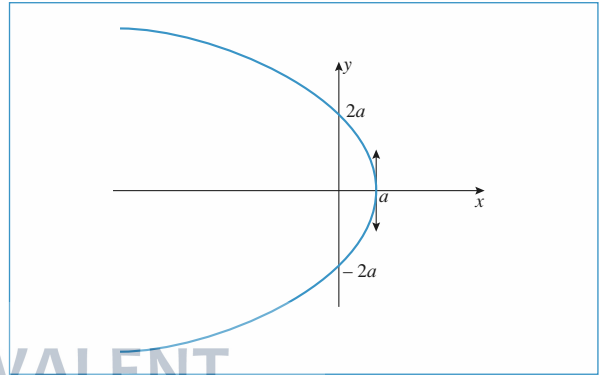
2 Mouvement d'un point matériel sur une parabole

1 • Sachant que $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$, l'équation polaire

s'écrit : $r = 2a - r \cos \theta$; avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, et en élevant au carré : $r^2 = x^2 + y^2 = (2a - x)^2$, ce qui donne :

$$x = \frac{-y^2 + 4a^2}{4a},$$

parabole représentée ci-dessous.



2 • a. $v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = a \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta}$

$$\text{et } v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta}.$$

Il reste à éliminer $\dot{\theta}$ en utilisant :

$$v = kr = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \frac{a \dot{\theta}}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$\theta \in]-\pi ; +\pi[$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est positif et $\dot{\theta}$ est positif par hypothèse, donc :

$$\dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } v_r = ka \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} ; v_\theta = \frac{ka}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

a. $\dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = k dt$

$$\Leftrightarrow 2 \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = kt + \text{cte.}$$

$$\theta \in]-\pi; +\pi[\text{ donc } \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

d'où sa tangente est positive.

Si $\theta = 0$ à $t = 0$, la constante est nulle.

$$\text{Donc } \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{kt}{2}.$$

3 Ascension d'un ballon sonde

1 • En coordonnées cartésiennes, $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$ avec

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{t_c} \text{ et } \frac{dz}{dt} = v_0.$$

Soit $z = v_0 t$ car à $t = 0$, $z = 0$ (le ballon décolle).

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \frac{t}{t_c} \text{ donne } x = \frac{1}{2} v_0 \frac{t^2}{t_c} \text{ en supposant qu'à } t = 0, x = 0.$$

En éliminant le temps t , on obtient :

$$x = \frac{1}{2} \frac{z^2}{v_0 t_c}.$$

La trajectoire est une parabole.

$$2 \bullet \vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z.$$

$$\text{D'où } \vec{a} = \frac{v_0}{t_c} \vec{u}_x.$$

4 Trajectoire et hodographe d'un mouvement plan

$$1 \bullet \vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta) = v_0(\cos\theta \vec{e}_r + (1 - \sin\theta) \vec{e}_\theta).$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{OM} = d(r\vec{e}_r) = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ du point M est colinéaire au vecteur vitesse, donc :

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}, \text{ soit : } \frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} d\theta = d \ln\left(\frac{1 - \sin\theta_0}{1 - \sin\theta}\right).$$

ce qui donne l'équation en coordonnées polaires :

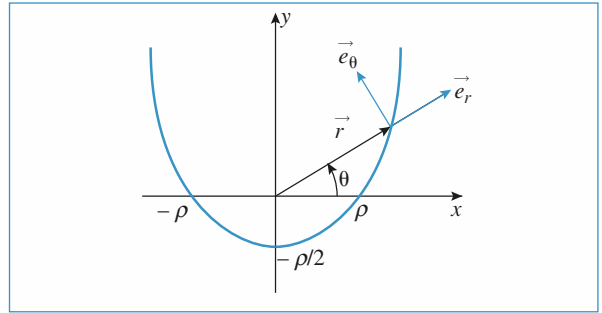
$$r = r_0 \frac{1 - \sin\theta_0}{1 - \sin\theta} = \frac{\rho}{1 - \sin\theta}$$

où ρ est un paramètre (longueur) caractéristique de la trajectoire.

On en déduit : $r = \rho + r \sin\theta$, soit, avec $x = r \cos\theta$ et $y = r \sin\theta$, en élevant au carré : $r^2 = x^2 + y^2 = (\rho + y)^2$, ce qui donne finalement :

$$y = \frac{x^2 - \rho^2}{2\rho}$$

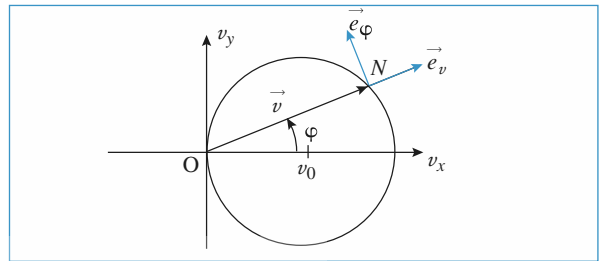
qui est l'équation d'une parabole d'axe (Oy) .



2 • $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta) = v_0((1 - \sin\theta)\vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$, ce qui donne l'équation cartésienne de l'hodographe :

$$(v_x - v_0)^2 + v_y^2 = v_0^2$$

qui permet d'identifier le cercle de rayon v_0 et de centre de coordonnées $(v_0, 0)$.

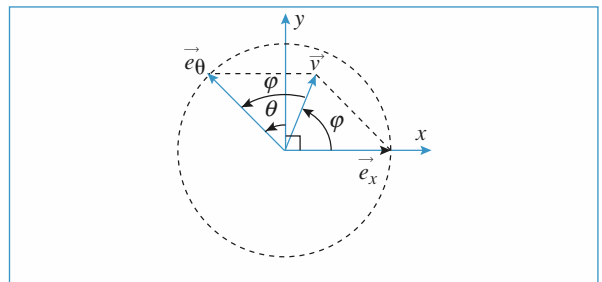


On remplace $v_x = v \cos\varphi$ et $v_y = v \sin\varphi$ dans l'équation cartésienne de l'hodographe, il vient :

$$v = 2 v_0 \cos\varphi$$

qui est l'équation polaire de l'hodographe.

3 • On évite des calculs trigonométriques en faisant un schéma :



Le vecteur $\frac{\vec{v}}{v_0} = \vec{e}_x + \vec{e}_\theta$ est dirigé selon la bissectrice des

axes (O, \vec{e}_x) et (O, \vec{e}_θ) , donc : $2\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$, soit : $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$.

5 Aller et retour sur un fleuve

Le rameur effectue l'aller à la vitesse $v + u$ et le retour à la vitesse $v - u$ par rapport au sol.

v doit donc être évidemment supérieur à u pour que le rameur puisse remonter le courant et ainsi revenir à son point de départ.

La durée de son trajet aller et retour est :

$$\tau_r = \frac{\ell}{v+u} + \frac{\ell}{v-u} = \frac{2\ell v}{v^2 - u^2}$$

Son entraîneur effectue l'aller et retour à la vitesse v par rapport au sol donc la durée de son trajet est $\tau_e = \frac{2\ell}{v}$. Donc :

$$\tau_r = \tau_e \frac{1}{1 - \frac{u^2}{v^2}} > \tau_e.$$

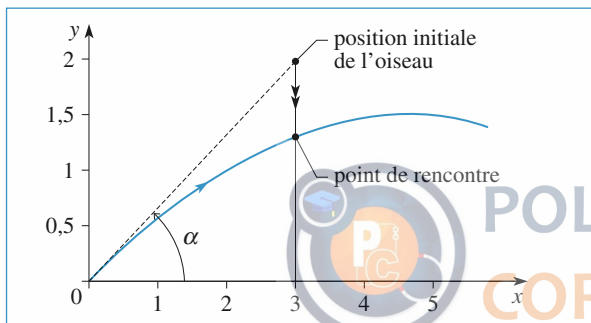
L'entraîneur est arrivé avant le rameur.

Le rameur perd plus de temps au retour qu'il n'en gagne à l'aller. Dans le cas extrême où la vitesse v est à peine supérieure à u , le trajet du retour pour le rameur sera très long.

6 Chasseur et oiseau

a. On détermine les trajectoires de l'oiseau et de la balle dans le référentiel lié au sol.

- Oiseau : $\ddot{z}_o = -g$, d'où $z_o = -\frac{1}{2}gt^2 + H$
(la vitesse initiale de l'oiseau est nulle);
 $\ddot{x}_o = 0$, d'où $x_o = D$.



- Balle : $\ddot{z}_b = -g$, d'où $z_b = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$;
 $\ddot{x}_b = 0$, d'où $x_b = v_0 \cos \alpha t$,

où v_0 est la vitesse initiale de la balle et α l'angle de tir : le chasseur visant l'oiseau, $\tan \alpha = \frac{H}{D}$.

Les deux trajectoires se rencontrent-elles ? Si oui, au point de rencontre $x_b = D$, donc la rencontre a lieu à l'instant :

$$t_f = \frac{D}{v_0 \cos \alpha}.$$

À cet instant, $z_b - z_o = D \tan \alpha - H = 0$: l'oiseau est touché !

Attention : pour que l'oiseau soit effectivement touché, il faut que la portée de la balle soit supérieure à D (sinon les deux trajectoires ne se coupent pas). Pour cela, il faut une vitesse v_0 suffisante.

Plus précisément, la balle touche le sol à l'instant $t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

donc en $x_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$. Il faut que $x_1 \geq D$ donc que :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{gD}{\sin(2\alpha)}}.$$

Cette condition correspond à $z(t_f) \geq 0$.

b. Dans le référentiel lié à l'oiseau, la balle a une accélération

nulle donc une trajectoire rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_0 , toujours dirigée vers l'oiseau qui est donc touché.
Conclusion : il faut dire aux oiseaux de toujours se percher sur des branches basses.

7 Quand il faut aller vite

Le maître-nageur parcourt AM en $t_1 = \frac{AM}{v_1}$ et

$$MB \text{ en } t_2 = \frac{MB}{v_2}.$$

$$AM = [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}$$

$$BM = [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}$$

La durée totale du trajet est :

$$T = t_1 + t_2.$$

$$T = \frac{1}{v_1} [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2} + \frac{1}{v_2} [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}.$$

On cherche x tel que T soit minimale.

$$\frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \frac{x - x_A}{v_1 [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}} + \frac{x - x_B}{v_2 [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}} = 0$$

$$\text{Soit } \frac{x - x_A}{v_1 AM} + \frac{x - x_B}{v_2 BM} = 0 \quad \textcircled{1}$$

Si on introduit i_1 et i_2 , il vient :

$$\sin i_1 = \frac{x_A - x}{AM} \text{ et } \sin i_2 = \frac{x - x_B}{BM}.$$

$$\textcircled{1} \text{ s'écrit alors } \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}.$$

Remarque : la valeur de x trouvée correspond bien à un minimum pour T . La dernière relation écrite est analogue à la loi de Descartes pour la réfraction en optique : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

8 Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

(d'après ENAC 02)

$$1 \bullet \vec{v}(P/\mathcal{R}) = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y, \text{ avec } X = \frac{dx}{dt} \text{ et } Y = \frac{dy}{dt}$$

$$y^2 = 2px.$$

On peut dériver par rapport au temps l'équation de la trajectoire.

$$\text{Il vient : } 2y \frac{dy}{dt} = 2p \frac{dx}{dt} \text{ soit } yY = pX \quad \textcircled{1}$$

$$\text{D'autre part : } X^2 = 2qY = \left(\frac{y}{p}Y\right)^2.$$

$$\text{Si } Y \neq 0, \text{ on obtient } 2q = \frac{y^2}{p^2}Y, \text{ soit } Y = \frac{2qp^2}{y^2} \text{ et } X = \frac{2qp}{y}$$

avec $y \neq 0$.

$$\text{Si } Y = 0, \textcircled{1} \Rightarrow X = 0.$$

$$\text{Si } y = 0, \textcircled{1} \Rightarrow X = 0 \text{ et puisque } X^2 = 2qY, Y = 0.$$

2 • $\vec{a}(P/\mathcal{R}) = \frac{dX}{dt} \vec{e}_x + \frac{dY}{dt} \vec{e}_y$. On se place en dehors du point O.

$$X = \frac{2qp}{y} \text{ et } \frac{dX}{dt} = -\frac{2qp}{y^2} \frac{dy}{dt} = -\frac{2qp}{y^2} Y = -\frac{4q^2 p^3}{y^4}$$

$$Y = \frac{2qp^2}{y^2} \text{ et } \frac{dY}{dt} = -\frac{4qp^2}{y^3} \frac{dy}{dt} = -\frac{8q^2 p^4}{y^5} = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} Y.$$

Or $x = \frac{y^2}{2p}$ donc $\frac{dX}{dt} = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} x$.

On peut alors écrire : $\vec{a}(P/\mathcal{R}) = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} \vec{OP}$.

Le mouvement du point P est à accélération centrale par rapport à O .

3 • $Y = \frac{dy}{dt} = \frac{2qp^2}{y^2}$ donc $y^2 dy = 2qp^2 dt$ ②.

On intègre ② en tenant compte des conditions initiales $t = 0$
 $y = x = 0$.

Il vient $\frac{1}{3} y^3 = 2qp^2 t$ d'où $\begin{cases} y = (6qp^2 t)^{1/3} \\ x = \frac{y^2}{2p} = \frac{2}{2p} (6qp^2 t)^{2/3} \end{cases}$



POLYVALENT
CORPORATION

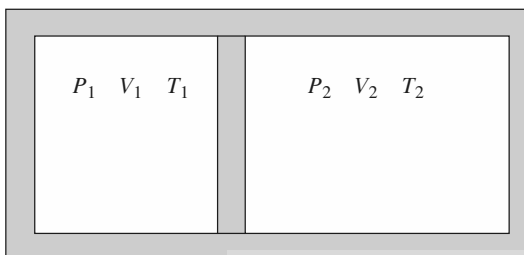
Exercices THERMODYNAMIQUE

1 Oscillations adiabatiques

Un cylindre de section S est séparé par un piston étanche de masse m couissant sans frottement. Un gaz parfait de rapport γ constant remplit les deux parties (1) et (2). Le système est initialement à l'équilibre :

$T_1 = T_2 = T_0$; $P_1 = P_2 = P_0$; $V_1 = V_0$ et $V_2 = 2 V_0$.
À la suite d'une perturbation, le piston est légèrement écarté de sa position d'équilibre. Déterminer la fréquence des petites oscillations.

Comment évoluent ces oscillations avec un modèle plus réaliste ?



Conseils

- Le système complet est-il homogène? Quels sous-systèmes homogènes peut-on considérer ?
- Les transformations sont adiabatiques. Peut-on appliquer la loi de LAPLACE ?
- On peut repérer la position du piston par une abscisse x , nulle à l'équilibre.
- Par petites oscillations, on suppose que l'amplitude des oscillations est suffisamment faible pour faire un développement limité à l'ordre 1 en x . Cela revient à linéariser les équations.
- Pour faire un développement à l'ordre 1, il faut préparer la relation en faisant apparaître un terme en $(1 + \varepsilon)^m$, ε étant une quantité sans dimension petite devant 1.
- Ce problème a un aspect thermodynamique (évolutions adiabatiques) et un aspect mécanique (RFD appliquée au piston mobile).

2 Remplissage d'un réservoir

Un réservoir initialement vide est mis en communication avec l'atmosphère (pression P_0 et température T_0) par un petit robinet qui laisse l'air entrer lentement. Au bout d'un certain temps, on ferme le robinet et l'air intérieur se met à l'équilibre interne. Déterminer sa température.

On considérera que l'air est un gaz parfait de rapport γ constant et que la durée de l'expérience est suffisam-

ment brève pour pouvoir considérer les parois du réservoir comme adiabatiques.

Quelle est l'hypothèse la plus contestable ?



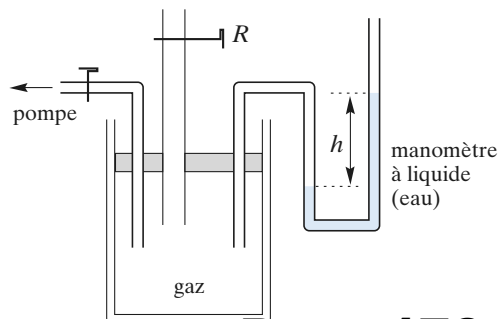
Conseils

- Comme toujours, un bilan d'énergie suppose la définition précise d'un système fermé.
- Le réservoir définit-il un système fermé ?
- L'évolution est adiabatique et l'écoulement est lent. Peut-on appliquer la relation de LAPLACE ?
- Considérer l'air qui passe de l'atmosphère au réservoir, et qui occupe initialement un volume V_0 dans l'atmosphère.

3 Expériences de Clément-Desormes

Un récipient d'une capacité de quelques dm^3 est muni d'une pompe, d'un robinet R et d'un manomètre à eau. Initialement ce récipient contient de l'air sous la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0 de l'air extérieur. On comprime très légèrement ce gaz grâce à la pompe, puis on réalise les opérations suivantes :

- *opération 1* : on laisse le récipient sans y toucher durant plusieurs heures puis on lit la dénivellation h_1 du manomètre (h_1 est de l'ordre de quelques cm) ;
- *opération 2* : on ouvre le robinet R et on le referme aussitôt ;
- *opération 3* : on laisse le récipient quelques heures sans y toucher puis on lit la dénivellation h_2 .



1 • Pour chaque opération, analyser le processus expérimental et proposer un modèle pour chaque transformation subie par le gaz qui reste à l'intérieur de la bouteille.

2 • L'expérience permet de mesurer le rapport

$$\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$$
 des capacités calorifiques molaire d'un gaz.

L'air est supposé parfait et de rapport γ constant.

a. Tracer dans un diagramme de Clapeyron (P, V) la suite de transformations que subit le gaz resté dans la bouteille à la fin de l'expérience. On notera :

p_1 la surpression correspondant à h_1 ;

p_2 la surpression correspondant à h_2 ;

θ l'abaissement de température correspondant à l'opération 3.

On ne s'intéressera qu'aux opérations 2 et 3.

b. Calculer γ en fonction de h_1 et h_2 .

Effectuer l'application numérique avec $h_1 = 18,2$ cm et $h_2 = 5,0$ cm .

Conseils

- Quelle est la température dans le récipient après « quelques heures » ?
- Quelle est la pression dans le récipient juste après l'ouverture du robinet ?
- Le récipient permet-il de définir un système fermé ?
- Le gaz qui s'échappe subit une transformation brusque, mais le gaz qui reste subit une détente « douce ». Comment peut-on le traduire quantitativement ?
- Ne pas oublier que $p_1 \ll P_0$ et $p_2 \ll P_0$. On peut simplifier le calcul en faisant des développements à l'ordre 1 en $\frac{P}{P_0}$.

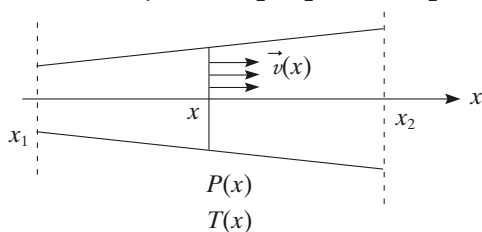
4 Étude d'une tuyère

On étudie l'écoulement d'un gaz dans une tuyère horizontale isolée thermiquement du milieu extérieur.

En régime permanent, dans une section droite de la tuyère les vitesses d'écoulement sont égales et normales à la section. La pression et la température y sont uniformes et indépendantes du temps :

– à l'entrée de la tuyère, $x = x_1$: $P_1 = 3$ bars ; $T_1 = 300$ K ;

– à la sortie de la tuyère, $x = x_2$: $P_2 = 1$ bar ; $T_2 = 250$ K .



1 • Montrer que lorsqu'une mole de gaz passe de l'entrée à la sortie de la tuyère, on peut, pour toute abscisse x ,

$$\text{écrire } H_m(x) + \frac{1}{2} M v^2(x) = \text{cte} .$$

$H_m(x)$ est l'enthalpie molaire du gaz à l'abscisse x et M est la masse molaire du gaz.

2 • Si l'on suppose $v(x_1)$ négligeable, calculer $v(x_2)$.

Données : $M = 32$ g . mol⁻¹ ; $\gamma = 1,4$.

On supposera le gaz parfait.

3 • Le gaz sortant de la tuyère est utilisé pour actionner une turbine. À l'entrée de la turbine, il a une pression P_2 , une température T_2 et une vitesse v_2 . À la sortie, la pression et la température sont inchangées, et la vitesse est nulle. Calculer le travail récupéré par la turbine pour le passage d'une mole de gaz.

Conseils

- Revoir la démonstration de la détente de JOULE-THOMSON. Il suffit de la reprendre en tenant compte de l'énergie cinétique.
- Que vaut l'enthalpie d'un gaz parfait ?
- Quelle relation y a-t-il entre la variation d'énergie cinétique du gaz et le travail récupéré ?

5 Étude d'une machine

Question préliminaire

Dans un tube cylindrique horizontal, indéformable, aux parois adiabatiques, un gaz se détend à travers une paroi poreuse ; la pression et la température passant de P_1 , T_1 en amont de la paroi à T_2 , P_2 en aval de la paroi.

On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la variation d'énergie cinétique d'une quantité donnée de fluide entre la partie amont et la partie aval soit négligeable.

1 • Montrer que la détente est isenthalpique.

2 • On remplace, dans le tube, la paroi poreuse par une machine (turbine, compresseur, etc.). Au cours de son passage par la machine, une mole de fluide échange, avec le milieu extérieur, un travail autre que celui des forces de pression, noté τ'_m , et une quantité de chaleur Q_m . Comment est transformée la relation précédente ? On notera H_m l'enthalpie molaire du gaz.

A. Compression d'un fluide parfait

De l'air (assimilé à un gaz parfait) est prélevé dans l'atmosphère à la température T_0 , sous la pression P_0 . Il est comprimé de façon adiabatique et lente jusqu'à la pression P_f .

1 • Exprimer la température finale du gaz, T_f , en fonction de T_0 et de $x = \frac{P_f}{P_0}$.

2 • a. Exprimer ΔH_m , la variation d'enthalpie molaire de ce gaz, en fonction de T_0 , x et $C_{P,m}$.

b. Cette compression est réalisée par un compresseur : quel travail, τ' , doit-il fournir ?

c. A.N. : Calculer numériquement τ' .

Données : $T_0 = 288 \text{ K}$; $P_0 = 1 \text{ bar}$; $P_f = 12 \text{ bars}$

$C_{P,m} = 29 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma = 1,4$.

3 • Cette compression est réalisée dans deux compresseurs : l'air traverse un premier compresseur qui le comprime de P_0 à P_1 , puis un échangeur où il se refroidit de façon isobare, sous la pression P_1 , jusqu'à T_0 et traverse enfin un second compresseur qui le comprime de P_1 à P_f .

a. Exprimer le travail molaire τ_m que doit fournir l'ensemble des compresseurs, en fonction de $C_{P,m}$, T_0 , P_1 , P_0 , P_f et γ .

b. Pour quelle valeur P_{1m} de P_1 , exprimée en fonction de P_0 et P_f , ce travail est-il minimal ?

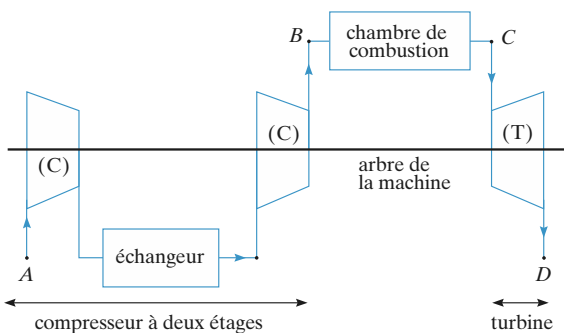
c. Calculer les valeurs de P_{1m} et du travail molaire minimal pour les valeurs numériques données en 2) b).

B. Turbine à gaz

Soit le dispositif schématisé ci-dessous.

L'air prélevé dans l'atmosphère, en A ($P_A = 1 \text{ bar}$ et $T_A = 288 \text{ K}$), est comprimé jusqu'à la pression P_B ($P_B = 12 \text{ bars}$), dans un compresseur (C) à deux étages selon le processus du A. 3) b). Entre les deux étages, l'air est refroidi de façon isobare jusqu'à T_A (échangeur).

Dans la chambre de combustion, l'air est échauffé de façon isobare jusqu'à $T_C = 1050 \text{ K}$. Dans la turbine (T), l'air est détendu de façon adiabatique et lente jusqu'à $P_D = P_A$.



Le tableau suivant donne la pression P et la température T du fluide dans les différents états :

état	P (bar)	T (K)
A	1	288
B	12	586
C	12	1 050
D	1	524

1 • Quelle est l'expression numérique du travail molaire τ_C , reçu par le fluide de la part du compresseur à deux étages (C) ?

2 • Calculer le travail molaire τ_{Tm} reçu par la turbine (T).

3 • Le compresseur à deux étages et la turbine étant solidaires du même axe de rotation de la machine, déterminer le travail utile molaire τ_{Tm} récupéré sur cet axe (arbre de la machine).

4 • Calculer Q_m , la quantité de chaleur molaire reçue par l'air pendant la combustion. (On négligera les modifications du fluide pendant cette combustion.)

5 • En déduire le rendement $\eta = \frac{|\tau_{um}|}{Q_m}$.

Conseils

1) De quelle détente s'agit-il ?

2) Comment la démonstration est-elle modifiée ?

A. 1) Quelle loi les conditions expérimentales décrites permettent-elles d'appliquer ?

2) Peut-on utiliser la question préliminaire ?

3) a) Quel(s) travail(travaux) doit-on prendre en compte ? Le travail des forces de pression de l'échangeur est-il intéressant ?

B. Chaque élément de la machine peut être traité séparément en utilisant la question préliminaire.

6 Détermination d'une capacité thermique massique

On établit, à pression constante, un courant gazeux dans un serpentin métallique de débit massique D_m (D_m représente la masse de gaz qui traverse une section de serpentin par unité de temps).

Le serpentin est plongé dans un calorimètre rempli d'eau, de capacité thermique totale C (cette capacité inclut l'eau, le calorimètre et ses accessoires). Le gaz, initialement chauffé dans un four, arrive dans le calorimètre à une température T_1 . En régime stationnaire, le gaz sort du calorimètre à la température T_2 , pratiquement égale à celle du calorimètre.

1 • Lorsqu'on interrompt le courant gazeux, on constate que la température T du calorimètre diminue, ce qui indique l'existence de « fuites thermiques ».

En admettant que les pertes thermiques par unité de temps sont proportionnelles à l'écart de température $(T - T_0)$ entre la température T du calorimètre et celle T_0 (supposée constante) du milieu extérieur (on désignera par k la constante de proportionnalité), déterminer la loi d'évolution de la température T du calorimètre en fonction du temps t , de C , k , T_0 et T_2 .

2 • Calculer la valeur de la capacité thermique massique à pression constante c_P du gaz en fonction de k , D_m , T_0 , T_1 et T_2 .

3 • Données: $C = 4 \text{ kJ.K}^{-1}$ et $D_m = 0,47 \text{ g.s}^{-1}$. On a mesuré les températures $T_0 = 293 \text{ K}$, $T_1 = 373 \text{ K}$ et $T_2 = 310 \text{ K}$.

Déterminer la valeur numérique du coefficient k sachant que dix minutes après avoir coupé le courant gazeux, la température T du calorimètre a diminué de 2 K .

En déduire la capacité c_P du gaz (dioxyde de carbone).

Conseils

- Quel système choisir pour étudier l'effet des fuites? Sur quelle fonction d'état du système doit-on travailler? Quels échanges énergétiques y a-t-il entre le système et son milieu extérieur?
- Définir un nouveau système en régime stationnaire et raisonner de manière analogue à la détente de Joule-Thomson.

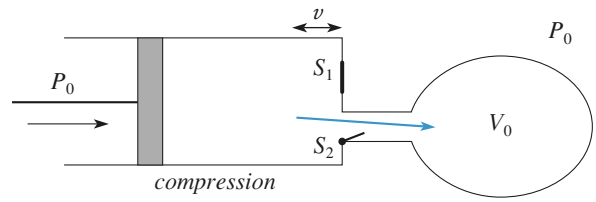
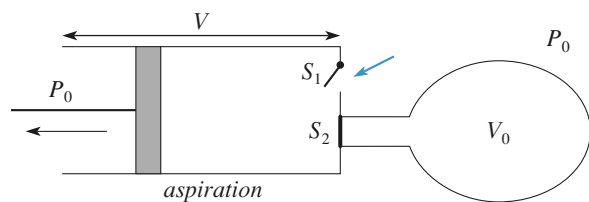
7 Utilisation d'une pompe

Un réservoir de volume V_0 contient initialement de l'air (assimilable à un gaz parfait) à la pression P_0 . On peut augmenter cette pression en y refoulant de l'air à l'aide d'une pompe. La pompe est constituée d'un cylindre dans lequel coulisse (sans frottement) un piston actionné par un moteur.

Le volume maximal du cylindre est V (le piston est alors en début de course, à gauche), le volume minimal du cylindre est v (le piston est en fin de course, à droite).

Lorsque le piston se déplace vers la gauche, les soupapes S_1 et S_2 sont d'abord fermées, puis S_1 s'ouvre dès que la pression de l'air résiduel contenu dans le cylindre devient égale à la pression atmosphérique P_0 ; l'air extérieur est alors aspiré dans la pompe.

Lorsque le piston se déplace vers la droite, S_1 se ferme, l'air contenu dans le cylindre est comprimé; puis S_2 s'ouvre dès que la pression de l'air du cylindre devient égale à celle de l'air contenu dans le réservoir, l'air du cylindre est alors refoulé dans le réservoir.



On suppose qu'au cours des diverses transformations l'air décrit une suite continue d'états d'équilibre thermodynamique internes à température constante (transformation isotherme).

1 • a. Calculer la pression P_k de l'air contenu dans le réservoir après k allers et retours du piston.

b. Quelle est la valeur limite P de P_k quand k devient très grand? Retrouver cette valeur sans passer par le calcul des pressions intermédiaires.

2 • On suppose dorénavant $v = 0$.

a. Exprimer la pression P_k en fonction de P_0 , V , V_0 et k .

b. Calculer le travail W_k que fournit le moteur pour effectuer k allers et retours du piston.

Conseils

Il est vivement recommandé de représenter le $k^{\text{ième}}$ cycle sur un diagramme $(P_{\text{cyl}}, V_{\text{cyl}})$ où P_{cyl} représente la pression à l'intérieur du cylindre et V_{cyl} le volume du cylindre. Le cycle doit comporter 4 phases successives et les pressions P_{k-1} et P_k doivent y apparaître.

- À chaque étape, le système comprimé ou détendu est différent.
- Quel est le travail total des forces dues à la pression atmosphérique au cours d'un cycle du piston?
- Rappel de la somme des termes d'une série géométrique:

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

8 Détente brusque d'un gaz

De l'air, considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant ($\gamma = 1,4$) et de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, est enfermé dans un cylindre muni d'un piston mobile circulaire, de rayon $a = 2 \text{ cm}$ et de masse m . On note $X(t)$ l'abscisse du piston à la date t , l'origine étant prise au fond du cylindre.

Le milieu extérieur est caractérisé par sa pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ et sa température $T_0 = 300 \text{ K}$, constantes. Le cylindre et le piston sont fabriqués avec un matériau de masse volumique $r = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de capacité thermique volumique $c = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

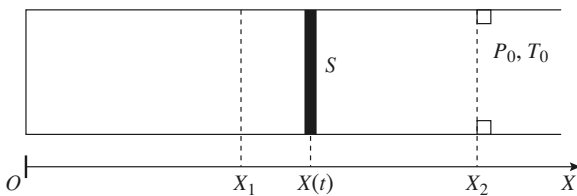
L'état initial est défini par : Pression du gaz : $P_1 = 4P_0$, température de l'ensemble : T_0 ; $X = X_1 = 20$ cm .

On libère le piston, le gaz se détend jusqu'à ce que le piston s'arrête brutalement sur une butée. Le volume occupé par le gaz est alors déterminé par :

$$X = X_2 = 2 X_1 .$$

Nous admettons que, pendant la détente, on peut considérer que la pression et la température du gaz sont définis à chaque instant et uniformes si sa durée τ_0 , X et la vitesse de propagation des ondes sonores

$$c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ sont telles que : } c_{\text{son}} \tau_0 \gg X .$$



1 • On suppose que le gaz est homogène et que la vitesse (au sens macroscopique) du gaz situé à l'abscisse x

$$\text{est une fonction linéaire de } x : v(x, t) = \frac{x}{X(t)} \dot{X}(t) .$$

Exprimer l'énergie cinétique (macroscopique) \mathcal{E}_K de la tranche de gaz comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

En déduire l'énergie cinétique totale du gaz $\mathcal{E}_{K \text{ gaz}}(t)$ en fonction de la masse de gaz m_{gaz} et de $X(t)$.

2 • Nous supposons que :

- si la pression et la température sont définis à chaque instant et uniformes dans le cylindre ;
- il n'y a aucun échange thermique entre le gaz, le piston et le cylindre ;
- le mouvement du piston jusqu'au choc contre la butée s'effectue sans frottement.

a. Déterminer la pression P_2 et la température T_2 du gaz à l'instant où le piston atteint l'abscisse X_2 . Au moyen d'un bilan d'énergie, exprimer la vitesse maximale V_{max} du piston en fonction de ρ , e , M , X_1 , P_0 , $T_0 R$ et γ .

En déduire une estimation grossière de la durée t_0 de la détente.

b. Le piston a une épaisseur égale à 1 cm. Calculer V_{max} et l'ordre de grandeur de τ_0 . L'hypothèse « quasistatique » est-elle justifiée ?

c. Lors du choc sur la butée, le cylindre reste parfaitement rigide et le piston s'échauffe uniformément. Calculer les températures $T_{3 \text{ piston}}$ et $T_{3 \text{ gaz}}$ du piston et du gaz lorsque le système est au repos. (On considérera que l'hypothèse quasistatique est justifiée pour la détente).

3 • On tient compte maintenant des frottements entre le cylindre et le piston. La vitesse maximale n'est plus que de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, les autres données étant inchangées. En supposant, pour simplifier, que ces frottements n'échauffent que le piston, calculer les températures finales $T_{4 \text{ piston}}$ et $T_{4 \text{ gaz}}$ du piston et du gaz lorsque le système est au repos.

4 • L'étude de la diffusion thermique (au programme de seconde année) montre que, après une durée t , la zone sensible aux variations de température a une épaisseur de l'ordre de $\delta = \sqrt{Dt}$, D étant un coefficient caractéristique du matériau. On prendra pour le matériau du cylindre (verre) $D = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

a. Déterminer l'épaisseur δ au bout de 4 ms et au bout de 40 s . Exprimer la capacité thermique de la pellicule d'épaisseur δ sur la face interne du cylindre et, dans les deux cas, comparer la capacité thermique correspondante à celle du gaz. Conclure.

b. Les échanges thermiques entre le gaz et la paroi du cylindre sont régis par la loi dite de NEWTON :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = h S [T_p(t) - T(t)]$$

\mathcal{P}_{th} représentant la puissance thermique cédée par la paroi au gaz, $T(t)$ la température (supposé uniforme) du gaz, $T_p(t)$ celle de la face interne de la paroi, et S l'aire de cette face interne ; h est une constante que l'on prendra égale à $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

En prenant comme origine des temps l'instant du choc, déterminer $T(t)$. Pour simplifier les calculs (de toutes façons approchés) :

- on ne tiendra pas compte des échanges thermiques du gaz avec le piston ;
- on supposera la capacité thermique de la couche d'épaisseur δ constante et infiniment grande devant celle du gaz.

Calculer numériquement la constante de temps de la loi $T(t)$ et la valeur de T 10 minutes après la détente.

Conseils

- Caractériser l'évolution du gaz pendant la détente. Quelles relations relient P , V et T ?
- Un bilan d'énergie n'a de sens que relatif à un système fermé clairement délimité. Selon le cas, on choisira le gaz seul ou l'ensemble {cylindre + gaz + piston}. Quel système choisir si on veut considérer le travail cédé par l'atmosphère au cours de la détente ?
- Pendant la détente, le piston est rigide et ne reçoit pas de transfert thermique.
- Pour une première estimation de la durée, on peut considérer que la vitesse est constante.
- Le cylindre peut-il échanger du travail ?
- Les frottements modifient-ils l'énergie interne finale du système {cylindre + gaz + piston} ?

9 Stabilité de l'atmosphère

L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant et de masse molaire M . La verticale est repérée par un axe Oz ascendant : $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. À l'équilibre, la température de l'air suit une loi $T_{\text{eq}}(z)$ connue.

1 • Si $P(z)$ représente la pression, et $P'(z)$ sa dérivée, déterminer le rapport $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

2 • À la suite d'une perturbation, une bulle d'air, initialement à l'altitude z_0 s'élève jusqu'à l'altitude $z_0 + \zeta$. La bulle se met à l'équilibre mécanique avec l'air ambiant à cette nouvelle altitude, et, nous supposons que cette opération est suffisamment rapide pour être adiabatique.

En supposant ζ suffisamment petit, déterminer la masse volumique $\rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta)$ de la bulle, puis la masse volumique $\rho_e(z_0 + \zeta)$ de l'air ambiant à cette même altitude.

En déduire une condition portant sur la fonction $T(z)$ pour que l'atmosphère soit à l'équilibre. Commenter la valeur obtenue.

Conseils

- Comment exprime-t-on la masse volumique d'un gaz parfait en fonction de M , P et T ?
- La transformation subie par la bulle permet-elle d'appliquer la loi de LAPLACE ?
- Comment expliciter cette loi avec les variables P et ρ ?
- Si ζ est suffisamment petit, on peut exprimer $P(z_0 + \zeta)$ par un développement de Taylor à l'ordre 1.
- Pour exprimer la dérivée de ρ_e , on peut utiliser la dérivée logarithmique.
- Le système est stable si les forces qui s'exercent sur la bulle tendent à la ramener vers sa position initiale.

10 Chauffage d'une enceinte

D'après Concours communs Mines - Ponts

On se propose de maintenir un local à température constante T_c (température de consigne). La température extérieure est uniforme et vaut $T_e < T_c$.

À l'instant t , la température du local est notée T et l'on admet que la déperdition d'énergie thermique (« déperdition de chaleur ») est proportionnelle à la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur.

Le volume de l'enceinte est constant, le coefficient calori-

métrique global à volume constant, ou *capacité thermique* du local, est noté C . La puissance thermique fournie à l'extérieur (flux thermique sortant) s'exprime alors sous la forme $\frac{\delta Q}{\delta t} = \alpha C(T - T_e)$ (loi de Newton).

Détermination de α

Pour déterminer les déperditions thermiques, on arrête le chauffage pendant une durée Δt , durant laquelle la température du local passe de T_i à T_f , la température extérieure restant inchangée et égale à T_e .

1 • Préciser l'unité de α ; établir son expression :

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{T_i - T_e}{T_f - T_e} .$$

2 • Calculer la valeur de α pour $\Delta t = 3$ heures, $T_i = 294,0$ K, $T_f = 286,0$ K et $T_e = 281,0$ K.

Mise en route du chauffage

3 • Quelle est la puissance de chauffe nécessaire au maintien du local à la température $T_i = T_c = 294$ K ? On donne $C = 10^7$ J.K⁻¹.

La température du local est maintenue dans l'intervalle de régulation $\mathcal{D} = [T_R - \theta ; T_R + \theta]$ au moyen de relais thermostatiques du type tout ou rien.

Ces derniers mettent en route le dispositif de chauffage dès que T atteint la valeur $T_R - \theta$ et l'arrêtent dès que T atteint la valeur $T_R + \theta$ par valeur croissante. Les grandeurs T_R et θ sont respectivement la température de régulation et l'amplitude de régulation.

Notant P_c la puissance de chauffe (indépendante du temps), on pose aussi $T_{\text{RM}} = T_e + \frac{P_c}{\alpha C}$.

4 • Quel est le sens physique de T_{RM} ? Montrer qualitativement que, lorsque le système fonctionne normalement ($T_R = T_c = 294$ K), la température T du local est une fonction périodique du temps. Montrer alors que l'intervalle \mathcal{D} des valeurs possibles de T_R est :

$$T_e + \theta \leq T_R \leq T_{\text{RM}} - \theta .$$

Calculer numériquement \mathcal{D} pour $P_c = 15$ kW et $\theta = 0,1$ K.

5 • Exprimer la période, Θ , et donner sa valeur numérique.

6 • On note Δt_1 la durée, au sein de la période Θ , pendant laquelle le système de chauffage est actif.

Établir l'expression du facteur de forme de la source $\eta = \frac{\Delta t_1}{\Theta}$. Calculer sa valeur numérique. En déduire la puissance moyenne de chauffe ($T_R = T_c = 294$ K).

Détermination de α

- Définir le système étudié et choisir la fonction d'état à partir de laquelle on établira le bilan énergétique.

Mise en route du chauffage

- Établir un nouveau bilan énergétique tenant compte du chauffage. Que devient-il si T reste constante égale à T_i ?
- Pour comprendre le fonctionnement, on pourra tracer $P_c = f(T)$. À quel dispositif électronique cette courbe fait-elle penser ?
- Pour faire l'étude quantitative, exprimer le bilan énergétique et l'intégrer suivant que le chauffage fonctionne ou non entre $T_R - \theta$ et $T_R + \theta$, ou $T_R + \theta$ et $T_R - \theta$.
- Les questions 5) et 6) sont des applications de la question 4).

- 2 • Quand la température T varie de dT , x varie de dx . Calculer dx en fonction de dT .

- 3 • Exprimer (en fonction de la variable x) l'énergie interne du système {gaz + ressort}.
En déduire la variation infinitésimale de l'énergie interne dU en fonction de la variation de température dT .

- 4 • Calculer le transfert thermique δQ nécessaire pour faire varier la température de dT .
En déduire la capacité calorifique C_K du système {gaz + ressort}.
Examiner à nouveau les cas limites.

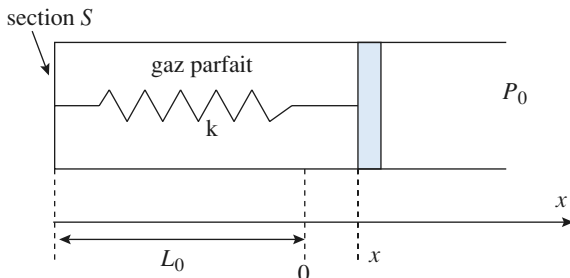
- 1) Il suffit d'écrire l'équation d'équilibre du piston.
- 3) Dans l'expression de l'énergie interne U intervient l'énergie potentielle des forces intérieures, donc celle du ressort.
- 4) Il faut toujours commencer par calculer le travail et se servir du premier principe pour obtenir les échanges thermiques.

11 Capacité calorifique d'un système complexe

Un gaz parfait (quantité de matière n) est enfermé dans un cylindre (de section S) fermé par un piston mobile, retenu par un ressort de raideur k , de longueur à vide L_0 . Initialement, le gaz est à la pression atmosphérique P_0 , température T_0 et la longueur de cylindre occupée par le gaz vaut L_0 .

On note C_V la capacité calorifique molaire à volume constant du gaz (doc. 1).

Même si cette hypothèse est discutable, on négligera dans cet exercice la capacité thermique du ressort.



Doc. 1

On suppose que le système {gaz + ressort} est en permanence en état d'équilibre thermodynamique interne; on repère le déplacement du piston par sa cote x .

- 1 • On fait évoluer lentement la température: comment est représentée cette transformation en diagramme de Clapeyron (P, x) ?
Examiner les cas particuliers.

12 Transformations d'un gaz réel

Dans un certain domaine de température et de pression, le dioxygène O_2 est bien représenté par l'équation de Van de Waals:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Son énergie interne molaire est donnée par:

$$U_m = U_{0,m} + C_{V,m} T - \frac{a}{V_m}$$

Avec $a = 0,170 \text{ J.m}^3 \text{ mol}^{-2}$,
 $b = 5,10 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
et $C_{V,m} = 21,1 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 1 • On réalise une détente de Joule-Gay-Lussac avec ce gaz. L'état initial est caractérisé par:
Volume $V_0 = 10 \text{ L}$; quantité de matière: $n = 10$ moles;
température $T_0 = 295 \text{ K}$.

L'état final est caractérisé par un volume $V_1 = 2 V_0 = 20 \text{ L}$.

Déterminer littéralement et calculer la température finale T_1 si on néglige les échanges thermiques avec les parois. À quelle condition cette dernière hypothèse est-elle réaliste? Quel serait le résultat avec le modèle du gaz parfait?

- 2 • On réalise une compression suffisamment lente pour pouvoir la considérer comme isotherme. La température restant égale à T_0 , les n moles passent de V_0 à $V_2 = \frac{V_0}{2}$. Calculer le travail et la chaleur fournis au gaz.

3 • On réalise la même compression (même état initial, même volume final), de façon suffisamment rapide pour la supposer adiabatique, le système restant cependant toujours très proche d'un état d'équilibre interne. Déterminer la température finale et le travail fourni au gaz.

Conseils

- Revoir le dispositif expérimental de la détente de Joule-Gay-Lussac (Cours).
- Ne pas confondre énergie et énergie molaire, volume et volume molaire, etc.
- Comment s'écrit l'équation de Van der Waals pour une quantité de matière n ?
- Pour déterminer un échange thermique, il faut calculer la variation d'énergie interne et le travail.
- Question 3 : revoir la démonstration de la formule de LAPLACE pour un gaz parfait. Il faut utiliser la même méthode pour établir une relation simple entre V et T .



POLYVALENT
CORPORATION

Corrigés TD THERMODYNAMIQUE

1 Oscillations adiabatiques

Chaque partie du système subit une évolution adiabatique. Si la vitesse du piston est faible devant la vitesse de propagation du son, on peut considérer que la pression et la température y sont uniformes et définis à tout instant. On peut donc appliquer la relation de LAPLACE.

Repérons la position du piston par l'abscisse x , nulle à l'équilibre et orientée de la gauche vers la droite.

Les volumes des compartiments (1) et (2) deviennent :

$$V_1 = V_0 + Sx \quad \text{et} \quad V_2 = 2V_0 - Sx$$

L'application de la loi de LAPLACE se traduit par :

$$P_1 V_1^\gamma = P_1 V_0^\gamma \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma$$

Sx étant petit devant V_0 (petites oscillations), on obtient

$$\text{après un D.L. à l'ordre 1 : } P_1 = P_0 \left(1 - \frac{\gamma Sx}{V_0}\right)$$

$$\text{On obtient de même : } P_2 = P_0 \left(1 - \frac{\gamma Sx}{2V_0}\right)$$

Écrivons maintenant la RFD appliquée au piston :

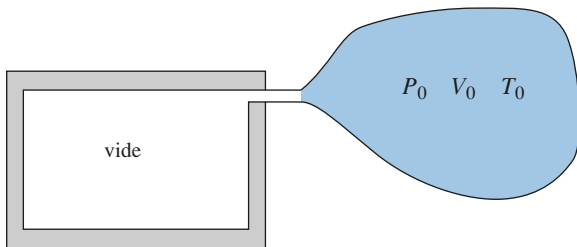
$$m \ddot{x} = P_1 S - P_2 S = - \frac{3\gamma P_0 S^2}{2V_0} x$$

On a un mouvement oscillant sinusoïdal de fréquence :

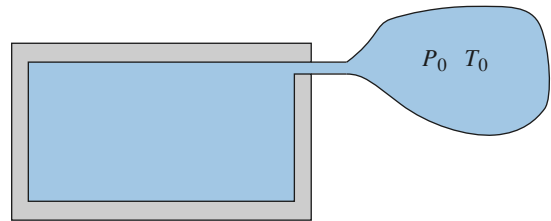
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\gamma P_0 S^2}{2V_0}}$$

Une étude plus réaliste devrait tenir compte des échanges thermiques à travers les parois et des frottements. Si ceux-ci sont faibles, on observe des oscillations amorties de pseudo-fréquence voisine de f et le système tend vers l'état d'équilibre initial.

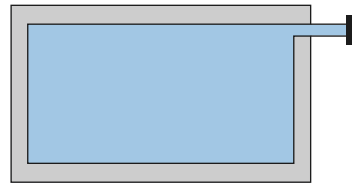
2 Remplissage d'un réservoir



État initial : Tout le gaz constituant le système est contenu dans le volume V_0 , à l'extérieur.



État intermédiaire : le gaz se répartit entre un volume extérieur plus petit que V_0 et le réservoir.



État final : tout le gaz est contenu dans le réservoir.

Considérons le système fermé constitué par le gaz qui se trouve dans le réservoir à la fin de l'expérience. Dans l'état initial, il occupe un volume V_0 .

La partie du gaz qui est restée dans l'atmosphère est toujours à l'équilibre thermique et mécanique avec celle-ci.

Ce système est limité, du côté de l'atmosphère, par une paroi fictive où la température est égale à T_0 des deux côtés. Le gaz subit donc une transformation adiabatique.

Bien que l'écoulement soit lent, le gaz passe brusquement de la pression P_0 à une pression plus faible lors de son passage par le robinet ; son évolution n'est pas quasistatique et on ne peut pas utiliser la relation de LAPLACE.

La paroi du réservoir est immobile. Le seul travail est donc le travail des forces de pression atmosphérique, qui s'appliquent sur une surface qui « balaye » le volume V_0 . Le travail reçu par le système est donc :

$$W = + P_0 V_0 .$$

Ce travail est bien positif, car la « paroi » se déplace dans le sens de la force pressante.

Les échanges thermiques étant nuls, on peut écrire :

$$\Delta U = W , \text{ soit : } n C_{V,m} (T_{\text{finale}} - T_0) = P_0 V_0$$

$$\text{avec } n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \quad \text{et} \quad C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\text{On en déduit : } T_{\text{finale}} - T_0 = (\gamma - 1) T_0$$

$$\text{et donc : } T_{\text{finale}} = \gamma T_0 .$$

On remarque que ce résultat est indépendant de la pression finale.

L'hypothèse la plus contestable est celle de l'adiabaticité des parois : La capacité thermique du gaz intérieur est suffisamment faible pour qu'il soit difficile de négliger le transfert thermique vers la face interne des parois. La température finale est donc comprise entre T_0 et γT_0 , et doit tendre vers T_0 pour un temps suffisamment long.

3 Expérience de Clément-Desormes

1 • Le tableau ci-dessous explicite chaque opération :

opération	analyse et conclusions
compression initiale	La compression rapide du gaz correspond à une augmentation de température sans échange thermique.
1 refroidissement isochore	<p>Les échanges thermiques étant lents devant la mise en équilibre de pression, il faut laisser le récipient quelques heures afin que la température de l'air intérieur soit de nouveau égale à T_0. Le volume reste inchangé.</p> <p>Le gaz a été comprimé donc $P_1 > P_0$. Puisque h_1 est de l'ordre de quelques cm, $P_1 - P_0$ est de l'ordre de quelques millibars (1 bar correspond à 10 m d'eau).</p>
2 détente adiabatique	<p>Puisque $p_1 = P_1 - P_0$ est faible, l'ouverture du robinet va provoquer la fuite d'une petite quantité de gaz jusqu'à ce que la pression intérieure soit égale à P_0.</p> <p>Le gaz restant à l'intérieur de la bouteille a subi une détente rapide : on peut considérer que les échanges thermiques n'ont pas eu lieu et la température de ce gaz a baissé.</p> <p><i>Attention :</i> Le système considéré ici est différent de celui de l'opération 1. Il s'agit toujours d'un système fermé mais de quantité de matière moindre.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>La transformation des $n_0 - n$ moles n'est pas isochore.</p>
3 échauffement isochore	<p>De même qu'en 1, il s'agit d'une phase de mise en équilibre thermique jusqu'à la température T_0. Le gaz s'est échauffé, à volume constant, depuis un état initial de pression P_0 : P_2 est donc supérieure à P_0.</p> <p>Durant cette opération, le récipient contient $(n_0 - n)$ moles de gaz à la température T_0; or, durant l'opération 2, le récipient contenait n_0 moles à la température T_0.</p> <p>Ainsi $P_2 < P_1$ et $h_2 < h_1$.</p>

Compte tenu des valeurs faibles des surpressions, on peut considérer que les deux systèmes étudiés (n_0 moles pour 1 et $n_0 - n$ moles pour 2 et 3) subissent des transformations telles que chaque état intermédiaire peut être considéré comme un état d'équilibre thermodynamique interne.

2 • a. On considère le système constitué des $n_0 - n$ moles de gaz présentes en fin d'expérience dans le récipient. Comme les transformations sont des suites d'états d'équilibre thermodynamique interne ($p_1 \ll P_0$, $p_2 \ll P_0$), que le gaz est parfait et que γ est constant, la loi de Laplace peut s'appliquer pour ces évolutions adiabatiques, soit $PV^\gamma = cte$. Sachant que $\gamma > 1$, la pente en un point d'une adiabatique est supérieure (en valeur absolue) à celle d'une isotherme, en effet on a :

$$d(\ln PV^\gamma) = \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0,$$

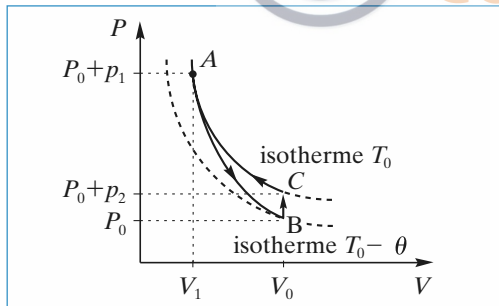
$$\text{d'où } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{adiabatique}} = -\gamma \frac{P}{V}$$

$$d(\ln PV) = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0, \text{ d'où } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{isotherme}} = -\frac{P}{V}.$$

Juste avant l'ouverture du robinet, le point représentatif du système des $n_0 - n$ moles d'air est en A de coordonnées $[V_1, (P_0 + p_1)]$, si V_1 est le volume occupé par les n moles qui vont sortir.

Pendant l'ouverture, le système subit une transformation adiabatique quasistatique caractérisée par $PV^\gamma = C^{\text{ste}}$. Le système atteint le point B , de coordonnées (P_0, V_0) .

Après la fermeture du robinet, le gaz contenu dans le récipient subit un échauffement isochore (il y a transfert thermique à travers les parois du récipient). Il atteint le point C , de volume V_0 et situé sur l'isotherme T_0 qui passe également par A .



b. On considère le système fermé constitué des $(n_0 - n)$ moles qui restent dans le récipient. On peut écrire :

• Pour la transformation adiabatique AB :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{\text{ste}},$$

$$\text{soit } (P_0 + p_1)^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_0^{1-\gamma} (T_0 - \theta)^\gamma$$

$$\text{ou encore: } \left(1 - \frac{p_1}{P_0}\right)^{1-\gamma} = \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right)^\gamma$$

En outre, comme $p_1 \ll P_0$ et $\theta \ll T_0$, la relation ci-dessus conduit, après un D.L. à l'ordre 1 à :

$$(1 - \gamma) \frac{p_1}{P_0} = -\gamma \frac{\theta}{T_0};$$

• pour l'échauffement isochore BC : $\frac{P}{T} = C^{\text{ste}}$

$$\text{d'où } \frac{P_0}{T_0 - \theta} = \frac{P_0 + p_2}{T_0} \text{ soit: } 1 + \frac{p_2}{P_0} = \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right)^{-1}$$

et, puisque $p_2 \ll P_0$ et $\theta \ll T_0$: $\frac{\theta}{T_0} = \frac{p_2}{P_0}$;

• ainsi, en éliminant $\frac{\theta}{T_0}$ des deux relations obtenues,

on en déduit :

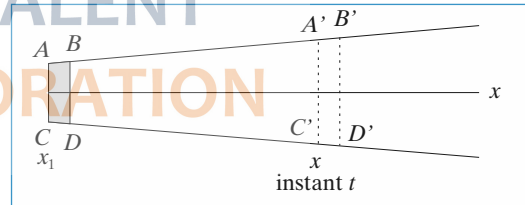
$$(1 - \gamma) \frac{p_1}{P_0} = -\gamma \frac{p_2}{P_0},$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \text{ soit } \gamma = 1,4.$$

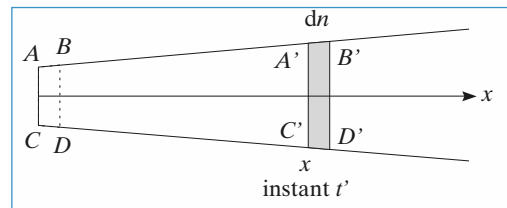
Remarque : L'expérience de Clément-Desormes donne des résultats peu précis. Les déterminations de γ se font actuellement à partir de la mesure de la vitesse du son dans le gaz considéré.

4 Étude d'une tuyère

1 • À l'instant t , la tranche contenant dn moles est en $x = x_1$. Elle est caractérisée par U_1, T_1, P_1, H_1 et v_1 .



• À l'instant t ($t' > t$) elle est à l'abscisse x . Elle est caractérisée par $U(x), T(x), P(x), H(x)$ et $v(x)$.



Pour calculer $U(x) - U_1$, on va considérer la tranche de gaz $ACA'C'$ à l'instant t . À l'instant t' , cette tranche s'est déplacée et occupe un volume $BDB''D''$.

Le système étudié étant fermé et l'écoulement permanent, on a nécessairement $B'' = B'$ et $D'' = D'$.

$T(x)$ et $P(x)$ sont indépendants du temps et la masse totale de la tranche $ACA'C'$ est invariante.

On applique le premier principe entre les instants t et t' à la tranche précédente :

• $Q = 0$, puisque les parois sont adiabatiques ;

• en amont le gaz reçoit un travail $W_1 = P_1 V_{ABCD}$;

- en aval il reçoit le travail :

$$W(x) = -P(x)V_{A'B'C'D'};$$

$$\begin{aligned} & \bullet (\mathcal{E}_{K_{BB'DD'}} - \mathcal{E}_{K_{AA'CC'}}) + (U_{BB'DD'} - U_{AA'CC'}) \\ & = P_1 V_{ABCD} - P(x)V_{A'B'C'D'} \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{E}_{P, \text{ext}} = \text{cte}$;

$$\text{or } \begin{cases} U_{BB'DD'} = U_{BDA'C'} + U_{A'B'C'D'} \\ U_{AA'CC'} = U_{ABCD} + U_{BDA'C'} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \mathcal{E}_{K_{BB'DD'}} = \mathcal{E}_{K_{BDA'C'}} + \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} \\ \mathcal{E}_{K_{AA'CC'}} = \mathcal{E}_{K_{ABCD}} + \mathcal{E}_{K_{BDA'C'}} \end{cases}$$

Ainsi, puisque toutes ces grandeurs sont indépendantes de temps :

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} + U_{A'B'C'D'} + P(x)V_{A'B'C'D'} \\ & = \mathcal{E}_{K_{ABCD}} + U_{ABCD} + P_1 V_{ABCD} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} dm v(x)^2 = \frac{1}{2} dn Mv(x)^2 \\ \mathcal{E}_{K_{ABCD}} = \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} dn Mv_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{A'B'C'D'} = dn V_m(x) \\ V_{ABCD} = dn V_{m_1} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} U_{A'B'C'D'} = U_m(x) \cdot dn \\ U_{ABCD} = U_{m_1} \cdot dn \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } & \frac{1}{2} Mv(x)^2 + U_m(x) + P(x)V_m(x) \\ & = \frac{1}{2} Mv_1^2 + U_{m_1} + P_1 V_{m_1} \end{aligned}$$

Comme $U_m(x) + P(x)V_m(x) = H_m(x)$, on a effectivement bien :

$$H_m(x) + \frac{1}{2} Mv^2(x) = \text{cte}.$$

2 • $H_{m_2} + \frac{1}{2} Mv_1^2 = H_{m_1}$ le gaz est parfait, donc :

$$\begin{aligned} H_{m_1} - H_{m_2} &= \frac{R\gamma}{\gamma-1} - 1 (T_1 - T_2), \text{ soit :} \\ v_2 &= \left[\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_2) \right]^{\frac{1}{2}}. \\ v_2 &= 301,5 \text{ ms}^{-1}. \end{aligned}$$

3 • Si l'on suppose que l'énergie cinétique du gaz en amont de la turbine lui est intégralement transmise :

$$\frac{1}{2} Mv_2^2 = W_{\text{turbine}}.$$

$$\text{Ainsi } W_{\text{turbine}} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_1 - T_2)$$

$$W_{\text{turbine}} = 1455 \text{ J.}$$

5 Étude d'une machine

Question préliminaire

1 • Il s'agit d'une détente de Joule-Thomson.

Le lecteur pourra se reporter à son cours ou à la démonstration donnée à l'exercice 4 (il suffit d'écrire $\mathcal{E}_K(x) = \mathcal{E}_{K_1}$ pour retrouver la démonstration du cours).

2 • Avec les notations de l'exercice 4 :

$-U_{ACA'C'} + U_{BDB'D'}$: c'est lors de l'application du premier principe à la tranche de gaz passant de $ACA'C'$ à $BDB'D'$ qu'interviennent le travail τ' (autre que celui des forces de pression) et le transfert thermique Q échangés au niveau de l'élément (compresseur, turbine, etc.).

La relation $\Delta H = 0$ du **1**) devient $\Delta H = \tau' + Q$, où ΔH représente la variation d'enthalpie d'une tranche de gaz entre l'aval et l'amont de l'élément de machine étudié.

Si la branche contient n moles, cette relation devient :

$$n \Delta H_m = n \tau'_m + n Q_m$$

$$\text{soit : } \Delta H_m = \tau'_m + Q_m$$

A • 1 On est dans les conditions d'application de la loi de Laplace. Ainsi :

$$P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma \text{ et } T_f = x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0.$$

2 • a. Pour un gaz parfait (pour lequel $C_{P,m}$ est constant)

$$\Delta H_m = C_{P,m} \Delta T, \text{ soit :}$$

$$\Delta H_m = C_{P,m} (x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1) T_0.$$

b. D'après la question préliminaire et en tenant compte du caractère adiabatique de la transformation :

$$\tau'_m = \Delta H_m.$$

$$\text{c. } \tau'_m = 8,64 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

3 • a. Seuls les travaux échangés au niveau des compresseurs sont intéressants : le travail au niveau de l'échangeur n'est pas fourni par la machine, il ne « coûte » donc rien.

$$\begin{aligned} \tau_m = \tau_{1m} + \tau_{2m} &= C_{P,m} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] T_0 \\ &+ C_{P,m} \left[\left(\frac{P_f}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] T_0 \end{aligned}$$

en utilisant les résultats du **1**) et du **2**).

$$\text{Soit } \tau = C_{P,m} T_0 \left[\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \left(\frac{P_1}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 2 \right].$$

b. Il suffit d'annuler $\frac{d\tau_m}{dP_1}$. On obtient, après un calcul sans difficulté, $P_1 = \sqrt{P_0 P_f}$

c. $P_1 = 3,5$ bars . $\tau_m = 7,12$ kJ.mol⁻¹ . L'intérêt du compresseur à deux étages apparaît ici, puisque $\tau < \tau'$: le travail total à fournir pour passer de P_0 à P_f est inférieur d'environ 20 % .

B • 1 τ_{c_m} a été calculé à la question précédente :

$$\tau_{c_m} = 7,12 \text{ kJ.mol}^{-1} .$$

2 • τ_T est donné par le résultat de la question préliminaire :

$$\begin{aligned} \tau_{T_m} &= \Delta H_m = C_{P,m} (T_D - T_C) \\ \tau_{T_m} &= -15,25 \text{ kJ.mol}^{-1} . \end{aligned}$$

3 • Le travail utile récupéré sur l'axe vaut $\tau_u = -(\tau_T + \tau_c)$, puisque la turbine et le compresseur à deux étages sont solidaire :

$$\tau_{u_m} = 8,13 \text{ kJ.mol}^{-1} .$$

4 • L'air est échauffé de façon isobare ; or $\Delta H = Q_P$ pour une telle évolution . Ici on a donc :

$$\begin{aligned} Q_m &= \Delta H_{m BC} = C_{P,m} (T_C - T_B) \\ Q_m &= 13,46 \text{ kJ.mol}^{-1} . \end{aligned}$$

5 • Le rendement d'un moteur est défini par le rapport entre le travail utile récupéré et le coût énergétique correspondant :

$$\eta = \frac{\tau_u}{Q} = 0,60 .$$

6 Détermination d'une capacité thermique massique

1 • Puisque le débit gazeux est interrompu, on s'intéresse au système {calorimètre + accessoires + eau} .

On sait que pour des phases condensées, la variation d'énergie interne et celle de l'enthalpie sont quasiment égales :

$$dU = dH = CdT .$$

Si on réalise un bilan énergétique sur la fonction H en considérant que l'expérience se fait à pression constante, on peut écrire $dH = \delta Q_P$. Or le seul échange thermique du système avec le milieu extérieur correspond aux fuites thermiques :

$$\delta Q_P = -k(T - T_0) dt , \text{ soit } CdT = -k(T - T_0) dt$$

$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{k}{C} dt$. En intégrant, compte tenu de la condition initiale $T(t = 0) = T_2$:

$$T = T_0 + (T_2 - T_0) e^{-\frac{kt}{C}} .$$

Remarques : On vérifie que si $t \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow T_0$: le calorimètre est alors en équilibre thermique avec le milieu extérieur .

$\tau = \frac{C}{k}$ est le temps caractéristique de cette mise en équilibre :

• si k est grand, les fuites sont importantes et τ est petit (mise en équilibre rapide) ;

• si C est grand, la capacité du système à emmagasiner de l'énergie thermique est grande, et la mise en équilibre lente .

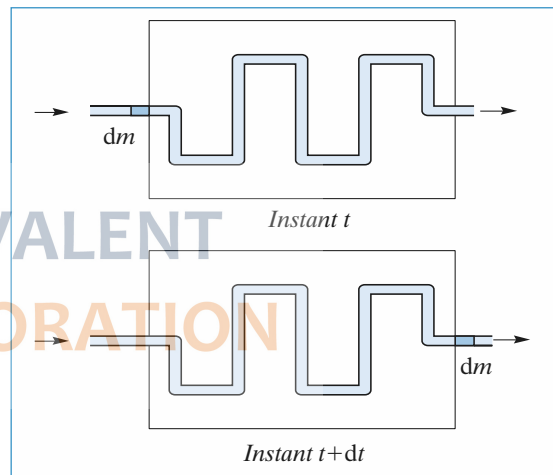
2 • Soit le système constitué, en régime permanent, à l'instant t , du calorimètre, de l'eau, de ses accessoires, de la masse M de gaz présente dans le serpentin dans le calorimètre et de la masse dm qui entrera dans le calorimètre durant l'intervalle dt ci-après .

Entre les instants t et $t + dt$, la masse dm entre à la température T_1 et une autre quantité de matière de même masse dm (régime stationnaire) sort à la température T_2 du calorimètre .

On raisonne de nouveau sur l'enthalpie du système et on fait un bilan énergétique :

$$dH_{\text{système}} = dH_{\{\text{calorimètre} + \text{eau} + \text{accessoires}\}} + dH_{M+dm}$$

or $dH_{\{\text{calorimètre} + \text{eau} + \text{accessoires}\}} = 0$, car $dT = 0$ en régime stationnaire, et $dH_{M+dm} = c_P dm(T_2 - T_1)$ tout se passe entre l'instant t et l'instant $t + dt$ comme si une même masse dm était passée de T_1 à T_2 : ceci n'est vrai qu'en régime stationnaire où $H_M = \text{cte}$.



Ainsi, puisque :

$$\delta Q_P = -k(T_2 - T_0) dt ,$$

on a : $c_P dm(T_2 - T_1) = -k(T_2 - T_0) dt$,

or $dm = D_m dt$ et finalement :

$$c_P = -\frac{k}{D_m} \frac{(T_2 - T_0)}{(T_2 - T_1)} .$$

$$3 \bullet k = \frac{C}{\Delta t} \ln \left(\frac{T_2 - T_0}{T_2 - \Delta T - T_0} \right)$$

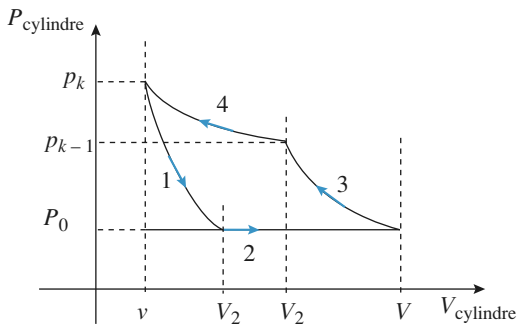
avec $\Delta T = 2$ K et $\Delta t = 600$ s .

$$k = 0,83 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} .$$

• $c_P = 476 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

7 Utilisation d'une pompe

1 • a. Représentons le $k^{\text{ième}}$ cycle du piston sur un diagramme représentant la pression dans le cylindre en fonction du volume du cylindre .



- Étape 1: détente isotherme du gaz initialement contenu dans le volume v à la pression P_{k-1} . S_1 s'ouvre pour le volume V_1 où la pression atteint la valeur P_0 .
- Étape 2: Aspiration d'air atmosphérique.
- Étape 3: compression du gaz initialement contenu dans le volume V à la pression P_0 . S_2 s'ouvre pour le volume V_2 où la pression atteint la valeur P_{k-1} . La compression étant isotherme :

$$P_0 V = P_{k-1} V_2$$

- Étape 4: Compression du gaz contenu dans le cylindre et dans le réservoir, le volume de ce système passant de $V_2 + V_0$ à $V_0 + v$. La compression étant isotherme :

$$P_{k-1} (V_2 + V_0) = P_k (V_0 + v)$$

En éliminant V_2 entre ces deux équations, on obtient la relation de récurrence :

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + v}$$

On obtient successivement les pressions :

$$P_0$$

$$P_1 = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_0 \frac{V_0}{V_0 + v}$$

$$P_2 = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_1 \frac{V_0}{V_0 + v}$$

...

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + v}$$

En éliminant successivement P_{k-1} , P_{k-2} , ..., P_1 , on obtient :

$$P_k = P_0 \frac{V_0}{V_0 + v} \left[1 + \frac{V_0}{V_0 + v} + \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^{k-1} \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} \left[\frac{1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k}{1 - \frac{V_0}{V_0 + v}} \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k$$

$$\text{soit, } P_k = P_0 \frac{V}{v} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k$$

b. Quand k devient très grand, P_k tend vers la limite :

$$P = P_0 \frac{V}{v}$$

Cette pression est atteinte lorsque la soupape S_2 ne s'ouvre plus, même lorsque le piston est en fin de course à droite ; pour retrouver la relation ci-dessus, il suffit donc de réécrire la relation (1) (qui donne la condition d'ouverture de S_2) avec :

$$V_2 = v \text{ et } P_{k-1} = P, \text{ soit } P v = P_0 V.$$

2 • On suppose $v = 0$.

a. Reprenons le résultat de la question 1) a) :

Sachant que $\left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k \approx 1 - k \frac{v}{V_0}$ lorsque v est très petit, on obtient :

$$P_k = P_0 \left(1 + k \frac{V}{V_0} \right)$$

(Relation que l'on peut aussi retrouver par un calcul direct.)

b. Calculons le travail des forces de pression au cours du $m^{\text{ième}}$ cycle du piston. Le travail de la force de pression atmosphérique P_0 est nul puisque, au cours d'un aller et retour, le volume balayé par le piston est nul :

$$- P_0 \Delta V - P_0 (-\Delta V) = 0$$

Dans le cylindre, l'air subit une transformation isotherme :

- lorsque le piston se déplace vers la gauche, la soupape S_1 est constamment ouverte (puisque $v = 0$) ; l'air s'engouffre dans le cylindre à pression constante P_0 , son volume augmente de V , d'où :

$$W_{m1} = - P_0 V = - n R T ;$$

- lorsque le piston se déplace vers la droite, l'air est comprimé dans le cylindre du volume V au volume V_2 (S_2 fermée), d'où :

$$W_{m2} = - n R T \ln \frac{V_2}{V} = - P_0 V \ln \frac{P_0}{P_{m-1}}$$

Ensuite (S_2 ouverte), l'air du cylindre et du réservoir est comprimé du volume $(V_0 + V_2)$ au volume V_0 :

$$W_{m3} = - (n + n_{m-1}) R T \ln \frac{V_0}{V_0 + V_2} = - P_m V_0 \ln \frac{P_{m-1}}{P_m}$$

Au total, le travail des forces de pression pour le $m^{\text{ième}}$ cycle de piston vaut donc :

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = - P_0 V \left(1 + \ln \frac{P_0}{P_{m-1}} \right) - P_m V_0 \ln \frac{P_{m-1}}{P_m}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$W_m = V_0 \left[P_m \ln P_m - P_{m-1} \ln P_{m-1} - (P_m - P_{m-1}) (1 + \ln P_0) \right]$$

puisque l'on a $(n + n_{m-1}) R T = P_0 V + P_{m-1} V_0 = P_m V_0$

On peut ainsi en déduire le travail W_k des forces de pression pour k allers et retours du piston :

$$W_k = \sum_{m=1}^k W_m = P_k V_0 \ln \frac{P_k}{P_0} - (P_k - P_0) V_0$$

Ce travail W_k correspond au travail fourni par le moteur de la pompe.

8 Détente brusque d'un gaz

1 • Le gaz étant homogène, la tranche dx de gaz a une masse $dm = m_{\text{gaz}} \frac{dx}{X(t)}$ et une énergie cinétique

$$d\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} dm v^2(x, t).$$

On en déduit: $d\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m_{\text{gaz}} \frac{x dx}{X^2} \dot{X}^2$

et $\mathcal{E}_{K \text{ gaz}} = \frac{m_{\text{gaz}} \dot{X}^2}{2X^2} \int_{x=0}^x x dx$ d'où:

$$\mathcal{E}_{K \text{ gaz}}(t) = \frac{1}{4} m_{\text{gaz}} \dot{X}^2(t)$$

2 • a. Le gaz contenu dans le cylindre subit une détente adiabatique, supposée quasistatique (puisque P et T sont définis à tout instant). Connaissant le rapport des volumes (le volume double), on applique les relations de LAPLACE:

$$T_2 = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \text{ soit } T_2 = 227 \text{ K}$$

$$P_2 = P_0 \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \text{ soit } P_1 = 1,52 \text{ bar.}$$

La vitesse maximale du piston est obtenue juste avant le choc sur la butée. Effectuons donc un bilan d'énergie entre l'instant initial et juste avant le choc, lorsque le piston arrive en X_2 .

La force exercée par l'atmosphère sur le piston est simple à exprimer, contrairement à la force exercée par le piston sur le gaz situé à l'intérieur. Considérons donc le système {gaz + cylindre + piston}.

Le cylindre et le piston sont ici assimilés à des phases condensées. En l'absence d'échanges thermiques, leur énergie interne est constante, d'où :

$$\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} C_{V, m} (T_2 - T_1).$$

Les échanges thermiques étant nuls et le seul travail étant celui de l'atmosphère (négatif), le bilan d'énergie s'écrit :

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_{K \text{ gaz}} + \Delta \mathcal{E}_{K \text{ piston}} = W_{\text{atmosphère}}$$

$$n_{\text{gaz}} C_{V, m} (T_2 - T_1) + \left(\frac{1}{4} m_{\text{gaz}} + \frac{1}{2} m\right) (V_{\text{max}}^2 - 0) =$$

$$- P_0 \pi a^2 (X_2 - X_1)$$

$$\text{avec } n_{\text{gaz}} = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = \frac{4 P_0 \pi a^2 X_1}{R T_0} \text{ et } m_{\text{gaz}} = M n_{\text{gaz}}.$$

On obtient après simplifications :

$$\frac{4 P_0 X_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{1}{2} V_{\text{max}}^2 \left(\rho e + \frac{P_0 M X_1}{2 R T_0}\right)$$

$$= P_0 X_1$$

$$V_{\text{max}}^2 = \frac{2 P_0 X_1 \left(5 - \gamma - \frac{4}{2^{\gamma-1}}\right)}{(\gamma - 1) \left(\rho e + \frac{P_0 X_1 M}{2 R T_0}\right)}.$$

Pour une estimation grossière, on peut supposer que la vitesse moyenne est de l'ordre de V_{max} , d'où :

$$\tau_0 \approx \frac{X_2 - X_1}{V_{\text{max}}}$$

b. $V_{\text{max}} = 48 \text{ m.s}^{-1}$; $\tau_0 \approx 4 \text{ ms}$.

Les hypothèses sont valides si $c_{\text{son}} \tau_0 \gg X_1$ avec $c_{\text{son}} \approx 3.10^2 \text{ m.s}^{-1}$ (T étant variable, on ne peut attribuer de valeur précise à c_{son}).

On obtient $c_{\text{son}} t_0 \approx 1,2 \text{ m}$. On est à la limite de validité de l'hypothèse quasistatique.

c. Remarquons que, entre le choc et l'état de repos, on ne considère plus le piston comme un système rigide: Le choc provoque des déformations et des vibrations qui, en s'amortissant, dissipent de la chaleur. Le raisonnement qui suit permet de ne pas avoir à étudier le mécanisme de cette conversion d'énergie mécanique en énergie interne.

Effectuons des bilans d'énergie entre «juste avant le choc» et l'état final.

• Le cylindre restant parfaitement rigide et immobile, il ne fournit aucun travail. Le piston ne reçoit donc ni travail ni échange thermique pendant la durée considérée. Le bilan d'énergie pour le piston s'écrit donc :

$$\Delta U_{\text{piston}} + \frac{1}{2} m (0 - V_{\text{max}}^2) = 0$$

$$\text{d'où: } m c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = \frac{1}{2} m V_{\text{max}}^2$$

$$T_{3 \text{ piston}} = T_0 + \frac{V_{\text{max}}^2}{c}. \text{ A.N.: } T_{3 \text{ piston}} - T_0 = 1,1 \text{ K.}$$

• Pendant cette phase, le gaz est isolé :

$$\frac{1}{4} m_{\text{gaz}} V_{\text{max}}^2 = \Delta U_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} \frac{R}{\gamma - 1} (T_{3 \text{ gaz}} - T_2).$$

$$T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = \frac{(\gamma - 1) M V_{\text{max}}^2}{4 R}$$

$$\text{A.N.: } T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = 0,79 \text{ K.}$$

3 • Le gaz subit la même détente adiabatique quasistatique que dans l'hypothèse sans frottement; T_2 est donc inchangée.

$T_{3 \text{ gaz}}$ est légèrement différente en raison de la vitesse plus faible: $T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = 0,14 \text{ K}$.

Faisons un bilan d'énergie pour le système {cylindre + piston + gaz} entre l'état initial et l'état final de repos: $\Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{piston}} + \Delta U_{\text{cylindre}} = W_{\text{atmosphère}}$ avec $\Delta U_{\text{cylindre}} = 0$ (par hypothèse, le cylindre ne s'échauffe pas).

Les frottements se manifestent par des échanges énergétiques entre le cylindre et le piston. Ils n'interviennent donc pas dans un bilan relatif à un système qui inclut ces deux éléments.

$$n_{\text{gaz}} \frac{R}{\gamma - 1} (T_{3 \text{ gaz}} - T_0) + m c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = - P_0 \pi a^2 (X_2 - X_1)$$

$$\frac{4P_0 X_1}{(\gamma-1)T_0} (T_{3 \text{ gaz}} - T_0) + e \rho c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = -P_0 X_1$$

$$e \rho c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = P_0 X_1 \left[\frac{4}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_{3 \text{ gaz}}}{T_0} \right) - 1 \right]$$

Cette relation est vraie qu'il y ait ou non des frottements. Dans les deux cas, $T_{3 \text{ gaz}}$ a pratiquement la même valeur. Avec une précision de deux décimales, on aura encore : $T_{3 \text{ piston}} - T_0 = 1,1 \text{ K}$.

4 • a. $t = 4 \text{ ms} \Rightarrow \delta = 45 \mu\text{m}$; $t = 40 \text{ s} \Rightarrow \delta = 4,5 \text{ mm}$.
Le volume de cylindre susceptible de variation de température est alors : $V = 2\pi a^2 X_1 \delta$.

La capacité thermique de ce volume est :

$$C_{\text{paroi}} = \rho c V = 4\pi a X_1 \delta \rho c.$$

Le gaz échange de la chaleur à volume constant. Sa capacité thermique est : $C_{\text{gaz}} = n \frac{R}{\gamma-1} = \frac{4P_0 \pi a^2 X_1}{(\gamma-1)T_0}$.

$$\frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = \frac{(\gamma-1)\rho c T_0}{P_0} \frac{\delta}{a} = 3,10^3 \frac{\delta}{a};$$

$$t = 4 \text{ ms} \Rightarrow \frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = 7; t = 40 \text{ s} \Rightarrow \frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = 700.$$

La capacité thermique de la paroi n'est donc jamais négligeable (4 ms correspond à la durée de la détente).

b. Écrivons le bilan d'énergie pour le gaz qui reçoit de la chaleur de la paroi, à volume constant :

$$C_{\text{gaz}} \frac{dT}{dt} = h S [T_p(t) - T(t)].$$

La capacité thermique de la paroi étant très grande, sa température est pratiquement constante (elle se comporte comme un thermostat). L'équation devient :

$$\tau \frac{dT}{dt} = -[T(t) - T_0]$$

$$\text{avec } \tau = \frac{C_{\text{gaz}}}{h S} = \frac{P_0 a}{T_0(\gamma-1)h} = 200 \text{ s}.$$

Cette valeur de τ justifie l'hypothèse adiabatique pour les deux premières phases (détente et choc).

La solution, compte tenu de la valeur initiale de T est :

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_2) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

10 minutes après la détente : $t = 3\tau$ et $T = 297 \text{ K}$.

9 stabilité de l'atmosphère

1 • Il suffit d'écrire la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$P'(z) = -\rho g \text{ avec } \rho = \frac{MP}{RT} \text{ d'où : } \frac{P'(z)}{P(z)} = -\frac{Mg}{R T_e(z)}$$

2 • La bulle subit une évolution adiabatique suffisamment « douce » pour que P et T y soient toujours définis. On peut donc appliquer la loi de LAPLACE sous la forme

$$P \rho^{-\gamma} = C^{\text{ste}} \text{ ou, mieux : } P^{-\frac{1}{\gamma}} \rho = C^{\text{ste}}.$$

$$P(z_0 + \zeta)^{-\frac{1}{\gamma}} \rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = P(z_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \rho_e(z_0)$$

$$\rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) \frac{P(z_0 + \zeta)^{-\frac{1}{\gamma}}}{P(z_0)^{-\frac{1}{\gamma}}}$$

ζ étant suffisamment petit : $P(z_0 + \zeta) = P(z_0) + P'(z_0) \zeta$.

$$\text{D'après la question précédente : } P'(z_0) = -P(z_0) \frac{Mg}{R T_e(z)}$$

et donc :

$$P(z_0 + \zeta) = P(z_0) \left(1 - \frac{Mg \zeta}{R T_e(z_0)} \right)$$

$$\text{d'où : } P(z_0 + \zeta)^{\frac{1}{\gamma}} = P(z_0)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} \right).$$

$$\text{On en déduit : } \rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) \left(1 - \frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} \right)$$

Pour l'air ambiant :

$$\rho_e = \frac{MP}{RT} \Rightarrow \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} - \frac{1}{T_e(z)} \frac{dT_e}{dz} = -\frac{Mg}{R T_e(z)} - \frac{1}{T_e(z)}$$

En faisant un nouveau développement à l'ordre 1 :

$$\rho_e(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) + \frac{d\rho_e}{dz} \zeta =$$

$$\rho_e(z_0) \left(1 - \frac{\zeta}{T_e(z_0)} \left(\frac{Mg}{R} + \frac{dT_e}{dz} \right) \right)$$

D'après le théorème d'Archimède, la bulle est ramenée vers sa position initiale si $\rho_{\text{bulle}} > \rho_e$ pour $\zeta > 0$.

Donc, si : $\frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} < \frac{1}{T_e(z_0)} \left(\frac{Mg}{R} + \frac{dT_e}{dz} \right)$, ce qui

$$\text{revient à : } \frac{dT_e}{dz} > -\frac{(\gamma-1)Mg}{\gamma R}$$

Numériquement, on trouve une pente limite de l'ordre de -10 K.km^{-1} , assez proche de la valeur couramment retenue pour la loi $T(z)$. Avec ce modèle simple, l'atmosphère est stable si $T_e(z)$ décroît moins vite que cette valeur limite. Dans ce cas, l'air n'est plus brassé par des courants, ce qui peut provoquer des pics de pollution.

Le problème est en fait plus compliqué car il faut aussi tenir compte de l'humidité de l'air.

10 chauffage d'une enceinte

1 • $\frac{\delta Q}{\delta t}$ s'exprime en W , soit en $J.s^{-1}$; C en $J.K^{-1}$;

T en K ; donc α s'exprime en s^{-1} .

On peut travailler avec l'énergie interne de l'enceinte puisque son volume reste constant : $\Delta U = Q_V$.

Ainsi, avec $\delta Q_V = -\delta Q_{\text{fuites}} = \alpha C(T - T_e) \delta t$

et $dU = CdT$:

$$\frac{CdT}{T - T_c} = -\alpha C \delta t, \text{ soit en intégrant entre } T_i \text{ et } T_f:$$

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{T_i - T_c}{T_f - T_c}.$$

2 • L'application numérique donne:

$$\alpha = 8,85 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ ou } \alpha = 0,32 \text{ h}^{-1}.$$

3 • En travaillant toujours sur la fonction U , mais en tenant compte désormais de la puissance de chauffe:

$$dU = -\alpha C(T - T_c) dt + P_c dt = CdT.$$

Si T est maintenue à T_i , $dT = 0$ et $P_c = \alpha C(T_c - T_e)$.

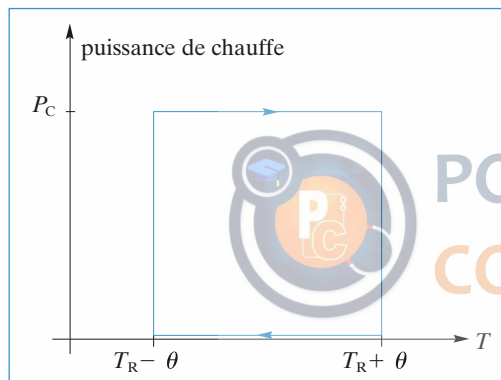
$$\text{A.N.: } P_c = 11,5 \text{ kW}.$$

4 • $T_{RM} = T_c + \frac{P_c}{\alpha C}$, soit $P_c = \alpha C(T_{RM} - T_e)$.

Ainsi, T_{RM} serait la température maximale obtenue en maintenant la puissance P_c continûment.

$$\text{A.N.: } T_{RM} = 297,95 \text{ K pour } P_c = 15 \text{ kW}.$$

• On trace la puissance de chauffe en fonction de T :



Le graphe ci-dessus correspond à un cycle d'hystérésis: lorsque T décroît de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$, le chauffage est coupé et il ne se met en marche qu'à partir de $T_R - \theta$ et ce jusqu'à $T_R + \theta$. Le dispositif peut être comparé à un système comportant un A.O. monté en comparateur à hystérésis.

La puissance de chauffe étant identique à chaque cycle, T_R et θ étant constants, on a bien affaire à un dispositif fonctionnant périodiquement.

• Lorsque T croît de $T_R - \theta$ à $T_R + \theta$, $P_c = 15 \text{ kW}$:

$$CdT = [P_c - \alpha C(T - T_c)] dt,$$

$$\text{soit: } \frac{CdT}{P_c - \alpha C(T - T_c)} = dt.$$

En intégrant entre $T_R - \theta$ et $T_R + \theta$ et en notant Δt_1 l'intervalle de chauffe:

$$\alpha \Delta t_1 = \ln \frac{P_c - \alpha C [(T_R - \theta) - T_c]}{P_c - \alpha C [(T_R + \theta) - T_c]};$$

soit en divisant par αC numérateur et dénominateur du logarithme:

$$\alpha \Delta t_1 = \ln \frac{T_{RM} - (T_R - \theta)}{T_{RM} - (T_R + \theta)}. \quad (1)$$

• Lorsque T décroît de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$, $P_c = 0$:

$$CdT = -\alpha C(T - T_c) dt,$$

et en intégrant comme ci-dessus et en notant Δt_2 le temps mis pour passer de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$:

$$\alpha \Delta t_2 = \ln \frac{[-T_c + (T_R + \theta)]}{[-T_c + (T_R - \theta)]}. \quad (2)$$

• De (1), on constate que T_R doit être inférieur à $T_{RM} + \theta$ et $T_{RM} - \theta$, soit:

$$T_R < T_{RM} - \theta = 297,9 \text{ K}.$$

• De (2), on constate que T_R doit être supérieur à $T_e + \theta$ et $T_e - \theta$, soit:

$$T_R > T_e + \theta = 281,1 \text{ K}.$$

5 • La période temporelle d'évolution Θ est donnée par:

$$\Theta = \Delta t_1 + \Delta t_2, \text{ soit:}$$

$$\Theta = \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{(T_R + \theta) - T_c}{(T_R - \theta) - T_c} + \ln \frac{(T_{RM} - (T_R - \theta))}{(T_{RM} - (T_R + \theta))} \right],$$

$$\text{A.N.: } \Theta = 746 \text{ s, soit } 12 \text{ min } 26 \text{ s}.$$

6 • $\Delta t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_{RM} - (T_R - \theta)}{T_{RM} - (T_R + \theta)} = 572 \text{ s, soit:}$

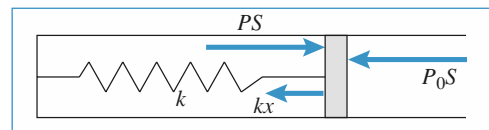
$$\eta = 0,767 \text{ et } \langle \mathcal{P} \rangle = \eta P_c = 11,5 \text{ kW}.$$

On retrouve la valeur de la puissance de chauffe obtenue à la question 3).

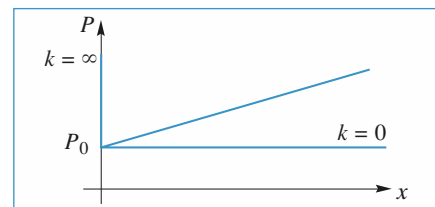
11 Capacité calorifique d'un système complexe

1 • Étudions la résultante des forces s'exerçant sur le piston:

$$+ PS - kx - P_0 S = 0, \text{ ce qui donne: } P = P_0 + \frac{k}{S} x.$$



Doc. 2



Doc. 3

• Si $k = 0$: $P = P_0$ en permanence. La pression étant constante, la transformation est isobare.

• Si $k = \infty$: $x = 0$ en permanence. Le volume étant constant, la transformation est isochore.

2 • Lorsque T varie de dT , x varie de dx : on cherche la relation liant dT et dx . On sait que:

$$PV = nRT, \text{ avec } V = V_0 + Sx = S(L_0 + x),$$

ainsi: $T = \frac{PV}{nR} = S \left(P_0 + \frac{k}{S} x \right) \frac{L_0 + x}{nR}$,
 et donc: $\frac{dT}{dx} = k \frac{L_0 + x}{nR} + \frac{S}{nR} \left(P_0 + \frac{k}{S} x \right) = k \frac{L_0}{nR} + \frac{SP_0}{nR} + 2 \frac{k}{nR} x$,

ou encore: $dx = \frac{nR dT}{kL_0 + P_0 S + 2kx}$.

3 • L'énergie interne du système {gaz + ressort} s'écrit:

$$U = U_{\text{gaz}} + \mathcal{E}_{\text{Pint}}, \text{ avec } U_{\text{gaz}} = C_V(T - T_0) + U_0,$$

et $\mathcal{E}_{\text{Pint}} = \frac{1}{2} kx^2$.

Cela donne: $U = C_V(T - T_0) + U_0 + \frac{1}{2} kx^2$.

On en déduit donc: $dU = C_V dT + kx dx$, et donc l'expression de dU en fonction de dT :

$$dU = C_V dT + \frac{kx nR dT}{kL_0 + P_0 S + 2kx} = \left(C_V + nR \frac{kx}{kL_0 + P_0 S + 2kx} \right) dT.$$

4 • On commence par calculer le travail élémentaire des forces extérieures: $\delta W = -P_0 S dx$. La variation d'énergie interne est: $dU = C_V dT + kx dx$, ce qui donne:

$$\delta Q = dU - \delta W = C_V dT + (kx + P_0 S) dx.$$

La capacité calorifique de ce système est définie par $\delta Q = C_K dT$, ce qui donne:

$$C_K = C_V + nR \frac{kx + P_0 S}{kL_0 + P_0 S + 2kx},$$

ou: $C_K = C_V + nR \frac{1}{1 + \frac{k(L_0 + x)}{P_0 S + kx}}$.

On examine les cas limites:

- si $k = 0$; la transformation est isobare: $C_K = C_V + nR = C_P$;
- si $k = \infty$; la transformation est isochore: $C_K = C_V$.

12 Transformations d'un gaz réel

1 • La détente de Joule-Gay-Lussac est isoénergétique: les parois immobiles ne fournissent aucun travail et on les considère adiabatiques. Il suffit donc d'écrire: $U = n U_m$ constante, soit U_m constante. Le volume molaire passe de 10 L à 20 L.

$$C_{V,m}(T_1 - T_0) = a \left(\frac{n}{V_1} - \frac{n}{V_0} \right) = \frac{-a}{2V_0}$$

d'où: $T_1 = T_0 - \frac{na}{2C_{V,m}V_0}$.

A.N.: $T_1 - T_0 = -4,0 \text{ K}$.

Il faut faire la mesure de température dès que le gaz s'est mis à l'équilibre. Si on attend trop (de l'ordre de la minute), les échanges thermiques avec la couche interne de la paroi ne sont plus négligeables (voir la discussion de

l'exercice 8).

Si $a = 0$, on retrouve bien le résultat connu pour le gaz parfait: $T_1 = T_0$, car l'énergie interne n'est fonction que de T .

2 • L'échange thermique ne se calcule pas directement. En revanche, nous avons les moyens de calculer ΔU et W .

$$\Delta U = n \left[C_{V,m}(T_0 - T_0) - a \left(\frac{n}{V_2} - \frac{n}{V_0} \right) \right] = - \frac{n^2 a}{V_0}$$

La transformation étant une succession d'états d'équilibre interne, on peut écrire:

$$W = \int_{V_0}^{V_2} -P dV \text{ avec } P = \frac{nRT_0}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

On obtient: $W = nRT_0 \ln \frac{V_0 - nb}{V_2 - nb} - n^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_0} \right)$

$$= nRT_0 \ln \frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb} - \frac{n^2 a}{V_0}.$$

Par différence:

$$Q = \Delta U - W = -nRT_0 \ln \frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb}.$$

A.N.: $W = 15,4 \text{ kJ}$ et $Q = -17,1 \text{ kJ}$.

3 • Pour une évolution adiabatique infinitésimale:

$$\delta W = -P dV = dU.$$

Pour le gaz étudié: $-\frac{nRT}{V - nb} dV + \frac{n^2 a}{V^2} dV = nC_{V,m} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$.

Il reste: $R \frac{dV}{V - nb} + C_{V,m} \frac{dT}{T} = 0$.

Qui s'intègre en: $(V - nb)T^{C_{V,m}} = C^{\text{ste}}$

La température atteinte est donc:

$$T_3 = T_0 \left(\frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb} \right)^{\frac{R}{C_{V,m}}}.$$

A.N.: $T = 386 \text{ K}$.

Notons que, comme $nb \ll V_0$, le résultat est très peu différent de celui obtenu avec le modèle du gaz parfait.

On obtient le travail par:

$$W = \Delta U = nC_{V,m}(T_3 - T_0) - \frac{n^2 a}{V_0}.$$

A.N.: $W = 19,0 \text{ kJ}$.

Exercices THERMODYNAMIQUE 2

1 Utilisation de tables thermodynamiques

A. Étude du dihydrogène

Les physiciens utilisent fréquemment des tables de données thermodynamiques (et des diagrammes entropiques ou enthalpiques ainsi que nous le verrons aux *chapitres* 5 et 6).

Ces tables sont construites à partir de mesures thermo-élastiques sur les gaz et les liquides. Celles-ci permettent l'établissement d'une équation d'état et le calcul de fonctions d'état telles que l'enthalpie et l'entropie.

Le *tableau* ci-dessous donne les valeurs de l'entropie molaire s du dihydrogène H_2 en $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ pour différentes valeurs de température et de pression.

T (K) \ P (bars)	100	10	1
150	39,5	51,2	60,6
90	34,8	45,8	55,2

1 • Vérifier que le dihydrogène se comporte comme un gaz parfait monoatomique pour des valeurs de pression inférieures ou égales à 10 bars.

2 • On réalise la compression isotherme, pour $T = 150$ K, d'un kilogramme de dihydrogène de 10 bars à 100 bars. Quelle est la variation d'entropie correspondante ?

Qu'aurait-on trouvé en faisant l'hypothèse que le dihydrogène garde un comportement parfait pour ces valeurs de pression ?

Données : $R = 8,314 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$; $\gamma = \frac{5}{3}$.

B. Étude de l'eau liquide

Le *tableau* ci-dessous donne les valeurs de l'entropie molaire s de l'eau liquide en $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ pour différents couples (T, P) . La valeur 0 est prise arbitrairement pour $T = 0^\circ C$.

T ($^\circ C$) \ P (bars)	200	100	10
300	3,20	3,24	–
200	2,30	2,32	–
100	1,30	1,30	1,30

Commenter ce tableau et vérifier sa concordance avec le modèle des phases condensées donné dans le cours. On supposera la chaleur massique de l'eau constante et égale à $4,2 J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$.

Conseils

A. Quelle est l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en variables (T, P) ? Comparer les valeurs de Δs obtenues à partir du tableau à celles que donne l'expression de l'entropie d'un gaz parfait pour des transformations isobares, puis pour des transformations isothermes.

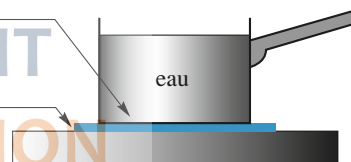
B. Que penser de l'influence de la pression ? Comment s'exprime ds pour une phase condensée ?

2 Chauffage d'une masse d'eau

On s'intéresse à une masse d'eau, m , de capacité calorifique massique constante, c . Elle est chauffée, dans une casserole, sur une plaque électrique de température constante T_p .

fond de la casserole :
bon conducteur
thermique

plaque
électrique
à T_p



Au cours de cette « expérience », l'eau passe de T_1 à T_2 . En faisant toutes les hypothèses qui paraissent raisonnables, modéliser l'évolution de l'eau et en déduire sa variation d'entropie et l'entropie créée.

Données : $c = 4,18 J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$; $m = 1$ kg ; $T_1 = 300$ K ; $T_2 = 350$ K ; $T_p = 1\ 000$ K.

Conseils

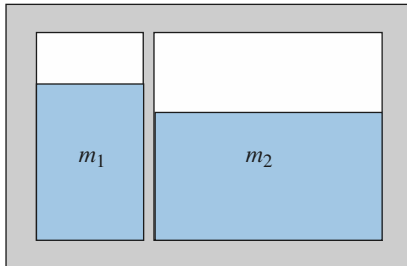
- Que penser de la pression du milieu extérieur ?
- Le fond de la casserole est bon conducteur thermique : que peut-on dire de sa température ?
- Le chauffage de l'eau est-il lent ou rapide ?
- La température de l'eau est-elle uniforme ? Peut-on considérer m comme constant ?

3 Création d'entropie et transfert thermique

Un récipient supposé adiabatique est séparé en deux compartiments contenant, l'un une masse m_1 d'eau et l'autre une masse m_2 d'eau. On suppose que l'eau est une phase condensée idéale de capacité thermique massique constante c .

Les températures initiales sont T_{1i} et T_{2i} avec $T_{1i} < T_{2i}$. La cloison qui sépare les deux masses d'eau étant faiblement diathermane, le transfert thermique entre les deux compartiments est lent et on peut supposer que les températures des deux compartiments sont homogènes à chaque instant; ce sont deux fonctions des temps notées $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

On négligera la capacité thermique de la cloison diathermane.



1 • Quelle relation le premier principe impose-t-il entre $T_1(t)$ et $T_2(t)$? Le premier principe permet-il de prévoir le sens d'évolution et l'état final?

2 • Exprimer l'entropie $S(t)$ du système isolé en fonction des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$. En déduire le sens d'évolution et les températures finales. Commenter.

3 • Déterminer l'entropie créée pendant l'opération dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = m$.

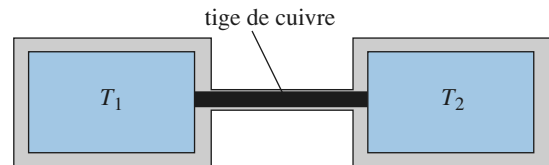
- Conseils**
- L'entropie et l'énergie interne sont des fonctions d'état extensives.
 - Quelle est l'expression de l'entropie pour une phase condensée idéale?
 - Comment évolue l'entropie d'un système isolé?

4 Bilan d'entropie pour un conducteur thermique

Deux thermostats Θ_1 et Θ_2 de températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$) sont reliés par une tige de cuivre, isolée sur ses faces latérales. Après un régime transitoire de quelques heures, le système atteint un régime permanent. La température d'un point quelconque de la tige ne dépend plus du temps.

Soit Q_1 et Q_2 les transferts thermiques de Θ_1 et de Θ_2 vers la tige pendant une durée donnée τ .

Déterminer l'entropie créée pendant cette durée τ .



Conseils

- Quelle relation relie Q_1 et Q_2 ?
- L'état de la tige est invariable. Que peut-on en déduire pour l'entropie de la tige?
- Y a-t-il création d'entropie dans les thermostats?
- Quelle est l'expression de l'entropie échangée par la tige?

5 Bilan d'entropie pour un système avec frottements

Deux solides Σ_1 et Σ_2 , considérés comme des phases condensées idéales de capacités thermiques C_1 et C_2 sont en contact.

Σ_1 est immobile. Lorsqu'un opérateur exerce sur Σ_2 une force $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{e}_x$, Σ_2 peut glisser sur Σ_1 selon un mouvement de translation parallèle à l'axe horizontal Ox et Σ_1 exerce sur Σ_2 une force de frottement $\vec{F}_{frot} = F_{frot} \vec{e}_x$.

On admet pour la force de frottement le modèle classique des forces de frottement solide/solide:

- Si Σ_2 est en mouvement, \vec{F}_{frot} est opposée au mouvement et de norme constante égale à Φ .
- Si le système est immobile, F_{frot} est comprise entre $-\Phi$ et $+\Phi$.

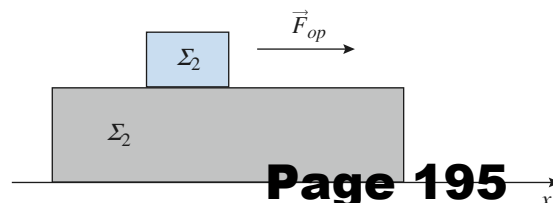
1 • Les variables d'état x et F_{frot} sont-elles reliées par une équation d'état de type $f(F_{frot}, x, T) = 0$?

2 • Entre deux états d'équilibre infiniment voisins:

- Écrire la relation entre les différentielles dU et dS pour le système constitué des deux solides.
- Écrire le premier principe et en déduire une expression de la variation infinitésimale d'entropie.

3 • On néglige les échanges thermiques entre le système constitué par les deux solides et l'extérieur.

Le système est initialement à l'équilibre thermique à la température T_A , puis Σ_2 est tiré (toujours dans le même sens) sur une distance ℓ et on attend que l'équilibre thermique se rétablisse à une température T_B . Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation.





Conseils

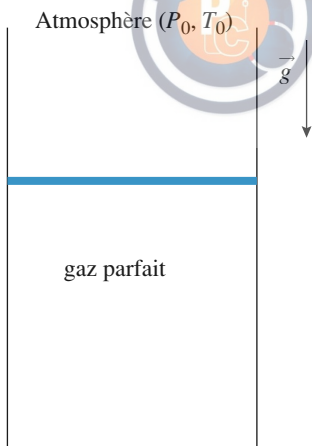
- L'énergie interne et l'entropie sont des variables extensives. Or, U et S sont connues pour chaque solide.
- Quel est le travail de l'opérateur lors d'un déplacement entre deux positions d'équilibre ? On pourra faire un bilan d'énergie mécanique.
- Peut-on résoudre la question 3 en intégrant l'expression obtenue à la question 2 ?

6 Compression et détente monothermes

Un cylindre aux parois athermanes contient n moles d'un gaz parfait dont le coefficient γ est constant. Il est fermé par un piston de masse m et de section S coulisant sans frottement, également athermane.

Dans l'état initial, le gaz, le piston et le cylindre sont à l'équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère, de pression P_0 et de température T_0 ; on note P_1 la pression dans le cylindre.

Dans tout cet exercice, on s'intéresse au système constitué par le cylindre, le piston et le gaz enfermé dans le cylindre.



1 • On pose un solide de masse M sur le piston, puis on laisse évoluer le système vers un nouvel état d'équilibre mécanique et thermique. La pression dans le cylindre est alors égale à P_2 .

Déterminer les échanges énergétiques entre l'atmosphère et le système, puis l'entropie créée au cours de l'opération.

2 • On enlève le solide de masse M et le gaz se détend, jusqu'à un nouvel état d'équilibre.

Caractériser ce nouvel état d'équilibre et déterminer les échanges énergétiques et l'entropie créée au cours de l'opération. Conclure.

Conseils

- Pour chaque opération, quelle est la variation d'énergie interne du système ? Peut-on en déduire simplement l'échange thermique ?
- Pour chaque opération, quelle est la variation d'entropie du cylindre, du piston et du gaz ?

7 Compression et détente adiabatiques

Un cylindre vertical, de section $S = 100 \text{ cm}^2$ est rempli d'air considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant.

Un piston de masse $m = 100 \text{ g}$ coulisse en faisant varier le volume du cylindre.

Le volume intérieur est divisé par une masse $m_0 = 0,10 \text{ kg}$ de laine d'acier (enchevêtrement serré de fils d'acier). La capacité thermique de l'acier est $c_0 = 0,44 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

À l'extérieur, l'atmosphère est à la pression constante $P_0 = 1,0 \text{ bar}$.

Dans l'état initial, l'air intérieur est à l'équilibre thermodynamique, sa température est $T_1 = 295 \text{ K}$, la pression est P_1 et il occupe un volume $V_1 = 10 \text{ litres}$.

On pose alors un objet de masse $M = 9,9 \text{ kg}$ sur le piston. Celui-ci descend et se stabilise lorsque le gaz intérieur est à nouveau à l'équilibre thermodynamique ; la température est alors T_2 et la pression P_2 . On suppose que le piston reste toujours au dessus de la séparation.

On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 • Calculer P_1 et P_2 .

2 • On suppose que :

- Les parois du cylindre sont adiabatiques.
- À l'équilibre, la laine d'acier est à la même température que l'air.
- Les frottements entre le piston et le cylindre sont négligés.

Discuter la pertinence de ces hypothèses simplificatrices. La première et la seconde sont-elles contradictoires ?

3 • Les hypothèses étant admises, déterminer, une fois l'équilibre atteint, la température T_2 et le volume V_2 occupé par l'air.

On posera $p = \frac{P_1}{(\gamma - 1)} + m_0 c_0 \frac{T_1}{V_1}$ et on exprimera

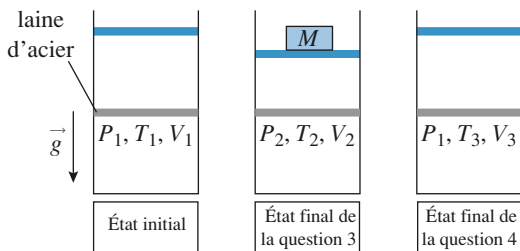
les résultats en fonction de T, V_1, P_1, P_2 et p .

4 • On enlève l'objet de masse M du piston et lorsque le nouvel équilibre thermodynamique est atteint, le volume et la température sont égaux à V_3 et T_3 .

a. Sans les calculer, comparer V_3 à V_1 et T_3 à T_1 .

b. Exprimer T_3 en fonction de T_1, p, P_1 et P_2 et calculer sa valeur. Vérifier le résultat de la question précédente.

c. Calculer l'entropie créée au cours des deux opérations. Conclure.



Conseils

- Rappelons qu'une paroi n'est jamais intrinsèquement adiabatique ou diathermane. Il faut se poser la question de la rapidité des échanges thermiques entre le gaz et les solides. Ces échanges sont d'autant plus rapides que la surface de contact est grande.
- Pour quel système faut-il faire un bilan d'énergie ? le gaz seul ou le système {gaz + laine d'acier + piston + surcharge} ? Doit-on faire un bilan sous forme infinitésimale « $dU = \delta Q + \delta W$ » ou sous la forme « $\Delta U = Q + W$ » ?
- Quelle est la dimension de p ?
- L'évolution est-elle réversible ? Peut-on utiliser la loi de LAPLACE ?
- Rappelons que l'entropie est une fonction extensive. Il suffit donc d'additionner les variations d'entropie des différentes composantes du système.

8 $S(U, V)$, fonction caractéristique

Soit un système constitué de dioxyde de carbone.

Ce gaz est caractérisé par la fonction $S(U, V)$ donnée pour une quantité de matière $n = 1$ mole de gaz :

$$S(U, V) = S_0 + C_{V, m} \ln \left(\frac{U + \frac{a}{V}}{U_0 + \frac{a}{V_0}} \right) + R \ln \left(\frac{V - b}{V_0 - b} \right).$$

S_0, U_0 et V_0 sont respectivement les valeurs de l'entropie, de l'énergie interne et du volume de cette mole de gaz dans un état de référence arbitraire donné.

Données : $C_{V, m}$ est la capacité calorifique molaire à volume constant du dioxyde de carbone :

$$C_{V, m} = 28,50 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1};$$

a et b sont des constantes propres au dioxyde de carbone :

$$a = 0,37 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2} \quad \text{et} \quad b = 4,30 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1};$$

R est la constante universelle : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1 • Donner deux expressions différentes de la différentielle, $dS(U, V)$, de l'entropie d'une mole de gaz.

En déduire, d'une part, l'expression de l'énergie interne, $U(T, V)$, d'une mole de gaz et, d'autre part, son équation d'état :

$$f(P, V, T) = 0.$$

2 • Deux moles de ce gaz subissent une détente de Joule – Gay-Lussac d'un volume initial $V = 5,00 \text{ dm}^3$ et d'une température initiale $T = 293,0 \text{ K}$ à un volume final $2V$.

a. Calculer les variations de température et d'entropie correspondantes.

b. Comparer les résultats obtenus à ceux de la détente de deux moles de gaz parfait de même capacité calorifique molaire à volume constant dans les mêmes conditions initiales.

Conseils

1) La fonction entropie associée à un système thermodynamique donné est-elle unique ? Peut-on alors identifier deux expressions différentes de $dS(U, V)$, membre à membre ? Comment obtenir ces deux expressions ?

2) Le système est constitué de deux moles de gaz : comment sont modifiées les expressions de $U(T, V)$ et $S(T, V)$?

9 Le gaz de photons

À l'intérieur d'une cavité vide dont les parois sont à l'équilibre thermique, il existe des ondes électromagnétiques dont l'intensité et la répartition des fréquences dépend de la température. À une onde électromagnétique on associe des particules (« grains d'énergie ») appelées photons et on considère que ceux-ci se comportent comme un gaz.

Des considérations théoriques amènent à poser l'expression de l'entropie, fonction du volume et de l'énergie :

$$S(V, U) = \frac{4}{3} (\sigma_0 V U^3)^{\frac{1}{4}} \quad \text{où} \quad \sigma_0 \text{ est une constante}$$

universelle ; $\sigma_0 = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}^{-4}$.

1 • En déduire la relation entre l'énergie, le volume et la température, puis la relation entre pression et température.

2 • La cavité, de volume $V = 1 \text{ L}$ contient 1 mole de dihydrogène. Pour quelle température la pression de radiation est-elle égale à la pression exercée par les particules matérielles (on suppose que, pour la tempé-

ratures très élevées, les molécules de H_2 sont décomposées en protons et en électrons qui se comportent comme des gaz parfaits monoatomiques).

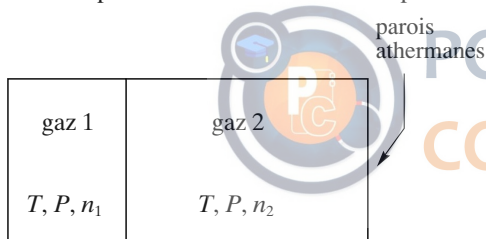
3 • Déterminer la capacité thermique à volume constant associée au rayonnement.

Conseils

- En écrivant l'identité thermodynamique, on constate que P et T peuvent être déduites des dérivées partielles de la fonction S de U et V .
- Quelle est la définition de C_V pour un fluide quelconque ?

10 Transfert de matière, irréversibilité

Un récipient, dont les parois sont athermanes, est séparé en deux compartiments par une paroi amovible; dans l'un se trouvent n_1 moles de gaz parfait occupant un volume V_1 et, dans l'autre, n_2 moles de gaz parfait occupant un volume V_2 . À l'instant initial, les deux gaz sont à l'équilibre sous la même pression P et à la même température T .



On ôte la paroi mobile et on attend l'établissement d'un nouvel équilibre thermodynamique.

- 1 • Déterminer l'état final de chacun des deux gaz.
- 2 • Déterminer l'entropie créée au cours de l'évolution par le système constitué des deux gaz.
- 3 • On pose $n_2 = xn_1$; étudier et tracer la fonction $\mathcal{S}_{\text{créée}}(x)$ pour x tendant vers zéro. Conclure quant à la réversibilité éventuelle de l'évolution.

Conseils

- 1) Réaliser un bilan énergétique pour l'ensemble des deux gaz et utiliser l'extensivité de l'énergie interne.
- 2) Réaliser un bilan entropique et utiliser l'extensivité de l'entropie.
- 3) Discuter de la pente à l'origine de la fonction $\mathcal{S}_{\text{créée}}(x)$.

11 système à deux niveaux

Soit un système de volume constant constitué d'un grand nombre N de particules en équilibre à la température T et dont chacune peut avoir deux valeurs d'énergie E_1 ou E_2 , avec $E_2 > E_1$ (système «à deux niveaux»).

Soit n_1 le nombre de particules d'énergie E_1 et n_2 le nombre de particules d'énergie E_2 .

On suppose que la répartition sur les niveaux d'énergie suit la loi statistique de Boltzmann :

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right).$$

- 1 • Exprimer la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de dn_1 et $\Delta E = E_2 - E_1$.
- 2 • Exprimer la différentielle de l'entropie du système en fonction de T , ΔE et dn_1 . On utilisera la formule de Stirling $\ln(N!) = N \ln(N)$ valable pour N grand.
- 3 • Montrer alors que l'on retrouve l'identité thermodynamique.

Conseils

- 1) L'énergie interne est une grandeur extensive.
- 2) Comment s'exprime l'entropie statistique ? Combien y a-t-il de manières de réaliser l'état : $\{n_1$ particules d'énergie E_1, n_2 particules d'énergie $E_2\}$?

Corrigés TD THERMODYNAMIQUE 2

1 Utilisation de tables thermodynamiques

A • 1 L'entropie massique d'un gaz parfait s'exprime par :

$$s(T, P) = s(T_0, P_0) + \frac{1}{M} R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right) ;$$

pour un gaz parfait monoatomique $\gamma = \frac{5}{3}$, et pour le dihydrogène $M = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Ainsi, en $\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, on obtient :

$$\Delta s = 4,157 \left(2,5 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right) .$$

• On calcule la variation d'entropie correspondante pour un refroidissement isobare à la pression $P = 10 \text{ bars}$, de $T = 150 \text{ K}$ à $T = 90 \text{ K}$:

$$\Delta s = 4,157 \left(2,5 \ln \left(\frac{90}{150} \right) \right) = -5,3 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'application numérique réalisée avec le tableau donne $\Delta s = -5,4 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. L'accord est donc très bon.

• On calcule maintenant la variation d'entropie pour une compression isotherme, à $T = 150 \text{ K}$, de 1 à 10 bars :

$$\Delta s = -4,157 \left(\ln \left(\frac{10}{1} \right) \right) = -9,6 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'application numérique, réalisée avec les données du tableau, donne $\Delta s = -9,4 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; l'accord est encore bon.

2 • La lecture sur le tableau conduit à :

$$\Delta s = -11,7 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

En appliquant la relation des gaz parfaits :

$$\Delta s = -4,157 \ln \left(\frac{100}{10} \right) = -9,6 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Le comportement du fluide n'est plus parfait.

Remarques

• Il faut noter que pour une pression de 100 bars, à ces valeurs de température, le dihydrogène est dans un état dit fluide (ou supercritique), sur lequel on reviendra dans le chapitre 5.

• Il est conseillé de vérifier la cohérence du signe d'une variation d'entropie : l'augmentation de l'ordre au cours de la transformation doit correspondre à une diminution de l'entropie (cf. la dernière partie du résumé de cours et les derniers exercices du chapitre).

Par exemple, ici, une compression isotherme – c'est-à-dire à agitation thermique constante – correspond à une diminution du volume, l'ordre du système augmente : Δs est effectivement négatif.

B • L'analyse du tableau montre que même pour des températures et des pressions élevées, l'influence de la pression est négligeable : la compression isotherme de 100 à 200 bars, à $300 \text{ }^\circ\text{C}$, d'un gramme d'eau liquide correspond à une variation d'entropie de $-0,04 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Il reste à vérifier la relation $\Delta s = mc \ln \left(\frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} \right)$ qui découle

de l'identité thermodynamique pour une phase condensée : $dU = TdS$ et $dU = mcdT$.

Pour un refroidissement isobare de $300 \text{ }^\circ\text{C}$ à $200 \text{ }^\circ\text{C}$, soit de 573 K à 473 K , le tableau donne :

$$\Delta s = -0,9 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

le calcul donne :

$$\Delta s = -0,8 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'accord est bon.

Pour un refroidissement isobare de $200 \text{ }^\circ\text{C}$ à $100 \text{ }^\circ\text{C}$, soit de 473 K à 373 K , le tableau donne :

$$\Delta s = -1,0 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

le calcul donne :

$$\Delta s = -1,0 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'accord est excellent.

Remarque : L'accord est d'autant meilleur que la température est proche de $100 \text{ }^\circ\text{C}$, car la capacité thermique massique c est alors plus proche de la valeur $4,2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (c n'est pas constante sur les intervalles de température étudiés).

2 Chauffage d'une masse d'eau

Afin de modéliser au mieux la situation, on fait les hypothèses suivantes relatives à l'eau, la casserole, la plaque et le milieu extérieur :

H₁ : L'ensemble {eau + casserole + plaque} subit une transformation monobare sous la pression atmosphérique.

H₂ : On suppose que la casserole est adaptée à ce type d'emploi (fond épais) et qu'elle repose correctement sur la plaque : dans ces conditions, on peut considérer que l'ensemble {casserole + plaque} constitue un thermostat à la température T_p .

H₃ : On suppose que l'intensité du flux thermique du thermostat vers l'eau est important (bon contact thermique) : dans ces conditions, l'échauffement de l'eau est « rapide », et les échanges thermiques vers l'extérieur sont négligeables. L'ensemble {eau + casserole + plaque} est isolé thermiquement de l'extérieur.

H₄ : On suppose que les températures T_1 et T_2 de l'eau correspondent à des températures uniformes de cette eau au début et à la fin de « l'expérience » ; les mouvements de convection dans l'eau permettent d'identifier cette hypothèse.

H₅: On ne fait aucune hypothèse sur l'état de l'eau entre le début et la fin de « l'expérience ».

H₆: Le chauffage de l'eau étant rapide entre 27 °C et 77 °C (températures suffisamment éloignées de l'ébullition de l'eau), on néglige l'évaporation de l'eau et $m = \text{constante}$.

La modélisation est donc la suivante :

On est en présence de l'échauffement monobare (H₁) d'une masse d'eau (de T_1 à T_2), en contact avec un thermostat à température T_p (H₂), l'ensemble {eau + thermostat} étant isolé thermiquement de l'extérieur (H₃). La température de l'eau est bien définie au début et à la fin « l'expérience » (H₄), mais inconnue dans les états intermédiaires (H₅). L'évaporation étant négligeable (H₆), le système étudié est fermé.

L'état de l'eau étant connu au début et à la fin de l'expérience,

$$\text{on a } \Delta S = m c \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Le transfert thermique $m c (T_2 - T_1)$, fourni à l'eau sous la température constante T_p , donne une entropie d'échange $\mathcal{S}_{\text{échange}}$ égale à :

$$\mathcal{S}_{\text{échange}} = \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} .$$

On en déduit l'entropie créée :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S - \mathcal{S}_{\text{échange}} = m c \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} .$$

A.N.: $\Delta S = m c \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,64 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$

$$\mathcal{S}_{\text{échange}} = \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} = 0,21 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$$

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S - \mathcal{S}_{\text{échange}} = 0,43 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Cette quantité est effectivement positive.

3 Création d'entropie et transfert thermique

1 • Soit le système isolé constitué par les deux masses d'eau. Son énergie interne se conserve, d'où :

$$m_1 T_1(t) + m_2 T_2(t) = m_1 T_{1i} + m_2 T_{2i} .$$

2 • L'entropie, fonction d'état, ne dépend que de la température pour les phases condensées.

Pour une phase condensée, le volume étant constant, l'identité thermodynamique se réduit à :

$$dU = T dS \text{ avec } dU = m c dT .$$

On en déduit $dS = m c \frac{dT}{T}$, d'où : $S = m c \ln \frac{T}{T_0} + S_0$

si S_0 est l'entropie pour $T = T_0$.

L'entropie étant une fonction extensive : $S_{\text{système}} = S_1 + S_2$ soit :

$$S(t) = m_1 c \ln \frac{T_1(t)}{T_{1i}} + m_2 c \ln \frac{T_2(t)}{T_{2i}} + S(0) .$$

L'entropie de ce système isolé ne peut qu'augmenter, soit $\frac{dS}{dt} \geq 0$, l'égalité correspondant à l'état d'équilibre final.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m_1 c}{T_1(t)} \frac{dT_1}{dt} + \frac{m_2 c}{T_2(t)} \frac{dT_2}{dt}$$

La relation imposée par la conservation de l'énergie se traduit par : $m_1 \frac{dT_1}{dt} = -m_2 \frac{dT_2}{dt}$, d'où :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m_1 c}{T_1(t)} \frac{dT_1}{dt} \left(1 - \frac{T_1(t)}{T_2(t)} \right) \geq 0 .$$

T_{1i} étant inférieur à T_{2i} , cette condition se traduit par :

$$\frac{dT_1}{dt} > 0 \text{ et donc } \frac{dT_2}{dt} < 0 .$$

Le système cesse d'évoluer lorsque l'état d'équilibre caractérisé par $T_1 = T_2$ est atteint.

Cette température finale est donnée par :

$$T_f = \frac{m_1 T_{1i} + m_2 T_{2i}}{m_1 + m_2} .$$

On aurait obtenu directement ce résultat en considérant comme évident que le système évolue vers l'équilibre thermique. Cette loi d'évolution vers l'équilibre thermique peut être vue comme une conséquence du second principe.

3 • Il suffit de reprendre l'expression de l'entropie du système :

Comme l'entropie échangée est nulle :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S = m_1 c \ln \frac{T_f}{T_{1i}} + m_2 c \ln \frac{T_f}{T_{2i}} .$$

Si $m_1 = m_2 = m$, alors $T_f = \frac{1}{2} (T_{1i} + T_{2i})$

$$\text{et } S_{\text{créée}} = m c \ln \frac{(T_{1i} + T_{2i})^2}{4 T_{1i} T_{2i}} .$$

Comme $(T_{1i} + T_{2i})^2 - 4 T_{1i} T_{2i} = (T_{1i} - T_{2i})^2 > 0$, on vérifie que $S_{\text{créée}}$ est toujours positive.

4 Bilan d'entropie pour un conducteur thermique

En régime permanent, l'énergie interne du cuivre est constante. Le travail étant nul on a : $Q_1 + Q_2 = 0$.

Effectuons un bilan d'entropie pour le système {tige} .

• Le régime étant permanent, l'état de la tige est invariable et donc $\Delta S = 0$.

$$\bullet S_{\text{échange}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = Q_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} .$$

• ΔS étant nul, l'entropie créée dans la tige est :

$$S_{\text{créée}} = -S_{\text{échange}} \text{ soit : } S_{\text{créée}} = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} .$$

Comme il n'y a pas de création d'entropie dans le thermostat (qui est toujours en équilibre interne) l'entropie créée se limite à l'entropie créée dans la tige.

5 Bilan d'entropie pour un système avec frottements

1 • La force de frottement est indépendante de la position de S_2 mais dépend de la vitesse et de la force exercée par l'opérateur. Il n'existe donc pas d'équation d'état reliant x et F_{frot} .

2 • Dans un état d'équilibre, les deux températures sont égales : $T_1 = T_2 = T$.

• Pour chaque solide, phase condensée idéale, l'identité thermodynamique s'écrit :

$$dU_1 = T dS_1 \text{ et } dU_2 = T dS_2 .$$

U et S étant des fonctions d'état extensives, nous pouvons écrire :

$$dU = dU_1 + dU_2 = T(dS_1 + dS_2) \text{ d'où : } dU = T dS .$$

• Considérons un déplacement où x croît uniformément d'une position d'équilibre x_1 à une position d'équilibre x_2 .

Les vitesses en x_1 et en x_2 étant nulles, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre x_1 et x_2 s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_K = 0 = W_{\text{op}} + W_{\text{frot}} = W_{\text{op}} - \Phi(x_2 - x_1)$$

$$\text{d'où : } W_{\text{op}} = \Phi(x_2 - x_1) .$$

Si le déplacement s'effectue avec x décroissant uniformément, on obtient : $W_{\text{op}} = \Phi(x_1 - x_2)$.

Pour un déplacement infinitésimal entre deux positions d'équilibre : $\delta W_{\text{op}} = \Phi |dx|$ (toujours positif)

D'après le premier principe appliqué au système :

$$dU = \delta W_{\text{op}} + \delta Q = \Phi |dx| + \delta Q .$$

En comparant les deux expressions de dU , on obtient :

$$T dS = \delta Q + \Phi |dx| .$$

3 • On reprend le même raisonnement, cette fois entre deux états non infiniment voisins. Il n'est pas question d'intégrer la relation précédente car les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre.

Le déplacement s'effectuant toujours dans le même sens :

$$W_{\text{op}} = \Phi \ell$$

Le bilan d'énergie donne :

$$\Delta U = (C_1 + C_2)(T_B - T_A) = Q + W_{\text{op}} = \Phi \ell$$

$$\text{d'où } T_B = T_A + \frac{\Phi \ell}{C_1 + C_2} .$$

Connaissant l'expression de l'entropie d'une phase condensée, la variation d'entropie est :

$$\Delta S = (C_1 + C_2) \ln \frac{T_B}{T_A} .$$

Comme l'entropie échangée est nulle :

$$\Delta S = S_{\text{créée}} = (C_1 + C_2) \ln \left(1 + \frac{\Phi \ell}{(C_1 + C_2)T_A} \right)$$

$S_{\text{créée}}$ est bien entendu positive pour cette transformation irréversible.

6 Compression et détente monothermes

1 • Pendant toute la transformation le système reçoit du travail des forces de pesanteur et des forces dues à la pression atmosphérique. Ces forces sont équivalentes à

une pression effective $\frac{(M+m)g}{S} + P_0$ égale à P_2 .

On en déduit : $W = P_2(V_1 - V_2)$ (W est bien positif lors de la compression).

En utilisant l'équation d'état : $P_2 V_2 = n R T_0 = P_1 V_1$,

on obtient : $W = n R T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$.

L'énergie interne d'un gaz parfait ou d'une phase condensée ne dépendant que de la température, l'énergie interne du système a une variation nulle entre l'état initial et l'état final.

$$\Delta U = W + Q = 0, \text{ soit : } Q = -n R T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

L'entropie d'une phase condensée ne dépend que de la température, donc ΔS est nulle pour le cylindre et le piston.

Il reste la variation d'entropie du gaz :

$$\Delta S = -n R \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ (voir les expressions de l'entropie$$

d'un gaz parfait).

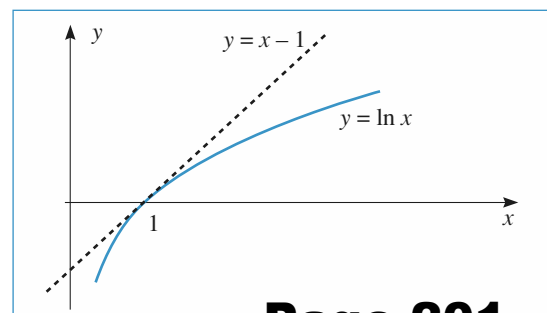
L'entropie échangée avec l'atmosphère considérée comme un thermostat de température T_0 est :

$$S_{\text{échange}} = \frac{Q}{T_0}, \text{ soit } S_{\text{échange}} = -n R \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) .$$

On en déduit, par différence :

$$S_{\text{créée}} = n R \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 - \ln \frac{P_2}{P_1} \right) .$$

Comme $\ln(x) < x - 1$ pour tout x (voir document ci-dessous), on vérifie que $S_{\text{créée}} > 0$.



2 • L'état final de la détente est identique à l'état initial de la compression : $P = P_1$ et $T = T_0$.

Le raisonnement est identique, avec cette fois

$P_{\text{effective}} = P_1$ et un travail négatif.

$$W = -n R T_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right); \quad Q = n R T_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\Delta S = n R \ln \frac{P_1}{P_2}; \quad S_{\text{échange}} = n R \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\text{et } S_{\text{créée}} = n R \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 - \ln \frac{P_1}{P_2}\right),$$

qui est encore positive.

Les transformations ne sont pas réversibles. Bien que l'état final de la détente soit l'état initial de la compression, les deux transformations ne sont pas inverses car les échanges de chaleur et de travail ne sont pas opposés.

On remarque que le travail total est positif et le transfert thermique total négatif.

7 Compression et détente adiabatiques

1 • On écrit l'équilibre mécanique du piston dans l'état initial et du système {piston + surcharge} dans l'état final.

État initial : $-P_0 S - mg + P_1 S = 0$

$$\text{d'où : } P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}; \quad P_1 = 1,001 \text{ bar .}$$

État final : $-P_0 S - (m + M)g + P_2 S = 0$

$$\text{d'où : } P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}; \quad P_2 = 1,1 \text{ bar .}$$

2 • On considère classiquement qu'une évolution est adiabatique si sa durée est suffisamment faible pour pouvoir négliger les échanges thermiques. Si le matériau constituant le cylindre est suffisamment isolant, il n'est pas déraisonnable de négliger le transfert thermique du gaz vers le cylindre pendant la transformation.

- En revanche, la laine d'acier, matériau très divisé, offre une grande surface de contact avec le gaz et, de plus, est constituée d'un matériau bon conducteur de la chaleur. On peut alors, pour simplifier, supposer que cet objet est, à la fin de la transformation, à l'équilibre thermique avec le gaz.

- On peut toutefois remarquer que la mise à l'équilibre entre le gaz qui est resté au dessus de la laine d'acier et celui du dessous risque d'être assez lente.

- Le passage du gaz à travers la laine d'acier se traduit par un amortissement important : le piston n'oscille pratiquement pas. La force de frottement cylindre/piston étant très petite devant la force exercée par l'extérieur sur le piston (de l'ordre de 10^3 N), il est tout à fait légitime de négliger son travail.

3 • On effectue un bilan d'énergie entre l'état initial et l'état final pour le système {gaz + laine d'acier + piston + surcharge}. En effet :

- Les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre, ce qui exclut un bilan infinitésimal de la forme « $dU = dQ + \delta W$ ».

- Le gaz seul subit des échanges thermiques (inconnus *a priori*) avec la laine d'acier.

La variation d'énergie interne est : $\Delta U = W + Q$ avec, pour ce système :

- $\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{laine d'acier}}$

$$= \frac{n R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) + m_0 c_0 (T_2 - T_1) .$$

(le piston ne recevant aucun échange thermique, son énergie interne est constante)

- $Q = 0$ (Par hypothèse)

- $W = W(\text{poids}) + W(\text{atmosphère}) = (M + m)g \frac{V_1 - V_2}{S} + P_0(V_1 - V_2) = P_2(V_1 - V_2)$

On peut aussi écrire que les forces extérieures se ramènent à la pression effective P_2 , d'où le résultat.

On en déduit, en remarquant que

$$n R = \frac{P_1 V_1}{T_1} = P_2 \frac{V_2}{T_2} :$$

$$\left(\frac{P_1 V_1}{(\gamma - 1) T_1} + m_0 c_0 T_1\right) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_2 V_1 - P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

soit :

$$p \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_2 - P_1 \frac{T_2}{T_1} \text{ avec } p = 8,99 \text{ bar .}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p + P_2}{p + P_1}; \quad \text{A.N. : } T_2 = 298 \text{ K .}$$

$$\text{On en déduit } V_2 = V_1 \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \frac{P_1 V_1}{P_2} \frac{p + P_2}{p + P_1};$$

A.N. : $V_2 = 9,2 \text{ L .}$

4 • a. L'évolution du système {gaz + laine d'acier} étant adiabatique et irréversible, son entropie doit augmenter.

Or, on revient à la pression initiale et, à pression constante, l'entropie est une fonction croissante de la température. On en déduit :

$$T_3 > T_1 \Rightarrow V_3 > V_1 .$$

b. Le raisonnement est identique à celui de la question 3, à ceci près que la pression effective est maintenant P_1 :

$$\Delta U = \left(\frac{n R}{\gamma - 1} + m_0 c_0\right) (T_3 - T_2) = W = P_1 (V_2 - V_3) .$$

Avec les mêmes notations et en se souvenant que

$P_1 = P_3$:

$$p \left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right) = P_1 \frac{V_2}{V_1} - P_1 \frac{T_3}{T_1} =$$

$$P_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{P_1 V_1}{(\gamma-1)} + m_0 c_0 T_1 \right) \left(\frac{T_3}{T_2} - 1 \right) =$$

$$P_1 V_2 - P_1 V_3 = P_1 V_2 - P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p + \frac{P_1^2}{P_2}}{p + P_1} = \frac{\left(p + \frac{P_1^2}{P_2} \right) (p + P_2)}{(p + P_1)^2} .$$

A.N.: $T_3 = 295,2 \text{ K}$.

Étudions les variations de la fonction:

$$f(P_2) = \left(p + \frac{P_1^2}{P_2} \right) (p + P_2) .$$

f est extrémale lorsque s'annule sa dérivée, soit pour

$$P_2 = P_1 .$$

Comme $f \rightarrow \infty$ pour $P_1 \rightarrow \infty$ et pour $P_2 \rightarrow \infty$, cet extremum est un minimum.

On en déduit que T_3 est minimale et égale à T_1 si $P_2 = P_1$ (c'est-à-dire si rien ne se passe!)

Dans tous les autres cas, $T_3 > T_1$, ce qui est conforme au résultat de la question 4 a.

On remarque que, avec les valeurs proposées, l'écart de température est faible. La variation relative de pression est, ici, suffisamment faible pour que l'évolution soit proche de la réversibilité. Pour $P_2 = 2 \text{ bars}$, on aurait trouvé $T_3 = 308 \text{ K}$.

c. Considérons le système {gaz + laine d'acier}. Ce système n'ayant reçu aucun transfert thermique de l'extérieur (bien entendu, les transferts internes ne sont pas pris en compte!), on peut écrire:

$$\Delta S = S_{\text{créée}} .$$

Comme l'entropie est une fonction extensive:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{laine d'acier}} .$$

La pression initiale et la pression finale étant égales, et en utilisant les expressions de l'entropie pour un gaz parfait et pour une phase condensée (voir les rappels en début de chapitre):

$$S_{\text{créée}} = \frac{n R \gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_3}{T_1} + m_0 c_0 \ln \frac{T_3}{T_1}$$

$$= \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} + m_0 c_0 \right) \ln \frac{T_3}{T_1} .$$

A.N.: $S_{\text{créée}} = 0,028 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Remarquons que si $P_2 = 2 \text{ bar}$, on obtient $S_{\text{créée}} = 1,49 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: L'entropie créée est bien plus importante, car la transformation est plus éloignée du cas limite de la réversibilité.

8 $S(U, V)$, fonction caractéristique

1 • En différenciant $S(U, V)$:

$$dS = C_{V,m} \frac{d(U + \frac{a}{V})}{U + \frac{a}{V}} + R \frac{dV}{V-b}$$

$$= C_{V,m} \frac{dU}{U + \frac{a}{V}} + dV \left(\frac{R}{V-b} - \frac{a C_{V,m}}{UV^2 + aV} \right) .$$

$$\text{D'autre part, } dS = \frac{dU}{T} + P \frac{dV}{T} .$$

En identifiant ces deux expressions, on obtient:

$$\frac{1}{T} = C_{V,m} \frac{1}{U + \frac{a}{V}} \quad \text{et} \quad \frac{P}{T} = \frac{R}{V-b} - \frac{a C_{V,m}}{UV^2 + aV} .$$

La première expression donne:

$$U(T, V) = C_{V,m} T - \frac{a}{V} \quad (1)$$

(à une constante près).

L'élimination de U et $C_{V,m}$ des deux équations permet d'obtenir l'équation d'état du gaz: $\frac{P}{T} = \frac{R}{V-b} - \frac{a}{TV^2}$,

donc l'équation de Van der Waals pour une mole de gaz:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V-b) = RT . \quad (2)$$

2 • a. La détente de Joule – Gay-Lussac se fait à énergie interne constante ce qui permet de calculer la variation de température du gaz.

En utilisant l'extensivité de U et V :

$$\frac{U(V, T)}{n} = C_{V,m} T - \frac{an}{V} \quad (3)$$

soit: avec $\Delta U = 0$,

$$nC_{V,m} \Delta T = n^2 a \left(\frac{1}{2V} - \frac{1}{V} \right), \text{ d'où } \Delta T = - \frac{na}{2VC_{V,m}} .$$

A.N.: $\Delta T = -2,6 \text{ K}$.

On peut, de la même manière, écrire l'entropie:

$$\frac{S(U, V)}{n} = \frac{S_0}{n} + C_{V,m} \ln \left(\frac{U + \frac{an}{V}}{\frac{U_0}{n} + \frac{an}{V_0}} \right) + R \ln \left(\frac{\frac{V}{n} - b}{\frac{V_0}{n} - b} \right) .$$

En utilisant (3):

$$\Delta S = 2 C_{V,m} \ln \left(\frac{T + \Delta T}{T} \right) + 2 R \ln \left(\frac{\frac{V-b}{2}}{\frac{V-b}{2}} \right) .$$

A.N.: $\Delta S = 11,16 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

b. Pour le gaz parfait:

$$\Delta T_{G,P} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{G,P} = 2 R \ln 2 = 11,53 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > \Delta S .$$

Les deux variations d'entropie sont positives conformément au deuxième principe, les systèmes étant thermiquement isolés durant leurs évolutions respectives.

Remarques: La fonction $S(U, V)$ introduite ici est caractéristique du fluide étudié; elle contient en effet toute l'information disponible sur le système puisqu'elle permet de trouver

l'expression de l'énergie interne et l'équation d'état du gaz étudié. Ce résultat est généralisable à un fluide quelconque pour lequel $S(U, V)$ est une fonction caractéristique. Le lecteur vérifiera, par exemple, en utilisant la même méthode que :

$$S(U, V) = S_0 + C_{V,m} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + R \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

est une fonction caractéristique du gaz parfait (pour une mole).

9 Le gaz de photons

1 • L'identité thermodynamique peut se mettre sous la forme :

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left(\frac{\delta S}{\delta U} \right)_V = \frac{1}{T} \text{ et } \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_U = \frac{P}{T}.$$

On en déduit : $\frac{1}{T} = \frac{4}{3} (\sigma_0 V)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} U^{-\frac{1}{4}}$

d'où : $U = \sigma_0 V T^4$

$$\frac{P}{T} = \frac{4}{3} (\sigma_0 U^3)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} V^{-\frac{3}{4}}$$

d'où : $P = \frac{1}{3} T \left(\frac{\sigma_0 U^3}{V^3} \right)^{\frac{1}{4}}$

ou encore $P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{\sigma_0 T^4}{3}$

2 • À la température de 300 K : $P = 2,0 \cdot 10^{-6}$ Pa . La pression due au rayonnement est alors en général négligeable. Elle va devenir non négligeable à des températures telles que les molécules sont totalement dissociées ; 1 mole de H₂ donne 2 moles de protons et 2 moles d'électrons, soit 4 moles de gaz monoatomiques, supposé parfaits.

$$P_{\text{particules}} = \frac{4 n R T}{V} = P_{\text{rad}} = \frac{\sigma_0 T^4}{3}, \text{ ce qui est atteint}$$

pour $T = \left(\frac{12 n R}{\sigma_0 V} \right)^{\frac{1}{3}}$.

A.N. : $T = 5,1 \cdot 10^6$ K . Pour comparer, la température au centre du soleil est de l'ordre de 10^7 K .

3 • Par définition : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_V$ avec ici $U = \sigma_0 V T^4$.

On en déduit : $C_V = 4 \sigma_0 V T^3$.

10 Transfert de matière, irréversibilité

1 • Les parois du récipient étant athermanes (pas de transfert thermique, donc $Q = 0$) et indéformables (pas de transfert mécanique, donc $W = 0$), le mélange se fait de manière isoénergétique, soit :

$$\Delta U = 0.$$

Or, $U = U_{\text{gaz 1}} + U_{\text{gaz 2}}$ et :

$$0 = n_1 R \frac{1}{\gamma_1 - 1} (T_{\text{final}} - T) + n_2 R \frac{1}{\gamma_2 - 1} (T_{\text{final}} - T),$$

la température finale est égale à la température initiale. Le volume final est $V_1 + V_2$ pour chaque gaz ; dans l'état final, les pressions partielles sont données par l'équation d'état :

$$P_1 = n_1 R T \frac{1}{V_1 + V_2} \text{ et } P_2 = n_2 R T \frac{1}{V_1 + V_2}.$$

La pression finale est :

$$P_f = P_1 + P_2 = \frac{1}{V_1 + V_2} (n_1 R T + n_2 R T).$$

Or, $n_1 R T = P V_1$ et $n_2 R T = P V_2$.

D'où : $P_f = P$.

2 • L'entropie d'échange du système constitué des deux gaz est nulle puisque l'ensemble est thermiquement isolé ; ainsi :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S = \Delta S_{\text{gaz 1}} + \Delta S_{\text{gaz 2}}.$$

On calcule, par exemple, $\Delta S_{\text{gaz 1}}$:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gaz 1}} &= n_1 R \left[\frac{1}{\gamma_1 - 1} \ln \left(\frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} \right) + \ln \left(\frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} \right) \right], \\ &= n_1 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right), \end{aligned}$$

soit en utilisant les équations d'état :

$$\frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{n_1 + n_2}{n_1},$$

cela donne :

$$\Delta S_{\text{gaz 1}} = n_1 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_1}.$$

En procédant de même pour $\Delta S_{\text{gaz 2}}$, on obtient finalement :

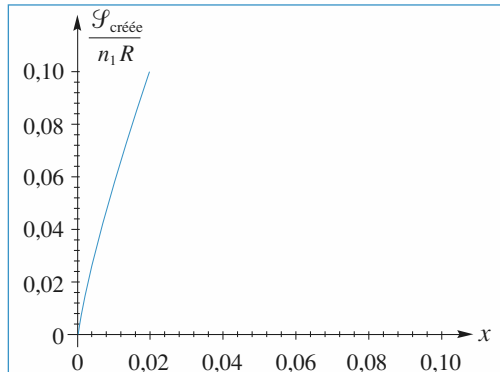
$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = n_1 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_1} + n_2 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_2}.$$

On remarque que cette quantité est positive conformément au deuxième principe.

3 • Avec la variable x , l'expression précédente devient :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = n_1 R \left[\ln(1+x) + x \ln \left(\frac{1+x}{x} \right) \right].$$

On trace la fonction $\frac{\mathcal{S}_{\text{créée}}}{n_1 R}$ pour des valeurs de x proches de zéro :



La tangente à l'origine de la courbe est verticale ce qui signifie que $\mathcal{S}_{\text{créée}}$ est, en zéro, un infiniment petit d'ordre inférieur à 1 : le mélange de deux gaz de natures différentes est donc foncièrement irréversible, même si l'un des deux est en très petite quantité par rapport à l'autre.

Il est donc impossible de modéliser cette transformation par une évolution réversible.

Pour bien réaliser la signification physique de ce résultat, on peut imaginer le mélange de deux gaz dont l'un est coloré (méthane et chlore par exemple).

Remarques : Lorsque x tend vers zéro, un équivalent de l'expression donnant $\mathcal{S}_{\text{créée}}$ est :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = -n_1 R x \ln(x);$$

cette quantité tend vers zéro par valeurs positives, mais moins vite que x puisque $-\ln(x)$ tend vers l'infini.

11 Système à deux niveaux

1 • L'énergie interne est une grandeur extensive et l'ensemble des particules d'énergie E_i a une énergie totale $n_i E_i$, donc :

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 .$$

Soit $dU = E_1 dn_1 + E_2 dn_2$ où dU représente la variation d'énergie interne qu'accompagne la transition de dn_1 particules du niveau E_1 au niveau E_2 .

Bien sûr, puisque N est constant :

$$dn_1 = -dn_2 \text{ et } dU = -(E_2 - E_1)dn_1 = -\Delta E dn_1 .$$

2 • L'entropie statistique est donnée par :

$$S = k_B \ln \Omega ,$$

où Ω est le nombre de complexions du système. Or, pour réaliser le macroétat :

$$\{(n_1, E_1); (N - n_1, E_2)\},$$

il y a $\binom{N}{n_1}$ possibilités, soit $\Omega = \binom{N}{n_1}$.

Remarque : Ceci suppose que les particules étudiées soient discernables.

$$\text{Soit : } S = k_B \ln \binom{N}{n_1} = k_B \ln \frac{N!}{(N - n_1)! n_1!} ,$$

d'où en utilisant la relation de Stirling :

$$S = k_B [N \ln N - n_1 \ln n_1 - (N - n_1) \ln (N - n_1)] ,$$

et en différentiant :

$$dS = k_B [-dn_1 - dn_1 (\ln n_1) + dn_1 \ln (N - n_1) + dn_1]$$

$$dS = k_B dn_1 \ln \frac{N - n_1}{n_1} .$$

$$\text{Or, } \frac{N - n_1}{n_1} = \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right] \text{ et } dS = -\frac{\Delta E}{T} dn_1 .$$

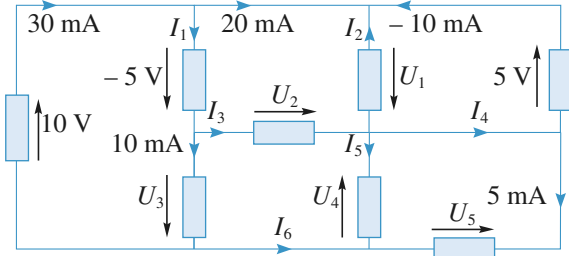
3 • L'identification des deux relations conduit bien à $dU = TdS$ (le volume du système étant constant).

Exercices ELECTRICITÉ

1 Application des lois de Kirchhoff

Déterminer les courants et les tensions inconnus dans le réseau représenté sur la figure.

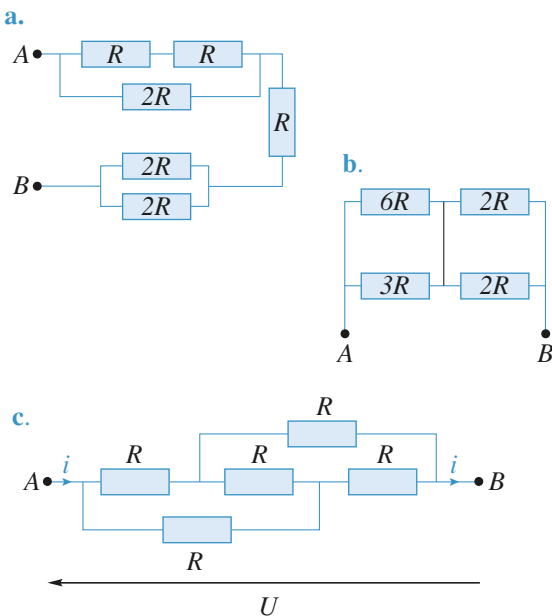
Les rectangles figurent des dipôles quelconques (avec ou sans source) dont il n'est pas nécessaire de connaître la nature.



Revoir la loi des mailles (ou loi d'additivité des tensions) et la loi des nœuds. Faire attention aux orientations et aux signes des courants et tensions.

2 Calcul de résistance équivalente

Déterminer la résistance équivalente entre A et B.



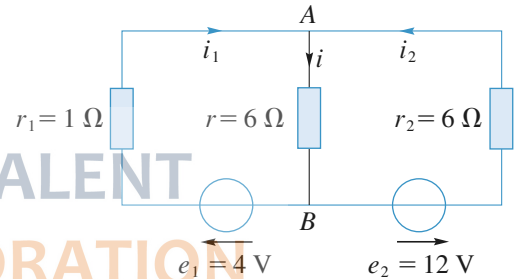
Conseils

a) et b) Bien repérer les associations série et parallèle. On pourra se souvenir que la résistance équivalente à deux résistances R en parallèle est égale à $\frac{R}{2}$.
Pour c) l'utilisation des symétries permet de déterminer $R_{AB\text{éq}}$ sans calcul.

3 Trois méthodes d'étude d'un réseau linéaire

Déterminer le courant i en utilisant :

- la loi des nœuds (en termes de potentiels) ;
- le théorème de superposition ;
- en remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.

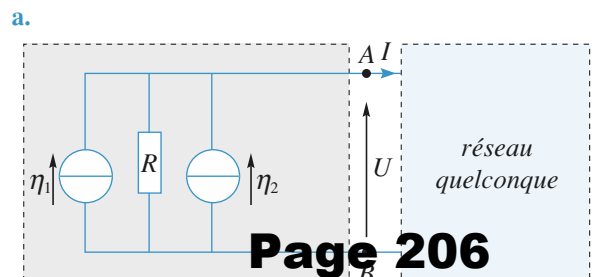


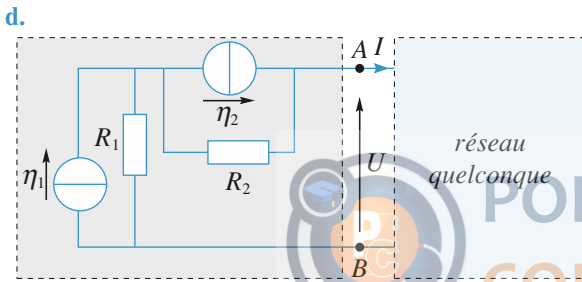
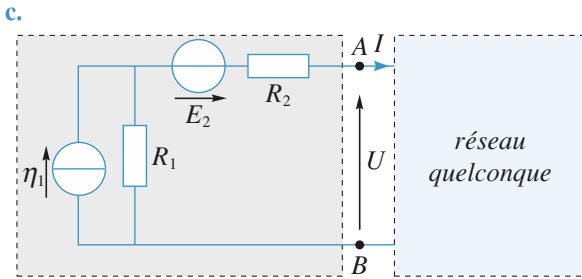
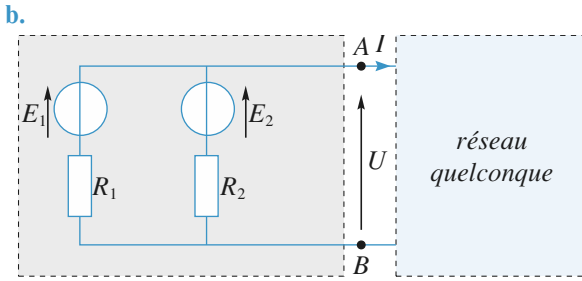
Conseils

Pour appliquer la loi des nœuds, il faut affecter le potentiel nul à l'un d'entre eux puis écrire des équations qui ont pour inconnues les potentiels des autres nœuds. Ne pas hésiter à utiliser des schémas équivalents intermédiaires.
La représentation des générateurs par leur modèle de Norton permet de déterminer i par une division de courant.

4 Recherche de la représentation de Thévenin et de Norton pour un dipôle

Déterminer la représentation de Norton et la représentation de Thévenin pour les dipôles linéaires situés à gauche des bornes A et B.





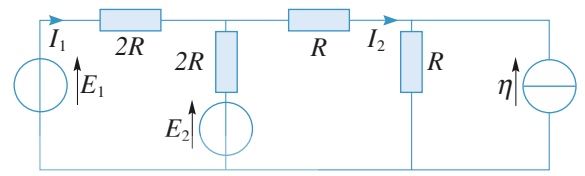
2 • Écrire les équations de nœuds (ou relations de Millman) pour les nœuds C et D en posant $V_A = 0$ et $V_B = U$. En déduire la résistance équivalente entre A et B .

Conseils

On rappelle que deux dipôles sont en parallèle si leurs deux bornes sont communes. Pour un dipôle qui ne contient pas de source indépendante la résistance peut se définir par $R = \frac{U}{I}$ en convention récepteur. On peut donc tenter de calculer I en supposant U connue (ou l'inverse).

6 Étude d'un réseau par plusieurs méthodes

Déterminer les courants I_1 et I_2 pour le réseau représenté sur le document. On utilisera trois méthodes différentes.



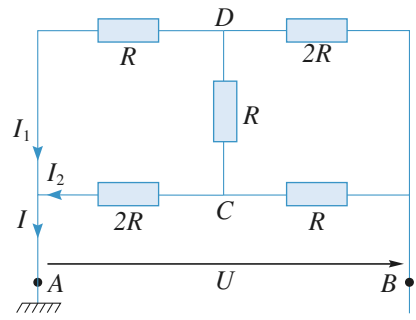
Conseils

En plus de la méthode systématique qui consiste à écrire $N-1$ équations de nœuds pour un réseau de N nœuds, quelles sont les méthodes à notre disposition ? On remarquera que le réseau contient plusieurs sources. Pour ne pas avoir à résoudre de système d'équations, on tente de se ramener à une maille unique par une succession d'équivalences. Penser à utiliser les diviseurs (de courant et de tension).

Conseils

Revoir l'équivalence entre les représentations de Thévenin et de Norton. On préférera la représentation de Thévenin pour deux dipôles en série et la représentation de Norton pour deux dipôles en parallèle. Il faudra parfois effectuer plusieurs équivalences successives.

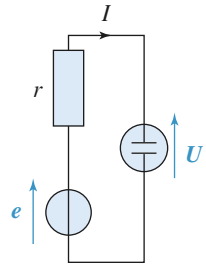
5 Calcul de résistance équivalente



1 • Peut-on calculer la résistance équivalente entre A et B au moyen d'associations série et parallèle ?

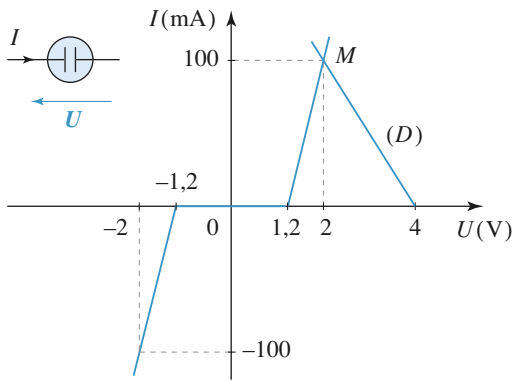
7 Étude d'un électrolyseur

Un circuit (doc. 1) est réalisé par l'association en série d'un électrolyseur dont la caractéristique statique est donnée document 2 et d'un générateur : ($e = 4 \text{ V}$, $r = 20 \Omega$).



Doc. 1. électrolyseur alimenté par un générateur.

Déterminer le point de fonctionnement de l'électrolyseur.



Doc. 2. Caractéristique statique de l'électrolyseur.

la résistance $R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_p + I_0}$. Donner dans chaque cas la relation tension courant au point de fonctionnement.

5• Déterminer la puissance P fournie par la diode en fonction de R_C , U_{C_0} et R_0 . Représenter $|P|$ en fonction de R et déterminer la valeur absolue de la puissance maximale fournie, P_{\max} , en fonction de U_{C_0} et R_0 . Pour quelle valeur de R_C obtient-on cette puissance maximale ?

6• On définit le rendement de conversion par $\eta = \frac{P_{\max}}{P_L}$; justifier cette définition; calculer numériquement P_{\max} ainsi que ce rendement; commenter les valeurs obtenues.

Conseils

- 1) Comment est l'intensité lorsque la diode fonctionne en circuit ouvert ?
- 2) Dans quelles parties du plan la puissance reçue par la diode est-elle positive ? négative ? Conclure.
- 3) Il faut considérer les parties quasi-linéaires de la caractéristique réelle et faire les approximations les plus simples.
- 4) Attention aux conventions à adopter pour la diode et la résistance.
- 5) Distinguer ici aussi les deux cas précédents.

8 *Résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle actif

Une photodiode est un composant opto-électronique dont la caractéristique est fonction de la puissance lumineuse, P_L , qu'elle reçoit :

$$i(u) = I_0(e^{u/V_0} - 1) - I_p, \text{ où } I_0 = 10 \mu\text{A}, V_0 = 26 \text{ mV et } I_p = kP_L, k = 0,5 \text{ A} \cdot \text{W}^{-1}.$$

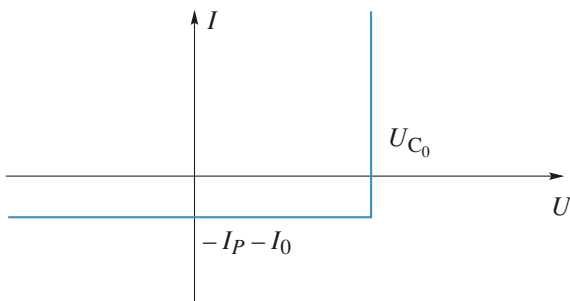


Doc. 1. Représentation de la diode en convention récepteur.

1• La photodiode reçoit une puissance lumineuse de 1 mW, tracer la caractéristique $I(U)$ de cette diode et déterminer sa tension en circuit ouvert, U_{C_0} .

2• Analyser cette caractéristique du point de vue énergétique : quelle partie du plan $I(U)$ correspond à un comportement générateur et quelle partie à un comportement récepteur.

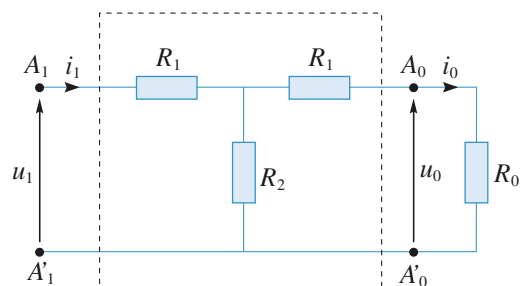
3• Justifier que l'on puisse adopter pour la diode le modèle linéaire par morceaux ci-dessous :



4• Cette photodiode est connectée en série avec une résistance R_C . Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit. On distinguera deux cas en introduisant

9 *Résistances et conductances itératives

A. On considère le quadripôle résistif en T ci-dessous (doc. 1) dont la charge est constituée par la résistance R_0 .

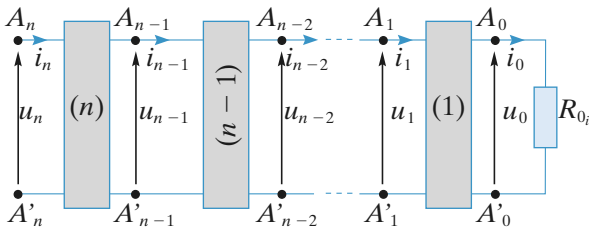


Doc. 1

1• Déterminer sa résistance d'entrée $R_{e1} = \frac{u_1}{i_1}$.

Comment doit-on choisir la résistance R_0 pour que $R_{e1} = R_0$? Cette résistance particulière, notée R_{0_i} , est appelée résistance itérative du quadripôle.

2• On place en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble étant chargé par la résistance itérative R_{0_i} . Quelle est la résistance d'entrée $R_{e_n} = \frac{u_n}{i_n}$ de l'association ?



Doc. 2

3 • On considère à nouveau le quadripôle représenté à la question 1), la charge étant constituée par la résistance itérative R_{0i} . Calculer son amplification en tension :

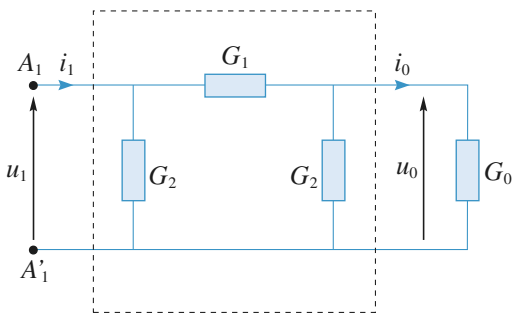
$A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1}$ et son amplification en courant $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1}$, et les exprimer en fonction de $k = \frac{R_1}{R_2}$.

4 • On associe en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble ayant encore pour charge la résistance itérative R_{0i} .

Calculer, en fonction de k , l'amplification en tension $A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n}$ et l'amplification en courant $A_{i_n} = \frac{i_0}{i_n}$ de l'ensemble.

5 • Sachant que $n = 10$ et $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, déterminer R_1 pour que $A_{u_n} = 0,10$ quand la charge est la résistance itérative R_{0i} que l'on calculera.

B. On considère maintenant le quadripôle résistif en Π , dual de celui en T considéré à la question A. 1). Sa charge est constituée par la conductance G_0 .



Doc. 3

1 • Déterminer sa conductance d'entrée :

$$G_{e1} = \frac{i_1}{u_1}.$$

Comment doit-on choisir la conductance G_0 pour que $G_{e1} = G_0$? Cette conductance particulière, notée G_{0i} , est appelée conductance itérative du quadripôle.

2 • On place en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble étant chargé par la conductance itérative G_{0i} .

Quelle est la conductance d'entrée $G_{e_u} = \frac{i_n}{u_n}$ de l'association ?

3 • On considère à nouveau le quadripôle de la partie B., la charge étant constituée par la conductance itérative G_{0i} .

Calculer son amplification en tension $A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1}$ et son

amplification en courant $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1}$, puis les exprimer en

fonction de $k = \frac{G_2}{G_1}$.

4 • On associe en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble ayant encore pour charge la conductance itérative G_{0i} . Calculer en fonction de k , l'ampli-

fication en tension $A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n}$ et l'amplification en courant

$A_{i_n} = \frac{i_0}{i_n}$ de l'ensemble.

5 • Sachant que $n = 10$ et $G_1 = 1 \text{ mS}$, déterminer G_2 pour que $A_{u_n} = 0,10$ quand la charge est la conductance itérative G_{0i} que l'on calculera.

Conseils

Le réseau étant passif, la résistance (ou la conductance) itérative se calculera par les lois d'association de résistances (ou de conductances).

Il convient ensuite d'exploiter systématiquement les propriétés d'un quadripôle chargé par sa résistance (ou sa conductance) itérative.

10 * Convertisseur analogique numérique

Le réseau de résistances étudié est constitué de $(n + 1)$ résistances r_k et possède $(n + 1)$ sorties S_k ($k = 0, \dots, n$). On note par R_k la résistance entre la sortie S_k et la masse, par R la résistance totale du réseau et par r la plus faible des résistances du réseau.

Les tensions de sortie U_k , référencées à la masse, sont prélevées sans débit de courant et le pas p ($p > 1$) du réseau est défini par la relation :

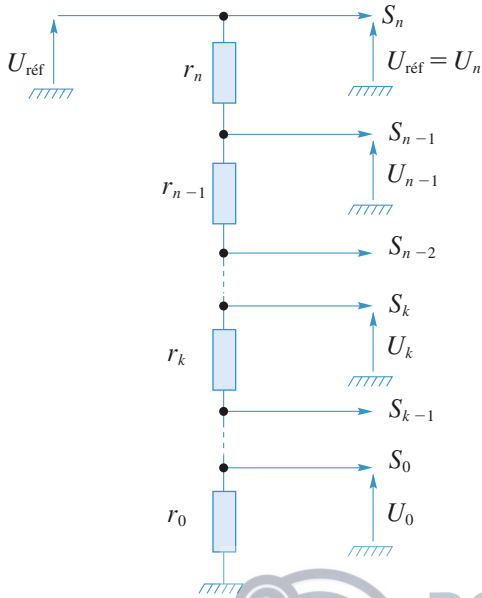
$$p = \frac{U_{k+1}}{U_k} \quad (k = 0, \dots, n).$$

La plus faible des tensions U_k est appelée quantum.

1 • a. Identifier le quantum. Exprimer U_k en fonction du quantum, puis l'exprimer en fonction de la tension de référence $U_{\text{réf}}$.

Identifier r . Déterminer, en fonction de r , les valeurs r_k des $(n + 1)$ résistances du réseau pour un pas p donné. Quelle relation lie r à R et quelle relation lie r_k à R ? A.N. : Sachant que $p = 10$, $n = 5$ et $r = 100 \Omega$, calculer numériquement les $(n + 1)$ résistances du réseau.

b. En déduire les tensions U_k délivrées par les sorties S_k lorsqu'à l'entrée du diviseur de tension est appliquée une tension $U_{\text{réf}} = 100 \text{ V}$. Commenter le résultat obtenu. Quelle pourrait être l'utilisation d'un tel réseau de résistances ?



Doc. 1

2 • Quelles sont, en fonction de r , les valeurs des résistances r_k constitutives d'un diviseur de tension dont le pas est $p = 2$?

Déterminer, en fonction de la tension appliquée $U_{\text{réf}}$, les tensions U_k délivrées par un tel diviseur de tension.

A.N. : Sachant que $U_{\text{réf}} = 1024 \text{ mV}$, combien faudrait-il de résistances pour réaliser un réseau atténuateur délivrant les tensions U_k multiples de 2 du quantum $U_0 = 1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 1 \text{ mV}$ et $U_{n+1} = 1024 \text{ mV}$? À quoi pourrait servir un tel réseau de résistances ?

3 • Le réseau de résistances considéré est celui de la question précédente avec une tension de référence $U_{\text{réf}} = 1024 \text{ mV}$. On dispose, en outre, de circuits logiques (C.L.) à deux entrées U_e et U'_e et deux sorties U_s et U'_s dont les tensions de sortie sont définies par :

$$U_e \geq U'_e \Rightarrow U_s = 1 \text{ V et } U'_s = (U_e - U'_e)$$

$$U_e < U'_e \Rightarrow U_s = 0 \text{ et } U'_s = U_e.$$

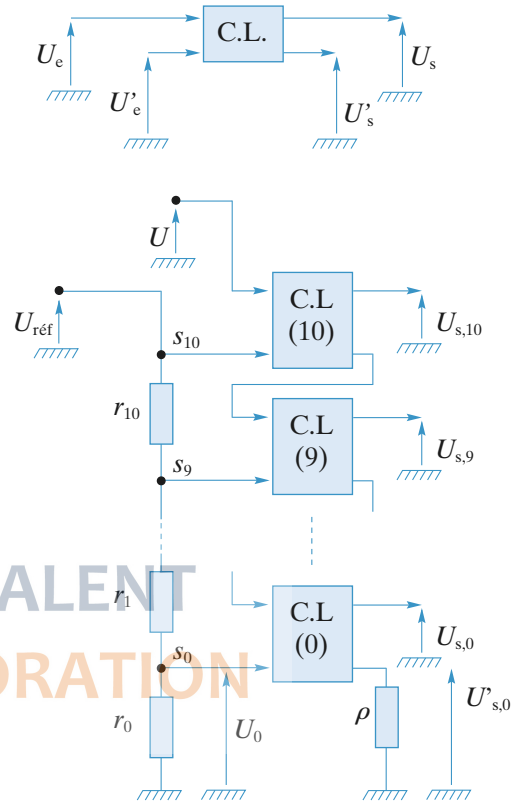
Avec des circuits logiques, on réalise un convertisseur analogique-numérique (C.A.N.) comme indiqué (doc. 2). Expliquer le fonctionnement de ce C.A.N. et l'illustrer pour une tension analogique $U = 800 \text{ mV}$ appliquée à son entrée.

Quelle est la tension maximale admissible U_{max} , c'est-à-dire quelle est la tension maximale analogique qu'il est possible de convertir ?

Conseils

La structure du réseau est celle d'un diviseur de tension. Remarquer que les tensions des C.L. sont liées par la relation :

$$U_{ek} = U_{sk} U'_{ek} + U'_{sk}$$

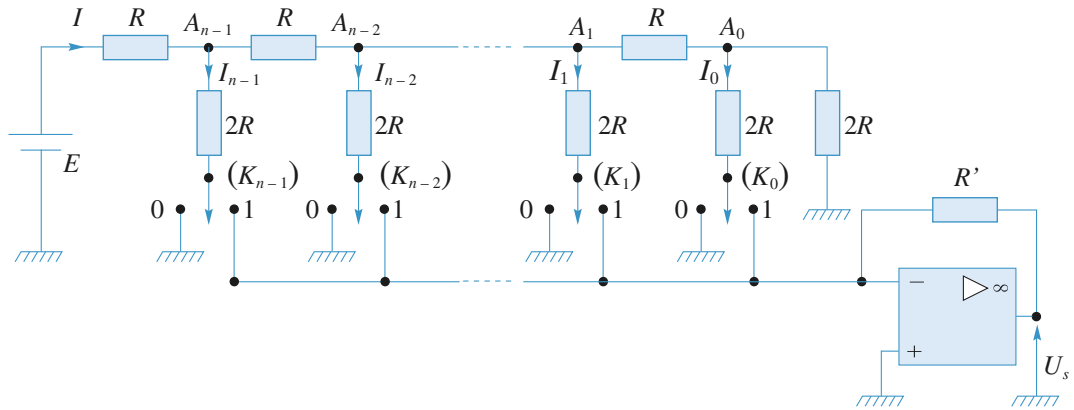


Doc. 2

11 *Convertisseur numérique-analogique

Un convertisseur numérique-analogique (C.N.A.) est un circuit qui transforme une information numérique en un signal analogique image de cette information. Le C.N.A. étudié est réalisé avec un amplificateur opérationnel parfait, une source de tension continue E , un réseau de résistances ($R, 2R$) et un ensemble de n commutateurs (K_j) à deux états (0) et (1) (cf. le schéma page suivante).

L'information numérique est codée sous la forme d'un nombre binaire $N_{(2)} = (b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0)$ où les chiffres (bits) ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La valeur de chaque bit b_j est représentée par l'état du commutateur (K_j) associé : $b_j = 0$ le commutateur (K_j) est dans l'état (0), $b_j = 1$ si le commutateur (K_j) est dans l'état (1). Ainsi, chaque information numérique $N_{(2)}$ détermine l'état des n commutateurs et, par voie de consé-



quence, la valeur de la tension analogique U_s délivrée par le C.N.A.

- 1 • Calculer l'intensité I_j du courant qui traverse la résistance $2R$ dont l'une des bornes est reliée au nœud A_j .
- 2 • Déterminer, en fonction de E, R, R' et des b_j , la tension U_s délivrée par le C.N.A. lorsque l'état de l'ensemble de ses commutateurs (K_j) traduit l'information codée numériquement par le nombre binaire :

$$N_{(2)} = (b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1b_0).$$

- 3 • On appelle quantum δU_s la plus petite variation en valeur absolue de la tension U_s lorsqu'on passe d'une information traduite par $N_{(2)}$ à une autre traduite par $N'_{(2)}$. Établir l'expression du quantum de ce C.N.A.

Sachant que $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 2 \text{ k}\Omega$ et que $n = 7$ (information codée sur un octet), calculer E pour que $\delta U_s = 10 \text{ mV}$.

- 4 • La source de tension E ayant la valeur calculée dans la question précédente, déterminer la valeur de U_s lorsque $N_{(2)} = (10 \ 010 \ 010)$.

Réciproquement, connaissant la valeur numérique de U_s , établir un algorithme permettant de connaître l'état de tous les commutateurs du C.N.A. ou, ce qui revient au même, l'expression de $N_{(2)}$.

Conseils Utiliser le fait que l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire : $v_+ = v_- = 0$, $i_+ = i_- = 0$.

Corrigés TD ELECTRICITÉ

1 Application des lois de Kirchhoff

On obtient les courants inconnus en appliquant la loi des nœuds et on trouve les tensions avec la loi des mailles :

$$U_1 = -5 \text{ V}; U_2 = 0; U_3 = -5 \text{ V}; U_4 = 5 \text{ V}; U_5 = 5 \text{ V};$$

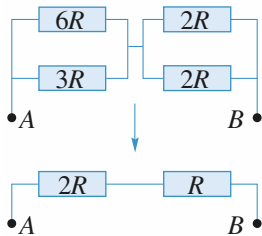
$$I_1 = 10 \text{ mA}; I_2 = -10 \text{ mA}; I_3 = 0; I_4 = -5 \text{ mA};$$

$$I_5 = 15 \text{ mA}; I_6 = -20 \text{ mA}$$

2 Calcul de résistance équivalente

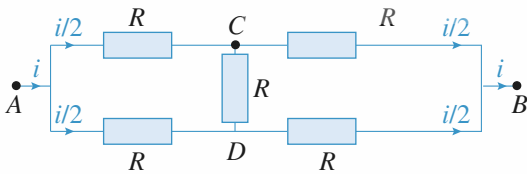
a. Le réseau se ramène à trois résistances de valeur R en série : $R_{AB} = 3R$.

b. Pour mettre en évidence les associations, on change la forme du nœud central ; cette opération purement graphique ne modifie en rien les connexions électriques. On obtient ainsi un système équivalent formé de deux résistances de valeurs $2R$ et R en série, soit : $R_{AB} = 3R$.



c. Le courant entrant en A se partage en deux courants égaux, puisque les deux résistances qu'ils parcourent sont égales.

Pour la même raison les courants qui se somment en B sont égaux.



Ainsi $i_{CD} = 0$, et on peut virtuellement « enlever » la branche CD. Il reste $2R$ en parallèle avec $2R$, soit $R_{AB_{\text{equ}}} = R$.

3 Trois méthodes d'étude d'un réseau linéaire

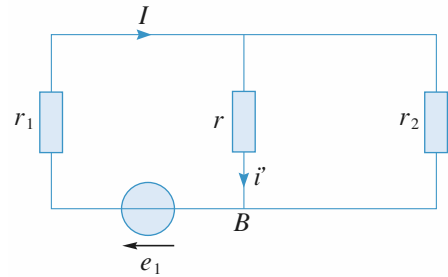
a. Le réseau comporte deux nœuds. Si on pose $V_B = 0$ (choix arbitraire d'origine des potentiels), il reste un seul potentiel inconnu : V_A .

La loi des nœuds en A ($i_1 + i_2 = i$) s'écrit en termes de potentiels :

$$\frac{e_1 - V_A}{r_1} + \frac{e_2 - V_A}{r_2} = \frac{V_A}{r}$$

d'où : $V_A = 4,5 \text{ V}$ et donc $i = 0,75 \text{ A}$.

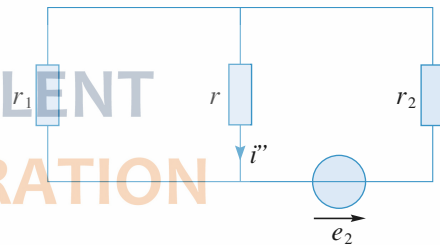
b. • Si on annule e_2 , il reste :



D'où $I = \frac{e_1}{r_1 + \frac{rr_2}{r+r_2}}$ et, à travers r :

$$i' = \frac{r_2}{r+r_2} I = \frac{r_2 e_1}{rr_2 + r_1(r+r_2)} = \frac{\frac{e_1}{r_1}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

• Si on annule e_1 , il reste :



En échangeant les indices 1 et 2, on se retrouve dans le cas précédent, donc :

$$i'' = \frac{\frac{e_2}{r_2}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

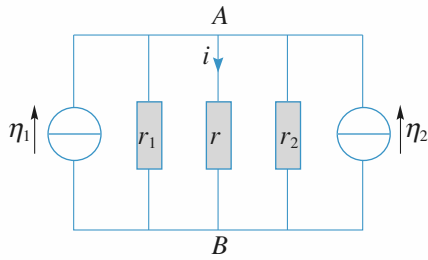
• En appliquant le théorème de superposition pour ce réseau linéaire, on obtient :

$$i = i' + i'' = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

A.N. : $i = 0,75 \text{ A}$.

c. On refait le schéma en remplaçant les deux générateurs de Thévenin (e_1, r_1) et (e_2, r_2) par leurs représentations de Norton avec :

$$\eta_1 = \frac{e_1}{r_1} = 4 \text{ A} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{e_2}{r_2} = 2 \text{ A}$$



Dans ce schéma, le nœud A est constitué par tout le fil horizontal supérieur.

Un courant total d'intensité $i_0 = \eta_1 + \eta_2 = 6 \text{ A}$ se répartit donc entre les trois résistances.

On obtient donc :

$$i = i_0 \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}}, \text{ soit } i_0 = 0,75 \text{ A.}$$

4 Recherche de la représentation de Thévenin et de Norton pour un dipôle

a. Les deux sources de courant en parallèle sont équivalentes à une source unique de courant de c.e.m. $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

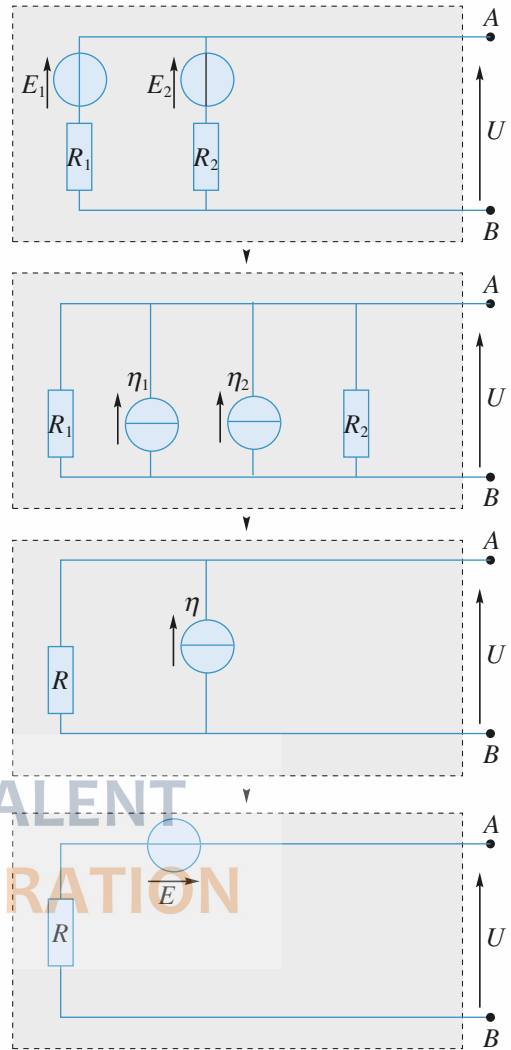
La représentation de Norton est donc :

c.e.m. $\eta = \eta_1 + \eta_2$ en parallèle avec R .

On en déduit la représentation de Thévenin :

f.e.m. $E = R(\eta_1 + \eta_2)$ en série avec R .

b. Les deux dipôles de Thévenin étant en parallèle, on commence par dessiner leur représentation de Norton (voir la figure ci-après).



Équivalences successives

Les deux sources de courant en parallèle sont équivalentes à une source unique de courant de c.e.m. $\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$ et les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance de valeur $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

La représentation de Norton est donc :

$$\text{c.e.m. } \eta = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \text{ en parallèle avec } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

On en déduit la représentation de Thévenin :

$$\text{f.e.m. } \eta = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2} \text{ en série avec}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

c. On transforme le générateur de Norton (η_1, R_1) en générateur de Thévenin équivalent de façon à obtenir deux générateurs en série. La représentation de Thévenin est donc :

f.e.m. $E = E_2 + R_1\eta_1$ en série avec $R = R_1 + R_2$.

On en déduit la représentation de Norton :

c.e.m. $\eta = \frac{E_2 + R_1\eta_1}{R_1 + R_2}$ en parallèle avec $R = R_1 + R_2$.

d. Les deux générateurs de Norton sont en série. On les transforme donc en utilisant leur représentation de Thévenin.

On obtient donc en série : une f.e.m. $E_1 = R_1\eta_1$, puis une résistance R_1 , puis une f.e.m. $E_2 = R_2\eta_2$ et une résistance R_2 .

La représentation de Thévenin est donc :

f.e.m. $E = R_1\eta_1 + R_2\eta_2$ en série avec $R = R_1 + R_2$.

On en déduit la représentation de Norton :

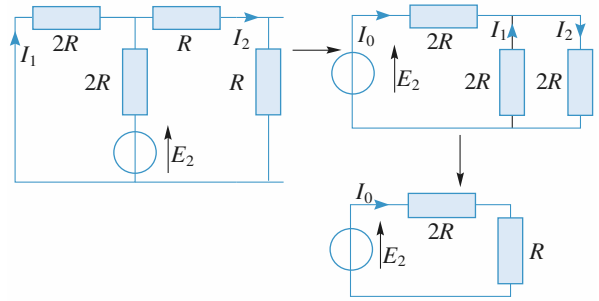
c.e.m. $\eta = \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2}$ en parallèle avec $R = R_1 + R_2$.

$$I_1 = \frac{E_1}{3R}.$$

I_2 se déduit de I_1 par application de la relation du diviseur de courant :

$$I_2 = I_1 \frac{\frac{1}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{E_1}{6R}.$$

• On éteint E_1 et η

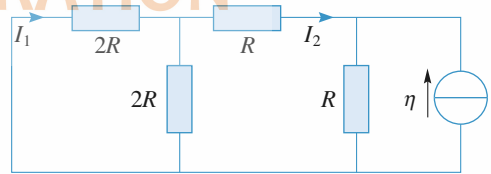


On redessine le circuit pour se ramener à une maille unique :

$I_0 = \frac{E_2}{3R}$ puis par division :

$$I_1 \equiv -\frac{1}{2}I_0 = -\frac{E_2}{6R} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{E_2}{6R}.$$

• On éteint E_1 et E_2



Par deux divisions de courant successives, on obtient :

$$I_2 = -\frac{1}{3}\eta \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{1}{2}I_2 = -\frac{1}{6}\eta.$$

• Superposition des trois cas

On obtient finalement :

$$I_1 = \frac{E_1}{3R} - \frac{E_2}{6R} - \frac{1}{6}\eta \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{E_1}{6R} + \frac{E_2}{6R} - \frac{1}{3}\eta.$$

Méthode 2

On se ramène à une maille unique par des équivalences.

5 Calcul de résistance équivalente

1 • Non car la résistance de la branche CD n'est en parallèle avec aucune autre résistance ou association de résistances.

2 • Écrivons la loi des nœuds en C et D :

$$V_D = \frac{U + 2V_C}{5}; \quad V_C = \frac{2U + 2V_D}{5}$$

d'où : $V_D = \frac{3}{7}U$ et $V_C = \frac{4}{7}U$.

En appliquant la loi d'Ohm, on en déduit les courants I_1 et I_2 puis le courant I :

$$I_1 = \frac{V_D - 0}{R} = \frac{3}{7} \frac{U}{R}; \quad I_2 = \frac{V_C - 0}{2R} = \frac{2}{7} \frac{U}{R}; \quad I = I_1 + I_2 = \frac{5}{7} \frac{U}{R}.$$

On en déduit la résistance équivalente :

$$R_{\text{éq}} = \frac{7}{5}R.$$

Remarque : On voit que, pour le dipôle équivalent au réseau de résistances, les orientations choisies pour U et I correspondent à la convention récepteur.

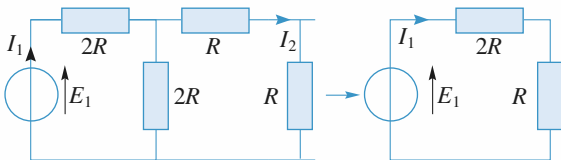
Si on avait orienté I dans l'autre sens, il aurait fallu poser :

$$U = -R_{\text{éq}}I \quad (\text{convention générateur}).$$

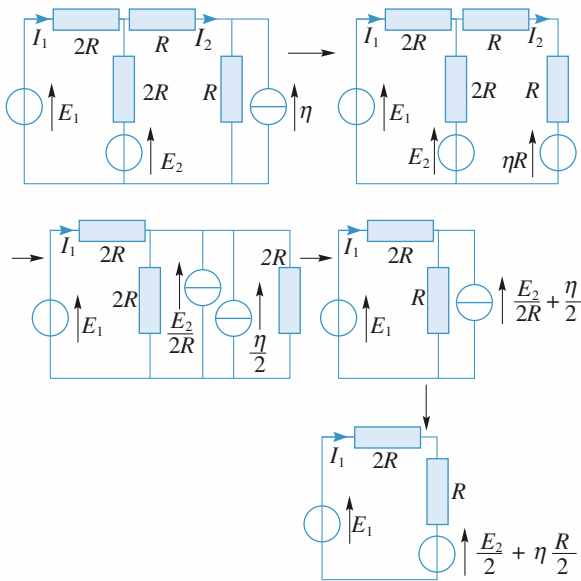
6 Étude d'un réseau par plusieurs méthodes

Méthode 1 : théorème de superposition

• On éteint E_2 et η



Pour le calcul de I_1 on remplace les trois résistances de droite par la résistance équivalente : $(R + R)$ en parallèle sur $2R$ soit une résistance équivalente R . On obtient :



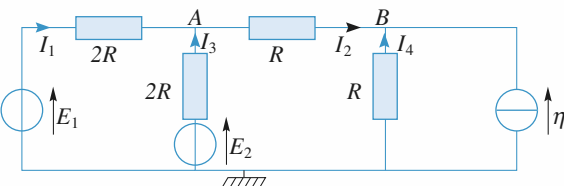
Finalement :

$$I_1 = \frac{E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{\eta R}{2}}{3R}$$

Dans cette série d'équivalences successives, on a perdu I_2 . Il faut donc reprendre une nouvelle série d'équivalences qui laisse intacte la branche où circule I_2 . Cette méthode est donc plus longue que l'application de la superposition.

Méthode 3

Résolution d'un système d'équations



Le réseau comporte trois nœuds. On attribue arbitrairement le potentiel nul à l'un d'entre eux (la masse) et on écrit la loi des nœuds en A et B avec les potentiels inconnus V_A et V_B .

- En A : $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ d'où :

$$\frac{E_1 - V_A}{2R} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{E_2 - V_A}{2R} = 0.$$
- En B : $I_2 + I_4 + \eta = 0$ d'où : $\frac{V_A - V_B}{R} - \frac{V_B}{R} + \eta = 0$

On obtient le système de deux équations :

$$\begin{cases} 4V_A - 2V_B = E_1 + E_2 \\ -V_A + 2V_B = R\eta \end{cases}$$

La résolution donne :

$$V_A = \frac{E_1 + E_2 + R\eta}{3} \text{ et } V_B = \frac{E_1 + E_2 + 4R\eta}{6}$$

On en déduit I_1 et I_2 :

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{2R} = \frac{2E_1 - E_2 - R\eta}{6R}$$

et :

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{E_1 + E_2 - 2R\eta}{6R}$$

Remarque : La résolution du système d'équations est ici assez simple. Cela est dû à la géométrie du réseau qui ne comporte que trois nœuds. En général, les autres méthodes sont plus rapides.

7 Étude d'un électrolyseur

L'équation de la caractéristique du générateur est $U = 4 - 20I$ avec U en volt et I en ampère.

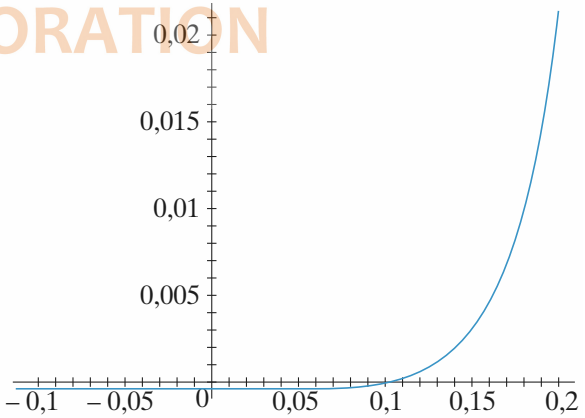
Cette droite coupe la caractéristique de l'électrolyseur en son point de fonctionnement M situé sur sa caractéristique à $U > 0$. L'équation de cette dernière est :

$$\frac{2 - 1,2}{0,1 - 0} = \frac{U - 1,2}{I}, \text{ d'où } U = 1,2 + 8I.$$

En éliminant U , il vient $1,2 + 8I = 4 - 20I$, d'où $I = 0,1$ A et par suite $U = 2V$.

8 Résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle actif

1 • Le tracé de la caractéristique est donné ci-dessous :



En circuit ouvert l'intensité est nulle ; il suffit de lire la valeur correspondante de u sur le graphe pour avoir $U_{C_0} = 0,1$ V. Ce résultat se retrouve en annulant $i(u)$, soit :

$$U_{C_0} = V_0 \ln \left(1 + \frac{I_p}{I_0} \right) \text{ qui redonne bien la même AN.}$$

2 • La convention adoptée ici est une convention récepteur, les parties de plan où u et i sont de même signe correspondent à des comportements récepteurs ; seule la partie ci-dessous est génératrice puisque $ui < 0$:

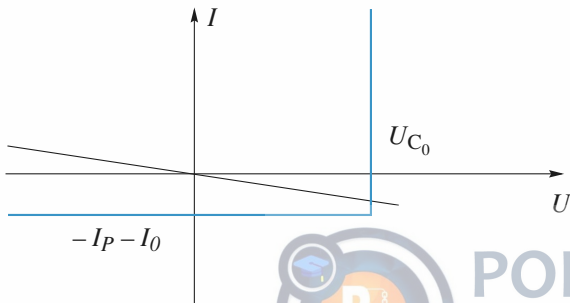


C'est cette partie qui sera intéressante puisque c'est dans ce mode de fonctionnement que la diode fournira effectivement de la puissance au circuit électrique.

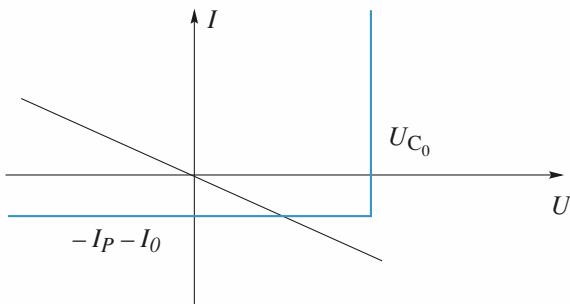
3 • On voit sur la caractéristique complète que l'intensité est pratiquement constante pour $u < 0.1 \text{ V}$ ($= U_{C_0}$) ; elle vaut environ -0.00051 A , ce qui correspond bien à $-I_P - I_0$.

Lorsque $u > 0.1 \text{ V}$, l'intensité croît rapidement (avec une pente de 10 A/V environ) ; on peut en première approximation considérer que u reste constant égal à U_{C_0} . D'où la caractéristique idéalisée de la diode.

4 • Si l'on adopte la convention récepteur pour la diode, il faut adopter une convention générateur pour la résistance ($i = -\frac{u}{R_C}$) afin de superposer les deux caractéristiques :



Cas a) : $R_C > R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_P + I_0}$, $i = -\frac{U_{C_0}}{R_C}$.

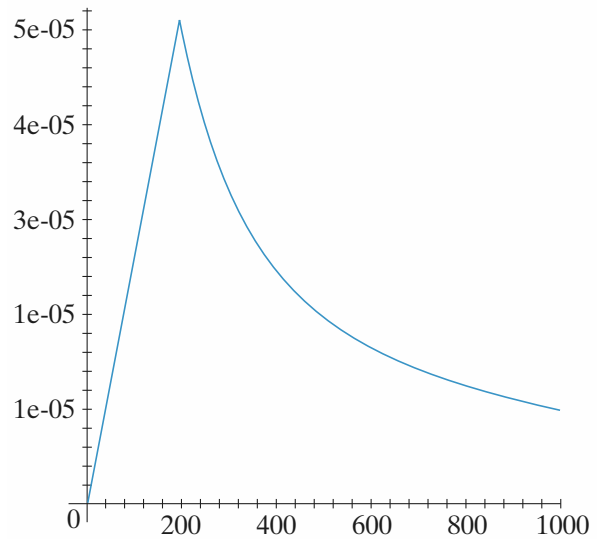


Cas b) : $R_C < R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_P + I_0}$, $u = R_C(I_P + I_0) = U_{C_0} \frac{R_C}{R_0}$.

5 • Pour $R_C < R_0$, $P = -\frac{R_C}{R_0^2} U_{C_0}^2$, et pour $R_C > R_0$,

$$P = -\frac{U_{C_0}^2}{R_C}$$

La courbe représentative est donc la suivante (avec les valeurs du texte, $R_0 = 196 \Omega$) :



La valeur P_{\max} est atteinte pour $R_C = R_0$ et vaut $\frac{U_{C_0}^2}{R_0}$.

6 • Le rendement doit être défini comme le rapport entre la quantité d'énergie que met la photodiode à la disposition de R_C et la quantité d'énergie qui permet à cette photodiode de fonctionner ; ceci correspond bien à $\eta = \frac{P_{\max}}{P_L}$.

Numériquement $P_{\max} = 50 \mu\text{W}$ et $\eta = 0,05$, soit un rendement de 5 %.

Ces deux valeurs sont très faibles. Il est donc nécessaire : D'une part d'utiliser une grande quantité de cellules de ce type pour parvenir à une puissance utilisable respectable. D'autre part d'améliorer les rendements des cellules grâce aux différents matériaux utilisés et aux différentes techniques de fabrication.

9 Résistances et conductances itératives

A. 1 • Le dipôle ne comportant pas de source liée, sa résistance d'entrée peut s'évaluer en utilisant les lois d'association de résistances :

$$R_{e1} = R_1 + \frac{R_2(R_0 + R_1)}{R_0 + R_1 + R_2}$$

Par définition de la résistance itérative, il vient :

$$R_{0i} = R_1 + \frac{R_2(R_{0i} + R_1)}{R_{0i} + R_1 + R_2}$$

d'où : $R_{0i} = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)}$.

2 • L'ensemble étant chargé par la résistance itérative, on établit de proche en proche que :

$$R_{0i} = R_1 + \frac{R_2(R_{0i} + R_1)}{R_{0i} + R_1 + R_2}$$

3 • Comme le quadripôle est chargé par sa résistance itérative, on écrit $u_0 = R_{0_i} i_0$ et $u_1 = R_{0_i} i_1$. Il en résulte que :

$$A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1} = \frac{i_0}{i_1} = A_{i_1}.$$

En considérant que le quadripôle réalise un diviseur de courant, $i_0 = \frac{R_2}{R_2 + (R_{0_i} + R_1)} i_1$, l'amplification en courant (et

l'amplification en tension) s'en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} A_{u_1} = A_{i_1} &= \frac{R_2}{R_{0_i} + R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_2}{\sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)} + R_1 + R_2} \\ &= \frac{1}{1 + k + \sqrt{k(2+k)}}. \end{aligned}$$

4 • Pour établir les expressions de A_{u_n} il suffit de remarquer, d'une part, que :

$$A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et, d'autre part, que tous les quadripôles de l'association ont la même amplification en tension, parce qu'ils sont tous chargés par la résistance itérative. En conséquence :

$$A_{u_n} = (A_{u_1})^n.$$

Pour l'amplification en courant, on aboutit à un résultat analogue :

$$A_{i_n} = (A_{i_1})^n.$$

5 • On pose $A_{u_n} = \left(\frac{1}{K}\right)^n$, il vient $K = 10^{0,1} = 1,259$.

De l'expression de A_{u_1} , on tire :

$$\begin{aligned} K = 1 + k + \sqrt{k(2+k)} &\Rightarrow k = \frac{(K-1)^2}{2K} = 2,66 \cdot 10^{-2} \\ &\Rightarrow R_1 = kR_2 = 26,6 \Omega. \end{aligned}$$

La valeur de résistance itérative s'en déduit :

$$R_{0_i} = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)} = 232 \Omega.$$

B. 1 • Le dipôle ne comportant pas de source liée, sa conductance d'entrée peut s'évaluer en utilisant les lois d'association des conductances :

$$G_{e_1} = G_2 + \frac{G_1(G_0 + G_2)}{G_0 + G_1 + G_2}.$$

Par définition de la conductance itérative, il vient :

$$G_{0_i} = G_2 = \frac{G_1(G_{0_i} + G_2)}{G_{0_i} + G_1 + G_2},$$

d'où :

$$G_{0_i} = \sqrt{G_2(2G_1 + G_2)}.$$

2 • L'ensemble étant chargé par la conductance itérative, on établit de proche en proche que $G_{0_i} = G_{e_1} = G_{e_2} = \dots = G_{e_n}$.

3 • Comme le quadripôle est chargé par sa conductance itérative, on est fondé à écrire $i_0 = G_{0_i} u_0$ et $i_1 = G_{0_i} u_1$.

Il en résulte que $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1} = \frac{u_0}{u_1} = A_{u_1}$.

En considérant que le quadripôle réalise un diviseur de tension, $u_0 = \frac{G_1}{G_1 + (G_{0_i} + G_2)} u_1$, l'amplification en tension et

l'amplification en courant s'en déduisent immédiatement :

$$\begin{aligned} A_{i_1} = A_{u_1} &= \frac{G_1}{G_{0_i} + G_1 + G_2} \\ &= \frac{G_1}{\sqrt{G_2(2G_1 + G_2)} + G_1 + G_2} \\ &= \frac{1}{1 + k + \sqrt{k(2+k)}}. \end{aligned}$$

4 • Pour établir les expressions de A_{u_n} , il suffit de remarquer, d'une part, que :

$$A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et, d'autre part, que tous les quadripôles de l'association ont la même amplification en tension, parce qu'ils sont tous chargés par la conductance itérative. En conséquence :

$$A_{u_n} = (A_{u_1})^n.$$

Pour l'amplification en courant, on aboutit à un résultat analogue : $A_{i_n} = (A_{i_1})^n$.

5 • On pose $A_{u_n} = \left(\frac{1}{K}\right)^n$, il vient $K = 10^{0,1} = 1,259$.

De l'expression de A_{u_1} , on tire :

$$K = 1 + k + \sqrt{k(2+k)} \Rightarrow k = \frac{(K-1)^2}{2K} = 2,66 \cdot 10^{-2},$$

d'où :

$$G_2 = kG_1 = 2,66 \cdot 10^{-5} \text{ S},$$

soit :

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = 37,6 \text{ k}\Omega.$$

La valeur de la conductance itérative s'en déduit :

$$G_{0_i} = \sqrt{G_2(2G_1 + G_2)} = 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ S},$$

soit encore

$$R_{0_i} = \frac{1}{G_{0_i}} = 4,3 \text{ k}\Omega.$$

10 Convertisseur analogique numérique

1 • a. Les tensions U_k délivrées par le réseau sont données par la relation de récurrence $U_{k+1} = pU_k$, d'où :

$$U_k = p^k U_0.$$

La tension U_k étant une fonction croissante de k car $p > 1$, le quantum de ce réseau est la tension U_0 délivrée par la sortie S_0 .

La tension de référence $U_{\text{réf}}$ délivrée par la sortie S_n étant reliée au quantum par la relation :

$$U_{\text{réf}} = p^n U_0.$$

Il en résulte que :
$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{p^{n-k}}.$$

Les résistances étant en série, il vient, par définition du pas,

$$p = \frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{R_{k+1}}{R_k} > 1, \text{ d'où la relation de récurrence,}$$

$R_{k+1} = pR_k$, qui permet le calcul de $R_k = \sum_{p=0}^k r_p$ en fonction de R_0 : $R_k = p^k R_0$.

Il apparaît que la plus petite résistance du réseau est :

$$r = R_0 = r_0.$$

Les valeurs des résistances constitutives du réseau, en fonction de r , en découlent :

$$\begin{aligned} r_k &= R_k - R_{k-1} = (p^k - p^{k-1})R_0 \\ &= p^{k-1}(p-1)R_0, \end{aligned}$$

d'où $r_k = p^{k-1}(p-1)r$ ($k > 0$).

Comme $R = R_n$, il vient $R = p^n r$, et par suite :

$$r_k = \frac{p-1}{p^{n+1-k}} R.$$

A.N. : Le réseau est constitué des $(n+1) = 6$ résistances :

$$r_0 = r ; r_1 = 9r ; r_2 = 9 \cdot 10r ; r_3 = 9 \cdot 10^2 r ; r_4 = 9 \cdot 10^3 r ;$$

$$r_5 = 9 \cdot 10^4 r.$$

Soit numériquement :

$$r_0 = r = 100 \Omega ; r_1 = 900 \Omega ; r_2 = 9\,000 \Omega ; r_3 = 90\,000 \Omega ;$$

$$r_4 = 900\,000 \Omega ; r_5 = R = 9\,000\,000 \Omega.$$

b. Les tensions délivrées (en l'absence de débit de courant) par le diviseur de tension sont données par la relation :

$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{p^{n-k}},$$

soit respectivement :

$$U_0 = 0,1 \text{ mV} ; U_1 = 1 \text{ mV} ;$$

$$U_2 = 10 \text{ mV} ; U_3 = 100 \text{ mV} ;$$

$$U_4 = 1 \text{ V} ; U_5 = U_{\text{réf}} = 10 \text{ V}.$$

Elles forment une échelle des multiples décimaux du quantum $U_0 = 0,1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 0,1 \text{ mV}$ et $U_{\text{réf}} = 10 \text{ V}$.

Ce type de réseau de résistances est utilisé comme atténuateur pour les changements de gammes dans les appareils de mesure analogiques.

2 • Pour un diviseur de tension de pas $p = 2$, les résistances constitutives sont données par la relation :

$$r_k = 2^{k-1} r.$$

La tension prélevée à la sortie S_k est :

$$U_k = 2^k U_0,$$

soit encore, en fonction de $U_{\text{réf}}$:

$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{2^{n-k}}.$$

A.N. : Comme $1\,024 = 2^{10}$, il résulte, d'après la relation $U_{\text{réf}} = 2^n U_0$, qu'il faut $n+1 = 11$ résistances pour former

un réseau délivrant toutes les tensions U_k multiples de 2 du quantum $U_0 = 1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 1 \text{ mV}$ et $U_n = U_{\text{réf}} = 1\,024 \text{ mV}$.

Un tel réseau peut être utilisé pour la réalisation d'un convertisseur analogique-numérique (C.A.N.).

3 • En remarquant que $U_e = KU_s U'_e + U'_s$, avec $K = 1V^{-1}$ on conclut que ces circuits logiques sont des diviseurs fournissant le quotient en U_s et le reste en U'_s quand le dividende est présenté en U_e et le diviseur en U'_e lorsque $2U'_e < U_e \leq 0$.

La structure du C.A.N. permet ainsi une écriture en binaire de la tension U :

$$U = K \sum_{k=0}^n U_{s,k} U_k = K \sum_{k=0}^n U_{s,k} 2^k U_0.$$

Si la tension U ne s'exprime pas par un nombre entier de mV, la partie décimale ($< 1 \text{ mV}$) apparaît aux bornes de la résistance p sous la forme d'une tension analogique $U'_{s,0}$.

Lorsque $U = 800,5 \text{ mV}$, on observe aux niveaux des sorties de circuits logiques les valeurs suivantes :

$$800,5 = 0 \times 1024 + 800,5$$

$$\Rightarrow U_{s,10} = 0 \text{ et } U'_{s,10} = 800,5 \text{ mV} ;$$

$$800,5 = 1 \times 512 + 288,5$$

$$\Rightarrow U_{s,9} = 1 \text{ et } U'_{s,9} = 288,5 \text{ mV} ;$$

$$288,5 = 1 \times 256 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,8} = 1 \text{ et } U'_{s,8} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 0 \times 128 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,7} = 0 \text{ et } U'_{s,7} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 0 \times 64 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,6} = 0 \text{ et } U'_{s,6} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 1 \times 32 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,5} = 1 \text{ et } U'_{s,5} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 16 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,4} = 0 \text{ et } U'_{s,4} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 8 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,3} = 0 \text{ et } U'_{s,3} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 4 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,2} = 0 \text{ et } U'_{s,2} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 2 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,1} = 0 \text{ et } U'_{s,1} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 1 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,0} = 0 \text{ et } U'_{s,0} = 0,5 \text{ mV}.$$

L'écriture en binaire de U est :

$$U = (01\,100\,100\,000)_2.$$

Ce convertisseur est un convertisseur à 11 bits donc la tension maximale admissible est :

$$U_{\text{max}} = 2^{11} - 1 = 2047 \text{ mV}.$$

11 Convertisseur numérique-analogique

1 • Les courants I_j qui traversent les résistances du réseau ($R, 2R$) sont indépendants de l'état des commutateurs (K_j), puisque l'amplificateur opérationnel étant parfait, son entrée inverseuse est aussi au potentiel zéro.

De proche en proche, on constate que la résistance du réseau situé à droite d'un nœud A_j est $2R$.

Ainsi, tout courant qui aboutit sur un nœud A_j se divise en deux courants I_j égaux.

La source débite le courant $I = \frac{E}{2R}$ qui se divise ensuite en deux courants égaux au niveau de chaque nœud :

$$I_{n-1} = \frac{I}{2^1}, \quad I_{n-2} = \frac{I}{2^2}, \quad \dots, \quad I_j = \frac{I}{2^{n-j}}, \quad \dots,$$

$$I_1 = \frac{I}{2^{n-1}}, \quad I_0 = \frac{I}{2^n}.$$

2 • Selon l'état (b_j) du commutateur (K_j), le courant I_j est dirigé vers la masse ou vers l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel.

Le courant I_N qui traverse la résistance R' est :

$$I_N = \sum_{j=0}^{n-1} b_j I_j = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{I}{2^{n-j}} = \frac{E}{R} \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{1}{2^{n+1-j}}.$$

La tension délivrée par le C.N.A. s'établit alors à :

$$\begin{aligned} U_s &= -R' I_N = -E \frac{R'}{R} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{2^{n+1-j}} \\ &= -E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j. \end{aligned}$$

3 • Le quantum δU_s est la variation (en valeur absolue) de tension observée à la sortie du C.N.A. lorsque le bit de plus faible poids $b_0 2^0$ est seul à varier quand on passe d'une information $N_{(2)}$ à une information $N'_{(2)}$:

$$\delta U_s = E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour que $\delta U_s = 10 \text{ mV}$, il faut prendre une source de f.e.m. E telle que :

$$E = \frac{R}{R'} 2^{n+1} \delta U_s = 12,8 \text{ V}.$$

4 • La valeur de la tension U_s s'obtient par application de la formule obtenue dans la question 2) :

$$\begin{aligned} U_s &= -E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j = -\delta U_s \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j \\ &= -10^{-2}(2^7 + 2^4 + 2^1) = -1,46 \text{ V}. \end{aligned}$$

De façon plus générale, on voit que :

$$N = \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j = -\frac{U_s}{\delta U_s},$$

c'est-à-dire que la valeur numérique décimale de $N_{(2)}$ est :

$$N = -\frac{U_s}{\delta U_s} = -100 U_s,$$

avec U_s exprimée en volt, soit :

$$N = 146.$$

Pour connaître l'état de tous les commutateurs il suffit alors d'écrire N en base 2 : $N_{(2)}$.

Pour écrire N en base 2, il suffit de diviser N par 2 et de relever le premier reste b_0 , puis de recommencer sur le dividende N_0 obtenu jusqu'à obtenir un dividende nul.

Ainsi, pour $N = 146$ il vient successivement :

$$\frac{146}{2} = 73 + 0 \Rightarrow N_0 = 73 \text{ et } b_0 = 0$$

$$\frac{73}{2} = 36 + 1 \Rightarrow N_1 = 36 \text{ et } b_1 = 1$$

$$\frac{36}{2} = 18 + 0 \Rightarrow N_2 = 18 \text{ et } b_2 = 0$$

$$\frac{18}{2} = 9 + 0 \Rightarrow N_3 = 9 \text{ et } b_3 = 0$$

$$\frac{9}{2} = 4 + 1 \Rightarrow N_4 = 4 \text{ et } b_4 = 1$$

$$\frac{4}{2} = 2 + 0 \Rightarrow N_5 = 2 \text{ et } b_5 = 0$$

$$\frac{2}{2} = 1 + 0 \Rightarrow N_6 = 1 \text{ et } b_6 = 0$$

$$\frac{1}{2} = 0 + 1 \Rightarrow N_7 = 0 \text{ et } b_7 = 1$$

soit, en définitive :

$$N_{(2)} = (10 \ 010 \ 010).$$

EXERCICES MAGNETOSTATIQUE

Conseils

Dans les deux cas il s'agit de sommer les champs des spires. Dans les deux cas, les spires se répartissent sur une demi-circonférence de longueur πR : quand on fait varier θ de 0 à π on décrit bien l'ensemble des spires, depuis celle de rayon nul au « pôle Nord » à celle de rayon nul au « pôle Sud » en passant par celle de rayon R à l'équateur.

Ce qui change c'est le nombre de spires par unité de longueur (et leur épaisseur bien évidemment): dans le 1^{er} cas il y a N spires jointives réparties sur une longueur πR , dans le 2^e cas ce sont les projections des spires sur l'axe Oz qui sont en quelque sorte jointives.

Le champ d'une spire

Le disque positif, de centre O , est mis en rotation autour de l'axe (Oz) . Calculer le champ magnétique en un point M de l'axe (Oz) . En quel point ce champ est-il maximal ? On repérera M par l'angle α .

2 • $U = 100$ kV, $R = 10$ cm, $e = 0,5$ mm, et la vitesse de rotation est de 6 000 tours par minute.

Calculer la valeur maximale du champ magnétique. Comparer cette valeur à celle du champ magnétique terrestre.

Conseils

Il faut partir de l'expression (à connaître) du champ \vec{B} sur l'axe d'une spire circulaire parcourue par un courant I .

Les différentes étapes du calcul de \vec{B} sont :

- déterminer le courant élémentaire dI associé à la « spire » de rayon r et de largeur dr ;
- déterminer le champ dB associé à cette spire élémentaire ;
- calculer le champ total $B(z)$ en intégrant dB .

Pour le calcul de l'intégrale, il est plus simple d'utiliser comme variable l'angle θ sous lequel on voit la « spire » de rayon r ; θ varie entre 0 et α .

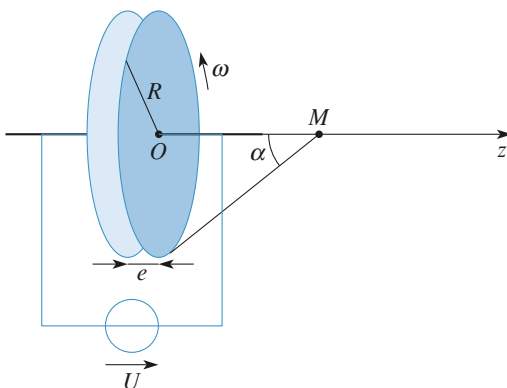
6 Disque de Rowland (oral)

Henry Rowland, physicien américain, a réalisé en 1876 une expérience qui a montré que le déplacement de charges électriques constituait bien un courant électrique susceptible de créer un champ magnétique.

Le principe, très simplifié, de l'expérience est expliqué ci-dessous.

1 • Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de rayon R , très proches l'un de l'autre. Si on impose une différence de potentiel U entre ces disques, des charges électriques surfaciques apparaissent sur les faces métalliques en regard. La charge sur le disque positif est uniformément répartie, avec une densité surfacique

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{U}{e}$$



7 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation (oral)

On considère une sphère isolante, de rayon R et de centre O , creuse, portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Elle tourne autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω constante qui ne perturbe pas la répartition des charges.

- 1 • Déterminer le champ créé en O .
- 2 • Déterminer le champ créé loin de la sphère.

Conseils

1) Les charges en mouvement créent des courants électriques. Il suffit de trouver le « découpage » en élément de surface se comportant comme des spires et on est ramené au calcul de l'exercice 5 (répartition de spires jointives ou non sur une sphère).

Pour évaluer l'intensité du courant qui circule dans ces « spires », on peut chercher la quantité d'électricité qui s'est déplacée pendant un tour pour calculer celle qui circule par unité de temps.

2) L'analyse est la même, seul change l'angle sous lequel est vu une spire. Comme on est très loin de la sphère on peut approximer le sinus de l'angle à sa tangente, ce qui facilite le calcul.

8 Bobines de Gaugain-Helmholtz (INCONTOURNABLE)

1 • Rappeler l'expression du champ créé en un point de son axe par une bobine de N spires circulaires de rayon R parcourue par un courant I ; on considère que toutes les spires ont même rayon et qu'elles se trouvent toutes dans le plan $z = 0$.

On notera B_0 le champ au centre de la bobine et on exprimera la fonction $f(u)$ telle que $B(z) = B_0 f(u)$, avec $u = \frac{z}{R}$.

2 • Deux bobines identiques (rayon R , N spires) et perpendiculaires à l'axe (Oz) sont centrées en deux points O_1 et O_2 de cotes $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$. Elles sont parcourues par le même courant I , dans le même sens.

On note $\vec{B}(z) = B(z) \vec{e}_z$ le champ magnétique en un point de l'axe.

a) Représenter sur un même graphe les champs $B_1(z)$ et $B_2(z)$ créés par chaque bobine, ainsi que le champ B total. On distinguera le cas où les bobines sont proches et celui où elles sont éloignées.

b) Quelle est la parité de la fonction $B(z)$?

3 • Il existe une valeur de d pour laquelle la dérivée seconde $B''(z)$ s'annule en O .

a) Représenter graphiquement $B_1(z)$, $B_2(z)$ et $B(z)$ dans cette situation.

b) Que peut-on dire de la variation du champ \vec{B} au voisinage de O ? Quel est l'intérêt de cette configuration ?

c) Calculer la valeur de d pour cette configuration appelée « bobines de Helmholtz ».

d) Par un calcul numérique, définir l'intervalle de z pour lequel $B(z) \approx B(0)$ à 1% près en valeur relative.

Conseils

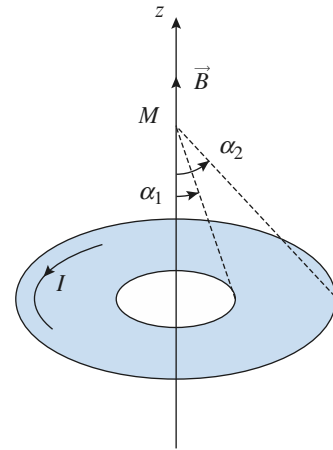
Il est préférable de connaître le résultat demandé à la question 1). On pourra commencer par tracer, avec une calculatrice graphique, la courbe représentant $\frac{B}{B_0}$ en fonction de $\frac{z}{R}$, pour différentes valeurs de d .

Quel est le signe de la dérivée d'une courbe « en cloche » ? Possède-t-elle des points d'inflexion ?

Si le champ \vec{B} est uniforme le long d'une ligne de champ, alors les lignes de champ voisines sont parallèles ; pourquoi ?

Si la dérivée seconde en 0 d'une fonction paire est nulle, quel est l'ordre de la plus faible puissance dans le développement de Taylor ?

9 Champ créé par un « solénoïde plat » (oral)



Un « solénoïde plat » est obtenu en juxtaposant N spires parcourues par I de $\alpha = \alpha_1$ à $\alpha = \alpha_2$.

1 • Poser l'intégrale qui permet de calculer le champ créé en M .

2 • Que dire de cette intégrale en $z = 0$, en z tendant vers l'infini ?

1) Les spires étant jointives, celles qui sont comprises entre r et $r + dr$ contribuent également au champ en M . On connaît le champ créé en M par une spire, il faut donc déterminer combien de spires sont comprises entre r et $r + dr$.

2) En $z = 0$ on est au plus proche des courants, l'intégrale doit donc être maximale ; à l'infini on doit retrouver le champ d'un dipôle (voir au chapitre suivant) en un point de l'axe de ce dipôle.

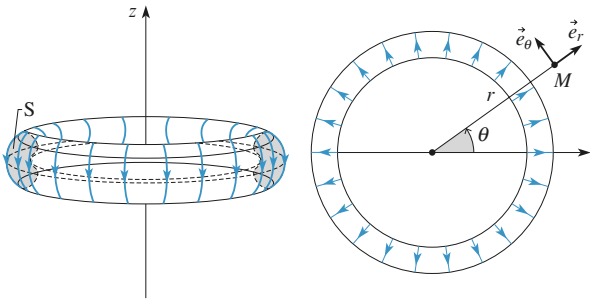
10 Champ magnétique produit par une bobine torique (INCONTOURNABLE)

Un tore est engendré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe (Oz). Une bobine de N spires parcourues par un courant I est enroulée régulièrement sur le tore. Elles sont suffisamment serrées pour être assimilées à une nappe surfacique continue.

1 • Étudier les symétries de \vec{B} .

2 • Exprimer le champ \vec{B} en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

3 • Comparer avec le champ produit par un solénoïde infiniment long.



Conseils

L'étude des symétries doit nous donner la forme des lignes de champ. On rappelle qu'elle porte sur la détermination des plans de symétrie ou d'antisymétrie, ainsi que sur les translations et rotations qui laissent le système invariant.

Étant donné la symétrie du problème, le calcul de \vec{B} se fait en appliquant le théorème d'Ampère avec un contour Γ constitué d'une ligne de champ.

11 Champ créé par un solénoïde de vingt spires

Vingt spires circulaires, de même axe (Oz) , de même rayon $R = 5 \text{ mm}$ et espacées de 5 mm , sont parcourues par

le même courant $I = 1 \text{ A}$. Le schéma représente les lignes de champ du champ magnétique créé par ce système, dans un plan contenant (Oz) .

Dans la zone où les lignes de champ sont quasiment des droites parallèles, elles sont espacées de 1 mm .

- 1 • Quelles sont les symétries du système ?
- 2 • a) Dans le cas d'un solénoïde infiniment long, retrouver l'expression du champ créé sur l'axe.
b) Calculer $\vec{B}(N)$ sur l'axe du solénoïde fini.
- 3 • Calculer une valeur approchée du champ en A , et en analysant la figure, déterminer une valeur approchée du champ magnétique en C et en D .

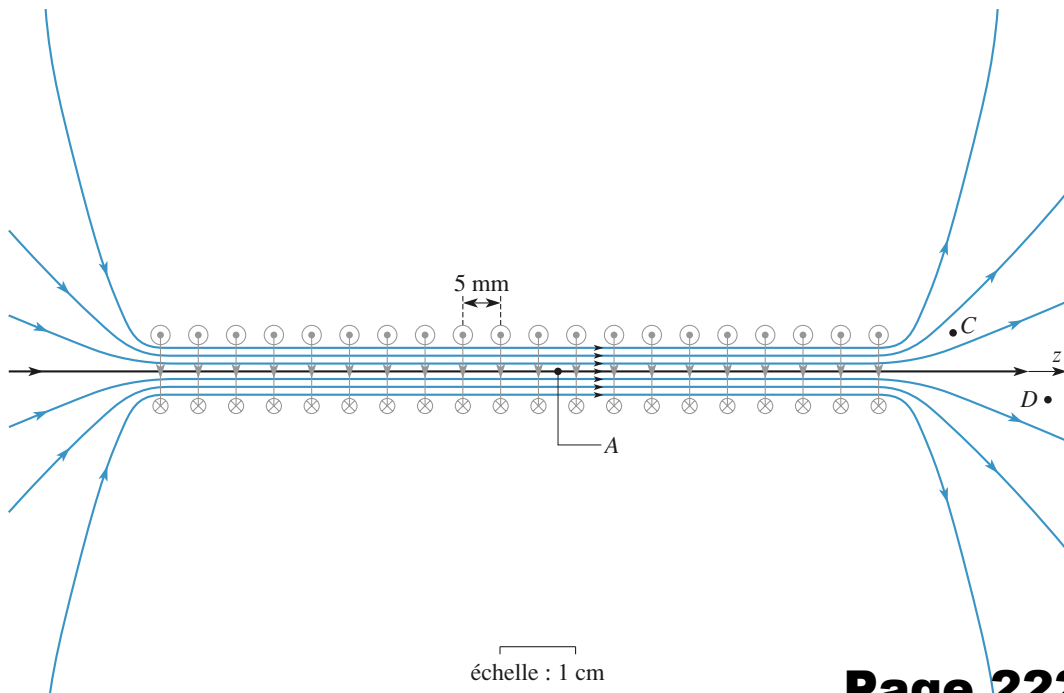
Conseils

- 1) Attention, le solénoïde n'est pas infiniment long.
- 2) a) C'est du cours, INCONTOURNABLE.
- b) C'est du classique.
- 3) À quel système simple peut-on assimiler le système de spires pour déterminer le champ en A ?

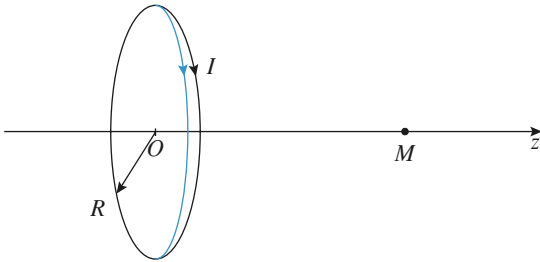
On admettra qu'en un point A' proche de A , mais en dehors de l'axe, $\vec{B}(A') \approx \vec{B}(A)$.

Quelle est la propriété des différentes sections d'un même tube de champ ?

Une ligne du champ engendre un tube de champ par rotation autour de l'axe Oz en raison de l'invariance par rotation de la distribution.



12 Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe



Soit une spire d'axe Oz , de centre O , de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

- 1 • Calculer $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe Oz .
- 2 • a) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Oz) (de $-\infty$ à $+\infty$).
b) Interpréter le résultat obtenu.
- 3 • Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R , de longueur ℓ et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant d'intensité I .

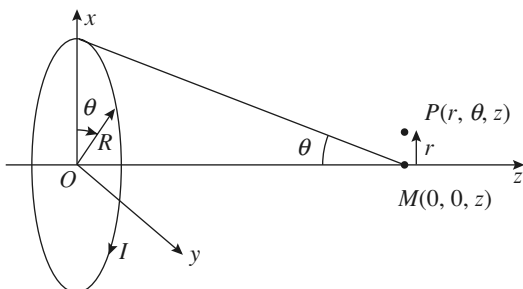
Conseils
 1) Ce calcul doit être connu ; il fait partie des INCONTOURNABLES.
 2) permet de « retrouver » le théorème d'Ampère. La question 3) en présente une application.

13 Champ au voisinage de l'axe d'une spire (INCONTOURNABLE)

Soit une spire de rayon R , d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I . On connaît le champ créé par cette spire en tout point de son axe Oz :

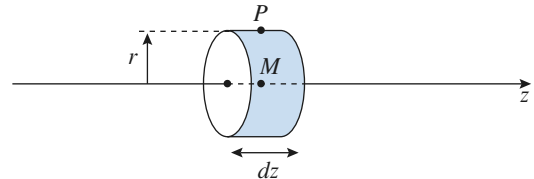
$$B(M) = f(z)I \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{\mu_0}{2R} \sin^3 \theta.$$

(voir exercice précédent)



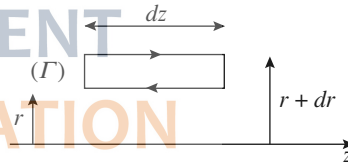
Dans cet exercice, on cherche à connaître le champ en un point voisin de l'axe Oz .

- 1 • Justifier que l'on cherche un champ de la forme $B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z$.
- 2 • Exprimer le flux de B à travers une surface cylindrique élémentaire fermée de rayon r , hauteur dz (r et dz étant du même ordre de grandeur). En déduire le développement limité au 1^{er} ordre de $B_r(r, z)$ en considérant que $B_z(r, z) \approx B(M)$, M étant sur l'axe.



On précisera pourquoi r et la hauteur du cylindre doivent être petits (ce calcul n'est valable qu'au voisinage de l'axe !).

- 3 • Trouver alors le développement limité au second ordre de $B_z(r, z)$ en posant $B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta(z)r^2I$.
Expliciter $\beta(z)$ en prenant le contour suivant :



- 4 • En déduire le champ \vec{B} en un point P de coordonnées (r, θ, z) avec $r \ll R$, connaissant \vec{B} en M de coordonnées $(0, 0, z)$.

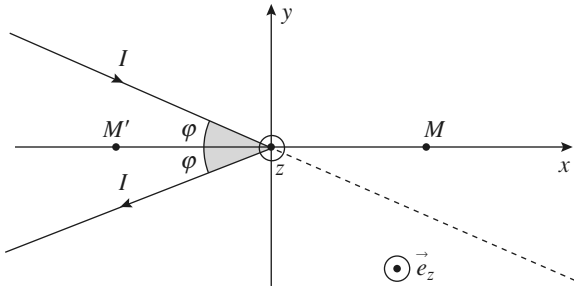
Conseils
 1) L'étude habituelle des symétries et des invariances permet de répondre à la première question.
 2) r étant petit, comme la hauteur du cylindre, il n'est pas besoin d'intégrer sur les différentes surfaces pour exprimer le flux. Se souvenir que le flux de B à travers n'importe quelle surface fermée est nul.
 3) En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour élémentaire *ad hoc*, le calcul de la circulation de B , développé au second ordre en r , permet d'explicitier $\beta(z)$.
 4) On remarquera que $B(P)$ s'exprime uniquement en fonction de B sur l'axe.

14 Courant angulaire (oral)

Montrer que le champ magnétique créé par un circuit filiforme « angulaire » parcouru par un courant d'intensité I au point M de l'axe (Ox) bissecteur est donné par :

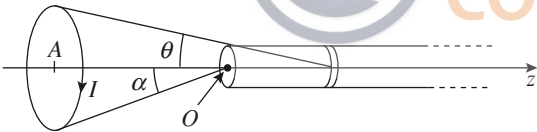
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_z$$

dans le cas $x > 0$ (point M). Qu'obtient-on dans le cas $x < 0$ (point M') ?



15 Flux du champ d'une spire à travers un solénoïde

On considère le système suivant :



Une spire d'axe Oz de centre A rayon R est parcourue par un courant I .

Un solénoïde de rayon r est suffisamment long pour pouvoir le considérer comme infini quand z tend vers l'infini. Il comporte n spires par unité de longueur.

De l'extrémité du solénoïde on voit la spire sous l'angle α . Le rayon r du solénoïde est petit devant R , rayon de la spire.

Calculer le flux du champ magnétique créé par la spire à travers le solénoïde.

Conseils

Le champ d'une spire est $\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$. Il faut relier le nombre de spires ndz à $d\theta$.

16 Champ magnétique créé par l'électron de l'atome d'H

Dans un modèle « planétaire » simple de l'atome d'hydrogène, l'électron tourne autour du proton sur une trajectoire circulaire bien définie.

1 • Calculer la vitesse de rotation de l'électron si la distance proton – électron est $r = 53$ pm.

2 • Calculer le champ magnétique alors ressenti par le proton. Le comparer à un champ macroscopique.

Conseils

1) Appliquer par exemple le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{e}_r .

2) L'électron dans son mouvement de rotation se comporte comme une boucle de courant.

CORRIGÉS MAGNETOSTATIQUE

$$d\vec{B} \times \frac{\mu_0}{2(R \sin \theta)} \frac{NI d\theta}{\pi} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z.$$

On en déduit :

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \sin^2 \theta d\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{or } \int_0^\pi \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\mu_0 N \pi I}{4\pi R}$$

$$\text{donc } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 NI}{4R} \vec{e}_z.$$

t

$$= dz, \text{ soit } n' = \frac{N}{2R} \quad \frac{N}{2R}.$$

$$\cos \theta = \frac{z}{R} \Rightarrow -\sin \theta d\theta = \frac{dz}{R}$$

donc $dz = -R \sin \theta d\theta$; il y a donc $n' dz = \frac{N}{2R} dz$, soit

$$\frac{N}{2}.$$

r

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2(R \sin \theta)} \times \frac{NI}{2} \sin \theta d\theta \times \sin^3 \theta \vec{e}_z \text{ au champ total}$$

$$= + \frac{\mu_0 I N}{4R} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z$$

$$\text{alors } B(O) = \frac{\mu_0 NI}{4R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 NI}{8R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

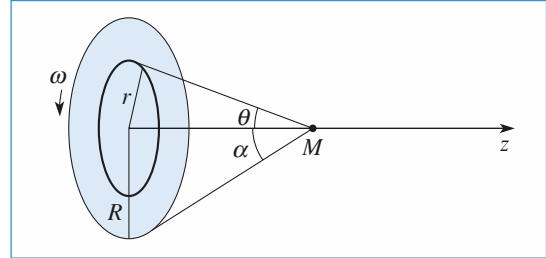
π

Pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, cette charge dq traverse une section quelconque de la « spire » ; l'intensité associée est donc telle que $dq = T dI$, soit :

$$dI = \sigma \omega r dr.$$

• La spire élémentaire crée en M un champ :

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta.$$



La variable θ semble plus appropriée au calcul de l'intégrale que la variable r :

$$r = z \tan \theta, \text{ d'où } dr = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta; \quad dI = \sigma \omega \frac{z r d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{et } dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

$$\text{On pose } u = \cos \theta. \quad \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -\left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du.$$

$$B(\alpha) = \int_0^R dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \int_{\cos \alpha}^1 \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) du$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - 2\right)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2 \tan \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - 2\right);$$

$$\text{soit : } B(\alpha) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Au point } O, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e}.$$

À l'infini, $\alpha \rightarrow 0$ et $B \rightarrow 0$.

$$B'(\alpha) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (2 - \cos^2 \alpha - \cos \alpha).$$

$B'(\alpha)$ ne s'annule que pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$: le champ est

maximal au voisinage du centre O .

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e}.$$

- 2 • Avec les valeurs proposées :
 6 000 tours/minute \rightarrow 100 tours/seconde
 $\rightarrow \omega = 200 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 $B_{\text{max}} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ T}$.

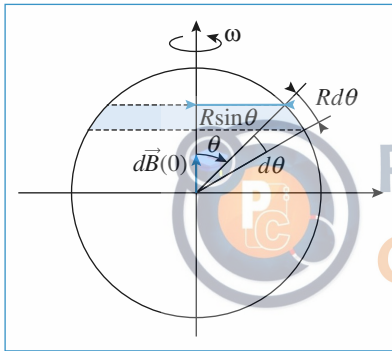
Cette valeur est très faible par rapport au champ terrestre qui est de l'ordre de quelques 10^{-5} T . Rowland est néanmoins parvenu, grâce à un jeu d'aiguilles aimantées, à prouver l'existence de ce champ.

7 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation

- 1 • Les charges en mouvement à la surface de la sphère se comportent comme des courants annulaires ou des « spires » de courant.

Entre θ et $\theta + d\theta$ les charges se répartissent sur une surface $dS = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta$ qui porte donc la charge

$$dq = \frac{Q}{4\pi R^2} dS = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta$$



Cette charge se déplace à la vitesse $v = R \sin \theta \omega$.

En un tour il s'est donc écoulé dq dans cette spire, ce qui correspond à un courant $dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi} \omega = \frac{Q \omega \sin \theta d\theta}{4\pi}$

qui contribue pour $d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin \theta} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \omega \sin^3 \theta d\theta}{8\pi R} \vec{e}_z$ au champ total.

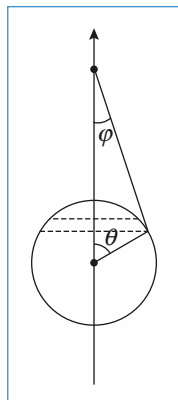
$$B(0) = \frac{\mu_0 \omega}{8\pi R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 Q \omega}{6\pi R}$$

- 2 • En un point très éloigné le calcul est le même : la « spire » située entre θ et $\theta + d\theta$ contribue pour

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

au champ total.

Si M est très éloigné de O on peut approximer $\sin \varphi$ par $\frac{R \sin \theta}{z}$



il vient alors

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{2R \sin \theta} \left(\frac{R \sin \theta}{z} \right)^3 \frac{Q \omega \sin \theta d\theta}{4\pi} \\ = \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{8\pi z^3} \sin^3 \theta d\theta$$

$$d'où B(M) = \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{8\pi z^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{6\pi z^3}$$

On verra comment retrouver ce résultat en assimilant la distribution à un dipôle magnétique au chapitre suivant.

8 Bobines de Gaugain-Helmholtz

- 1 • Soit O le centre de la bobine, perpendiculaire à l'axe (Oz).

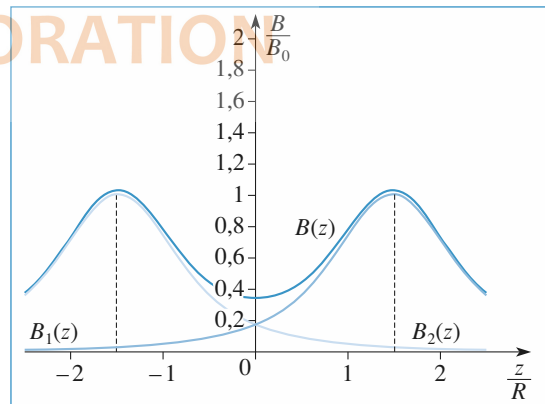
• Le champ au centre est $\vec{B}(0) = B_0 \vec{e}_z$, avec :

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2R}$$

• Le champ en un point de l'axe de cote z est $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$, avec $B(z) = B_0 \sin^3 \alpha$; ou encore :

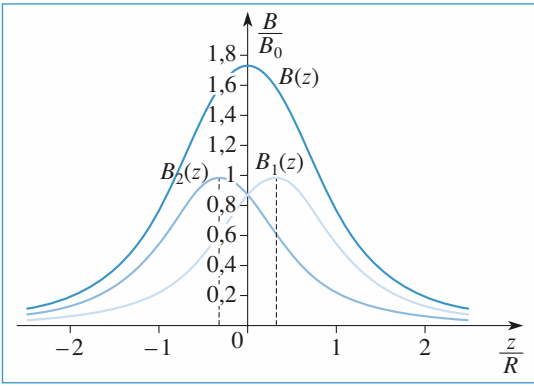
$$B(z) = B_0 \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{z}{R}$$

- 2 • a) La courbe représentative de la fonction $B(z)$ est une courbe « en cloche » ; elle possède nécessairement deux points d'inflexion où sa dérivée seconde est nulle.



$B_1(z), B_2(z)$ et $B(z)$ pour $d = 3R$

Le schéma représente les deux courbes en cloche identiques, centrées en $z = \pm \frac{d}{2}$, et la somme des deux fonctions.



$B_1(z), B_2(z)$ et $B(z)$ pour $d = 0,6 R$

- Si d est grand, la somme est du type « chameau ».
- Si d est petit, la somme est du type « dromadaire ».
- Il existe donc une valeur intermédiaire de d pour laquelle le creux (ou la bosse) du milieu est remplacé(e) par une courbe très plate.

b) Dans tous les cas, la fonction $B(z)$ est paire. Le développement limité de $B(z)$ au voisinage de 0 ne comportera donc que des puissances paires.

3 • a) La courbe possède deux points d'inflexion pour le profil « dromadaire » et quatre pour le profil « chameau ». Lorsque la dérivée seconde de $B(z)$ s'annule en 0 , la situation est celle du cas limite où les deux points d'inflexion intérieurs se rejoignent en O ; la bosse est alors très plate.

b) La fonction $B(z)$ étant paire, si la dérivée seconde est nulle, le premier terme non nul de son développement de Taylor est d'ordre 4 :

$$B(z) = B(0) + \frac{1}{24} B^{(4)}(0) z^4 + o(z^5).$$

En d'autres termes, la fonction $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3 ; le champ magnétique est quasi uniforme sur un domaine important, d'où l'intérêt de cette configuration.

La quasi uniformité de \vec{B} ne se limite pas à l'axe. Si \vec{B} est uniforme le long de l'axe, les tubes de champ gardent une section constante, et les lignes de champ sont parallèles. Or, si les lignes de champ sont parallèles dans une zone dépourvue de courants, le champ est uniforme (on peut le montrer en utilisant le théorème d'Ampère).

c) Si $B''(0) = 0$, alors $B_1''(0) = -B_2''(0)$.

La bobine (1) est centrée en O_1 de cote $z_1 = -\frac{d}{2}$.

On en déduit, en utilisant la variable adimensionnée $u = \frac{z}{R}$ et la fonction $f(u)$ définies à la question 1) :

$$B_1(z) = B_0 f\left(u + \frac{d}{2R}\right)$$

et de même : $B_2(z) = B_0 f\left(u - \frac{d}{2R}\right)$;

d'où la condition : $f''\left(\frac{d}{2R}\right) = -f''\left(-\frac{d}{2R}\right)$.

La fonction f étant paire, on a par ailleurs :

$$f''\left(\frac{d}{2R}\right) = f''\left(-\frac{d}{2R}\right).$$

Il en résulte que la configuration recherchée est telle que

$$f''\left(\frac{d}{2R}\right) = 0.$$

$$f''(u) = \frac{12u^2 - 3}{(1+u^2)^{7/2}} ; f''(u) \text{ s'annule pour } u = \pm \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3 au voisinage de O si $d = R$.

d) On suppose la condition $d = R$ réalisée :

$$B(z) = B_0 \left[f\left(u + \frac{1}{2}\right) + f\left(u - \frac{1}{2}\right) \right].$$

Pour comparer simplement $B(z)$ à $B(0)$, on calcule, pour différentes valeurs de z (ou de u), le rapport :

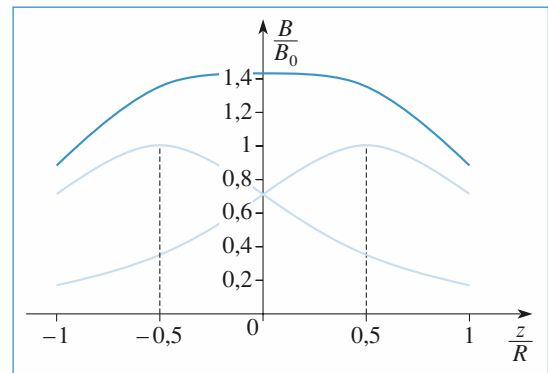
$$\frac{B(z)}{B(0)} = \frac{f(u+0,5) + f(u-0,5)}{2f(0)}$$

L'étude numérique conduit aux valeurs suivantes :

u	0	0,1	0,2	0,3	0,31
(1)	1,0000	0,9999	0,9982	0,9916	0,9904

$$\text{où (1)} = \frac{f(u+0,5) + f(u-0,5)}{2f(0)}$$

On peut donc considérer le champ uniforme, à 1% près en valeur relative, dans l'intervalle $-0,3R < z < 0,3R$.



Bobine de Helmholtz : $d = R$
le champ sur l'axe $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3

9 Champ créé par un « solénoïde plat »

1 • Déterminons tout d'abord le nombre de spires de rayon r comprises entre r et $r + dr$:

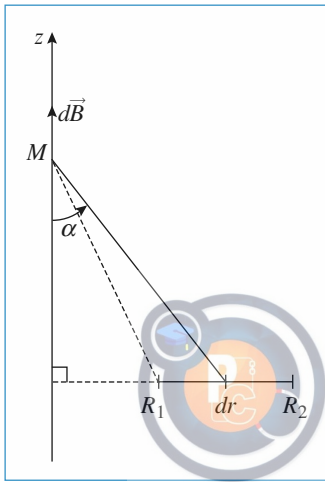
de $r = R_1$ à $r = R_2$ il y a N spires jointives, ce qui donne

$\frac{N}{R_2 - R_1}$ spires par unité de longueur (radiale). Donc entre

r et $r + dr$ il y a $\frac{N dr}{R_2 - R_1}$ spires.

Elles contribuent pour $d\vec{B} = \frac{\mu_0 N I dr}{2(R_2 - R_1)r} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

au champ total.



$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{taux } \alpha = \frac{r}{z}$$

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{d'où } B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 • • En $z = 0$ l'intégrale devient $\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \text{Ln } \frac{R_2}{R_1}$

et le champ est bien maximum et égal à

$$B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \text{Ln } \frac{R_2}{R_1} .$$

(z n'intervient qu'au dénominateur dans une somme de carrés : quand il est nul $dB(M)$ est bien max).

• Quand $z \rightarrow \infty$, $\int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{z^3} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3z^3}$,

ce qui donne :

$$B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \frac{R_2^3 - R_1^3}{3z^3} . \text{ Le champ varie en } \frac{1}{z^3}, \text{ c'est}$$

une caractéristique des champs dipolaires qui seront vus au chapitre suivant.

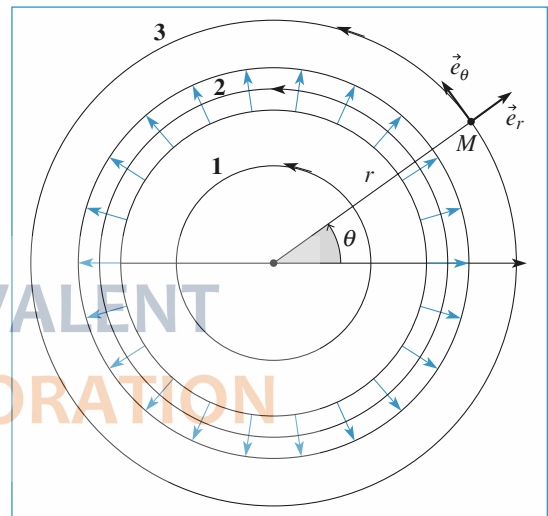
10 Champ magnétique produit par une bobine torique (INCONTOURNABLE)

1 • Le système est invariant par rotation autour de (Oz) . B est donc indépendant de θ et $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$.

• Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont plans de symétrie pour les courants. $\vec{B}(M)$ est donc normal au plan défini par l'axe (Oz) et le point M , soit :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta .$$

2 • Les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe (Oz) . B est de norme constante sur une ligne de champ, ce qui permet de le déterminer aisément au moyen du théorème d'Ampère.



• Soit Γ la ligne de champ passant par M . Son rayon est r , et la circulation de \vec{B} le long de Γ est :

$$\mathcal{C} = 2 \pi r B(M) .$$

• Si M est à l'extérieur du tore :

– cas 1 : aucun courant ne traverse le disque délimité par Γ ;

– cas 3 : le disque délimité par Γ est traversé par N courants montants (positifs) et N courants descendants (négatifs). Le courant total traversant la surface Σ délimitée par Γ est nul.

On remarque que, si Γ est extérieur au tore, il est toujours possible de choisir une surface (Σ) s'appuyant sur Γ , traversée par aucun courant.

Dans tous les cas où M est à l'extérieur, d'après le théorème d'Ampère, $\mathcal{C} = 0$ et $B(M) = 0$.

• Si M est à l'intérieur du tore (cas 2), seuls les courants montants traversent Σ . Le courant total traversant cette surface est égal à $+NI$ (le signe + vient de ce que la normale à la surface est orientée comme I).

Dans ce cas, d'après le théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = \mu_0 N I \text{ et } B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r} .$$

Conclusion : $\vec{B}(M) = \vec{0}$, si M est à l'extérieur du tore.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \text{ si } M \text{ est à l'intérieur du tore.}$$

3 • On peut voir un solénoïde infini comme un tore dont le rayon tend vers l'infini.

- Le champ est bien nul à l'extérieur.
- À l'intérieur du tore, le rayon r est quasiment uniforme et égal à R , aussi grand que l'on veut.
- Le nombre de spires par unité de longueur est :

$$n = \frac{N}{\text{longueur}} = \frac{N}{2\pi R}.$$

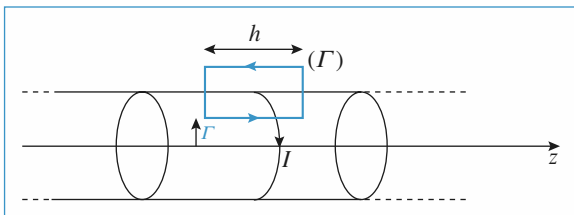
À l'intérieur, on retrouve bien un champ uniforme et égal à $\mu_0 n I$.

11 Champ créé par un solénoïde de vingt spires

1 • Le système de courants, et donc le champ \vec{B} , sont invariants par rotation d'axe (Oz) , donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$.

Le plan du schéma, comme tout plan contenant l'axe (Oz) , est plan d'antisymétrie pour les courants ; en tout point du schéma, $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan donc $\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz . Le plan normal à (Oz) , et équidistant de la 10^e et de la 11^e spires, est plan de symétrie pour les courants ; ce plan est donc un plan d'antisymétrie pour les lignes de champ.

2 • a)



Soit un solénoïde infiniment long comportant n spires par unité de longueur (régulièrement réparties), chacune étant parcourue par un courant d'intensité I .

Le système du courant est invariant par translation suivant z donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$.

Le système de courant est invariant par rotation autour de Oz donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Tout plan orthogonal à Oz est un plan de symétrie des courants, donc \vec{B} est porté par \vec{Oz} , et donc : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$.

Nous savons (résultat du cours) que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long est nul.

Appliquons le théorème d'Ampère en choisissant le contour (Γ) du schéma :

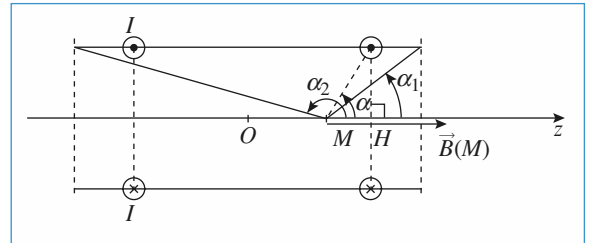
$$B(r) h = \mu_0 n h I$$

soit : pour M intérieur au solénoïde $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$;

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long.

b) Calculons le champ sur l'axe d'un solénoïde de longueur finie comportant n spires par unité de longueur

$$\left(\text{ici } n = \frac{1}{5.10^{-3}} = 200 \text{ m}^{-1} \right).$$



Soit un point M de cote z sur l'axe Oz .

Chaque spire vue sous un angle α de M contribue pour

$$\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \text{ au champ magnétique.}$$

Cherchons le nombre de spires vues entre α et $\alpha + d\alpha$;

sachant que $\tan \alpha = \frac{R}{MH}$ ou $MH = \frac{R}{\tan \alpha}$, quand α

varie de $d\alpha$, H se déplace de dH :

$$dH = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

or sur une longueur $|dH|$ il y a $n|dH|$ spires. Le nombre de spires entre α et $\alpha + d\alpha$ est égal à :

$$dN = \frac{nR}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$\text{d'où } dB = \frac{nR}{\sin^2 \alpha} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{n \mu_0 I}{2} \sin \alpha d\alpha.$$

Quand α varie de α_1 à α_2 , cela donne :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$\text{et } \vec{B}(N) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

Dans le cadre d'un solénoïde infini, on retrouve bien :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z \text{ avec } \alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = \pi.$$

3 • Vu du point A , le système de spires est voisin d'un solénoïde infiniment long qui possède $n = 200$ spires par mètre, d'où :

$$\vec{B}(A) \approx \mu_0 n I \vec{e}_z, \text{ soit } B(A) \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ T.}$$

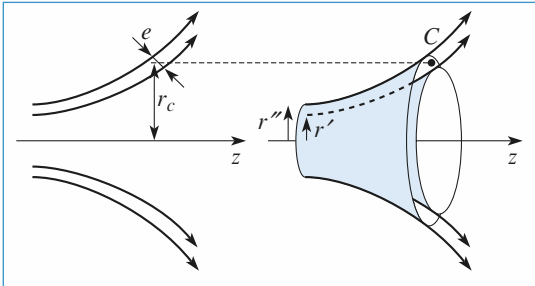
Tant que le modèle du solénoïde infiniment long est valable, le champ \vec{B} est quasiment égal à $\vec{B}(A)$ en tout point intérieur au solénoïde.

En ne faisant pas cette approximation $B(A) = \mu_0 n I \cos \alpha$

avec $\cos \alpha = \frac{55}{\sqrt{55^2 + 5^2}} = 0,96$.

On fait donc une erreur de 4 % en considérant le champ d'un solénoïde infiniment long alors qu'il n'est constitué que de 20 spires.

À partir de chaque ligne de champ du schéma, on peut donc, par rotation, engendrer un tube de champ. À partir de deux lignes de champ voisines, on engendre de même un tube de champ dont la section normale a approximativement pour aire : $S = 2 \pi r e$.



Point C : On considère le tube de champ engendré par la rotation des deux lignes de champ qui encadrent C .

Le point C est à une distance $r_C \approx 5$ mm de l'axe, et les deux lignes de champ sont écartées de $e \approx 3,5$ mm ; au niveau du point C , l'aire de la section du tube vaut approximativement $2 \pi r_C e$. La valeur approchée du flux de \vec{B} à travers ce tube de champ est donc $\Phi \approx B(C) 2 \pi r_C e$.

À l'intérieur du solénoïde, le champ est quasiment égal à $\vec{B}(A)$; les deux lignes de champ considérées sont distantes de l'axe de $r' = 1$ mm et $r'' = 2$ mm . La section du tube de champ vaut alors $\pi(r''^2 - r'^2)$ et $\Phi = B(A) \pi (r''^2 - r'^2)$.

Le flux se conservant, on en déduit :

$$B(C) \approx B(A) \frac{r''^2 - r'^2}{2r_C e} \approx \frac{1}{12} B(A), \text{ soit } B(C) \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

Point D : On considère le tube de champ engendré par la rotation de la ligne de champ passant par D .

Au niveau du point D , la section du tube de champ est approximativement un disque de rayon $r_1 \approx 8$ mm . D étant suffisamment proche de l'axe, on peut supposer le champ uniforme sur tout le disque.

À l'intérieur du solénoïde, la section du tube de champ est un disque de rayon $r' = 1$ mm .

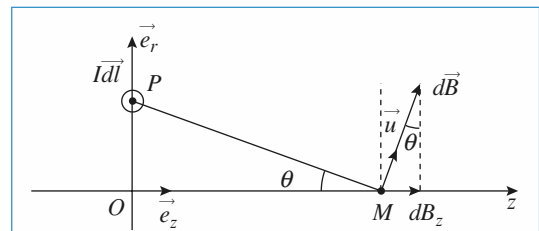
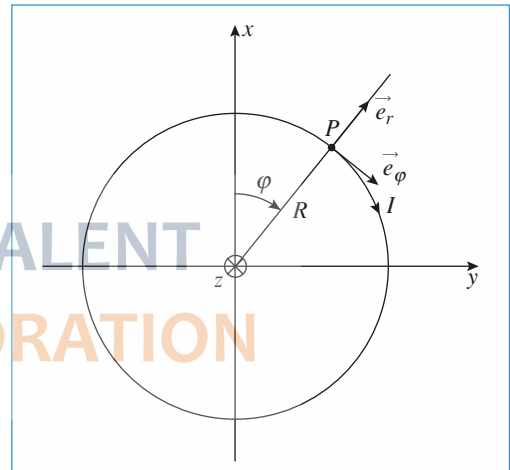
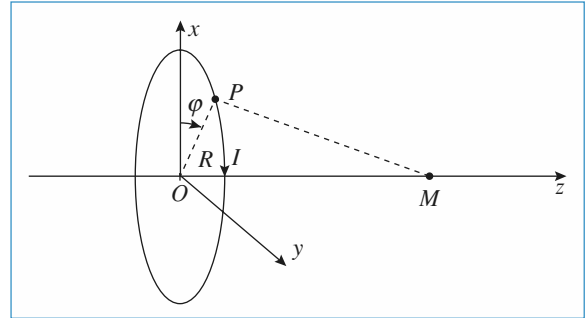
Le flux se conservant, $B(D) \approx B(A) \frac{r'^2}{r_1^2}$, soit :

$$B(D) \approx \frac{1}{64} B(A), \text{ d'où } B(D) \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ T.}$$

Conclusion : En comparant les valeurs de $B(A)$, $B(C)$ et $B(D)$, on constate que le champ s'atténue rapidement à l'extérieur du solénoïde.

12 Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe

1 • Soit une spire de rayon R , d'axe Oz , de centre O parcourue par un courant d'intensité I .



Tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie des courants donc \vec{B} appartient à ces plans, donc à leur intersection, soit : $\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_z$.

Calculons $\vec{B}(M)$ en utilisant la loi de Biot et Savart :

Soit un élément de courant $I d\vec{\ell}$ en P (avec $d\vec{\ell} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$) :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{PM}}{PM^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{PM^2} \vec{u}, \end{aligned}$$

dont la composante sur z est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{PM^2} \sin \theta$$

Sachant que $\frac{R}{IM} = \sin \theta$, on a $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4MR} \sin^3 \theta d\varphi$.

La contribution de tous les éléments de courant de la spire donne φ variant de 0 à $2M$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4MR} \sin^3 \theta 2M$$

$$\text{et } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta = B(0) \sin^3 \theta$$

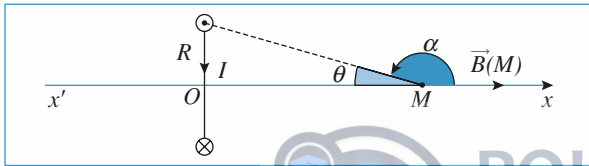
M sur l'axe

avec $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$, ce dernier résultat pouvant se retrouver

très rapidement.

2 • a) Le vecteur champ magnétique créé par une spire (de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_x.$$

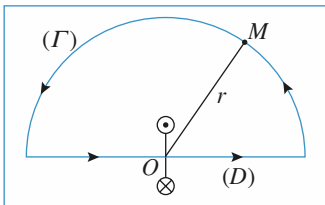


La circulation de \vec{B} sur $(x'Ox)$ est égale à $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$,

avec : $x = -\frac{R}{\tan \alpha}$; $dx = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ et $\sin \theta = \sin \alpha$.

$$\text{Soit : } C = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} R d\alpha = \mu_0 I.$$

b) Soit le contour fermé constitué de la droite (D) et du demi-cercle (Γ) de rayon r infini.



$$\int_{(D)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I ; \int_{(D)+(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I.$$

D'où $\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ce qui est normal, car pour r grand,

B varie en $\frac{1}{r^3}$, donc l'intégrale tend bien vers 0.

3 • Le solénoïde étant constitué de N spires, en utilisant le

résultat précédent, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}(x) dx = \mu_0 NI$.

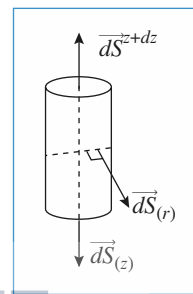
13 Champ au voisinage de l'axe d'une spire (classique)

1 • Il y a invariance de la distribution par rotation autour de Oz donc B ne dépend pas de θ : $\vec{B}(P) = \vec{B}(r, z)$.

Tout plan passant par O_2 (plan O, \vec{e}_z, \vec{e}_r) est plan d'antisymétrie de la distribution ; le champ \vec{B} appartenant à ce plan, n'a donc pas de composantes selon $\vec{e}_\theta = \vec{B}(P) =$

$$B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z.$$

2 •



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(z+dz) + \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(z) + \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(r) = 0$$

$$\approx B_z(0, z+dz)\pi r^2 - B_z(0, z)\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz.$$

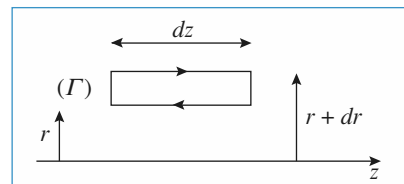
En effet comme r et dz sont petits et de même ordre de grandeur on peut considérer que B_z varie peu avec r sur $dS(z+dz)$ ou $dS(z)$ et approximer la valeur du champ sur ces deux surfaces à la valeur du champ sur l'axe, et que B_r varie peu avec z sur $dS(r)$.

$$\text{Donc } 0 = \pi r^2 \frac{dB_z}{dz} dz + B_r(r, z) 2\pi r dz$$

$$\text{D'où } B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}(0, z) = -\frac{r}{2} \frac{df(z)}{dz} I.$$

3 • Au 2^e ordre en r : $B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta(z)r^2 I$.

Pour faire intervenir la composante axiale $B_z(r, z)$ à la distance r de l'axe, appliquons le théorème d'Ampère au contour (Γ) suivant :



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z(r+dr, z)dz - B_r(r, z+dz)dr - B_z(r, z)dz + B_r(r, z)dr = 0,$$

car il n'y a aucun courant enlacé.

Ce qui donne :

$$\frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) dr dz - \frac{\partial B_r}{\partial z} dr dz = 0$$

soit $\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}$, et ainsi :

$$2\beta(z)r I = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_z(0, z)}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} I$$

soit : $\beta(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dz^2}$

ou $B_z(r, z) = B_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2}{dz^2} B_z(0, z)$.

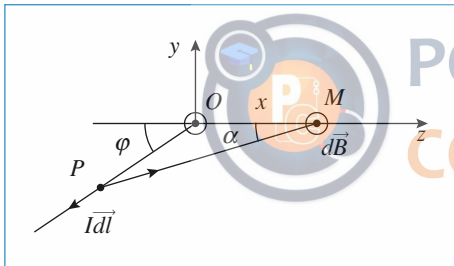
4 • Ainsi avec $M(0, 0, z)$ et $P(r, \theta, z)$:

avec $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z = B(z)\vec{e}_z$

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(M) - \frac{r}{2} \frac{d}{dz} B(z)\vec{e}_z - \frac{r^2}{4} \frac{d^2}{dz^2} B(z)\vec{e}_z$$

14 Courant angulaire

Calculer tout d'abord le champ créé par un seul demi-fil infini au point M .



L'élément $I d\vec{\ell}$ centré au point P créé un champ

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$$

La relation des sinus dans le triangle OPM nous donne :

$$\frac{PM}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{PM}{\sin \varphi} = \frac{OM}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{OP}{\sin \alpha}$$

$$PM = \frac{OM \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} \text{ et } OP = \frac{OM \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} ; OM = x$$

On en déduit

$$PM^2 = \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha)} \text{ et } dOP = d\ell = x \frac{\sin \varphi d\alpha}{\sin^2(\varphi - \alpha)}$$

Par ailleurs $d\vec{\ell} \wedge \vec{e}_{PM} = \sin(\varphi - \alpha) d\ell \vec{e}_z$ d'où

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha) d\alpha \vec{e}_z}{x \sin \varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d[\cos(\varphi - \alpha)] \vec{e}_z}{\sin \varphi}$$

Pour tout le fil il faut faire varier α de 0 à φ . Il vient

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} x \tan \frac{\varphi}{2} \vec{e}_z$$

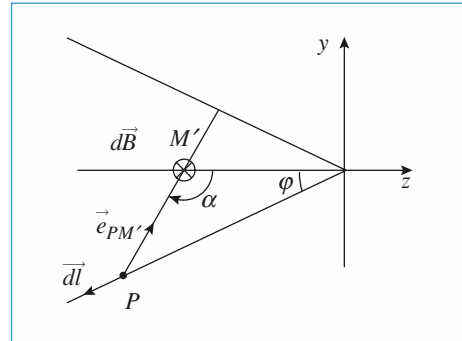
Pour trouver le champ créé par l'autre fil, il suffit de considérer le plan xOz qui est un plan d'antisymétrie de la distribu-

tion de courant. L'autre fil créé donne en M un champ égal à l'opposé du symétrique de \vec{B}_1 : soit $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$. Le champ total vaut donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tan \frac{\varphi}{2} \vec{e}_z$$

Dans le cas du point M' , un calcul rigoureusement analogue nous mène à

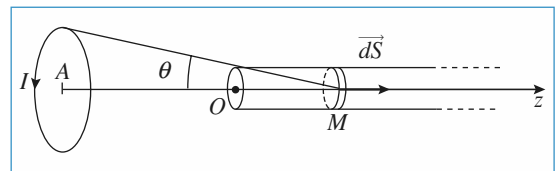
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \vec{e}_z$$



Remarque

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le champ magnétique \vec{B} créé par un fil rectiligne infini.

15 Flux du champ d'une spire à travers un solénoïde



Prenons l'origine de l'axe des z à l'extrémité gauche du solénoïde. Considérons le flux envoyé par la grande spire à travers les spires comprises entre la cote z et la cote $z + dz$ du solénoïde (voir figure).

Il y a $n dz$ spires qui sont traversées par le champ

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z \text{ qui y crée donc un flux}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2R} \sin^3 \theta \times n dz$$

Posons $OA = d > 0$; l'angle θ est défini par

$$\tan \theta = \frac{R}{z + d}, \text{ soit encore } z = \frac{R}{\tan \theta} - d$$

liant dz et $d\theta$ est donc : $dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$, ce qui donne

$$d\Phi = -\frac{\mu_0 I}{2} \pi r^2 n \sin \theta d\theta.$$

Quand z varie de 0 à l'infini, θ varie de α à 0, ce qui donne :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \pi}{2} r^2 n \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n I \pi}{2} r^2 (1 - \cos \alpha)$$

16 Champ magnétique créé par l'électron de l'atome d'H

1 • Le principe fondamental appliqué à l'électron donne

$$m\vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Pour un mouvement circulaire de rayon r

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

$$\text{donc } \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 mr}$$

$$\Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi \epsilon_0 mr}}$$

$$\text{A.N. } v = 310^{4,5} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{9 \cdot 10^{-31} \times 53 \cdot 10^{-12}}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

grandeur très inférieure à c , heureusement ! sinon le calcul classique ainsi fait était impossible.

2 • En un tour une quantité de charge égale à celle de l'électron a parcouru un cercle de rayon r : l'électron en mouvement se comporte comme une boucle parcourue par un courant d'intensité $i = \frac{e}{T}$, T étant la période de révolution

$$\text{égale à } \frac{2\pi r}{v} \text{ d'où } i = \frac{ev}{2\pi r}.$$

Le courant crée au niveau du proton un champ

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. : } B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^2} = 10^{-7} \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,2 \cdot 10^6}{53^2 \cdot 10^{-24}} \\ &= \frac{1,6 \times 2,2}{53^2} 10^{-7+6+24-19} = 12,53 \text{ T} \end{aligned}$$

Ce champ est très intense.

- Le champ magnétique terrestre est inférieur à 10^{-4} T.
- Le champ B maximum dans la matière est de l'ordre de 1 T.



POLYVALENT
CORPORATION

1

ANCIENS SUJET DE
MATHEMATIQUE
CONCOURS EAMAC



POLYVALENT
CORPORATION

S-MI-1

Concours EAMAC 2019	Cycle INGENIEUR	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
------------------------	-----------------	-------------------------------

Durée : 04h

S-MI-1.1 (5 points) :

Soit \star la loi de composition sur \mathbb{R} définie par $x \star y = x + y - xy$.

1. Montrer que la loi \star est commutative et associative.
2. Montrer que la loi \star admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour inverse $x/(x-1)$.
4. L'ensemble (\mathbb{R}, \star, e) est-il un groupe ?
5. L'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \star, e)$ est-il un groupe ?

S-MI-1.2 (5 pts) :

Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par : $f(x, y, z) = (x, -3y+4z, -2y+3z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de \mathbb{R}^3 .
3. En déduire que f est bijective.
4. Calculer $f \circ f$.
5. En déduire l'expression de f^{-1} .

S-MI-1.3 (5 pts)

Etudier la convergence et calculer la somme des séries dont les termes généraux sont définis par :

$$1) u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n \geq 1)$$

$$2) v_n = \frac{n+4}{n(n^2-4)} \quad (n \geq 3)$$

$$3) w_n = \frac{n^3}{n!} \quad (n \geq 1)$$

S-MI-1.4 (5 pts)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

où k est un réel.

- 1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.
- 2) Pour $k=2$, calculer l'exponentielle de la matrice A et A^n où $n \geq 1$ est un entier naturel.



S-MI-1

Concours EAMAC 2018	Cycle INGENIEUR	MATHEMATIQUES
------------------------	-----------------	---------------

Exercice S-MI1.1 (5 points):

Soit (p, q) appartenant à \mathbb{C}^2 . On note x_1, x_2, x_3 les zéros de X^3+pX+q dans \mathbb{C} de sorte que

$$X^3+pX+q = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$$

On note : $\sigma_1 = x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

On note, pour tout k appartenant à \mathbb{N} : $S_k = x_1^k+x_2^k+x_3^k$

- 1) Montrer que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = -q$.
- 2) a) Calculer S_0, S_1, S_2 en fonction de p et q .
b) Etablir que, pour tout k appartenant à \mathbb{N} , $S_{k+3} + pS_{k+1}+qS_k = 0$
c) En déduire S_3 et S_4 en fonction de p et q .
- 3) Calculer $A = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2$ en fonction de p et q .

Exercice S-MI1.2 (5 points):

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à $M_2(\mathbb{R})$,

$\phi : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, définie par $\phi(M) = AMB$.

- a. Vérifier que ϕ est linéaire.
- b. Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1} .
- c. Montrer que $B = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$, déterminer les matrices de ϕ et ϕ^{-1} dans B .

Exercice S-MI1.3 (5 points) :

Soit a un nombre réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

1. Montrer que si $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Que peut-on dire de l'hypothèse $\lim_{-\infty} f'(x) = -\infty$?

On suppose à présent que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x)$ est strictement positif.

3. Soit $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que :

$$\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \text{et que} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{diverge.}$$

Montrer que $\lim_{+\infty} \frac{\int_a^{+\infty} g(x) dx}{\int_a^{+\infty} f(x) dx} = 0$.

Exercice S-MI1.4 (5 points) :

Soit α un nombre réel qui n'est pas entier et soit f une fonction de 2π -périodique, définie sur \mathbb{R} , et telle que

$$f(t) = \sin \alpha t \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction f . La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
2. On considère à présent la fonction g , 2π -périodique, définie sur \mathbb{R} et telle que

$$g(t) = \cos \alpha t \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction g . La fonction g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

3. A partir des séries de Fourier de f et de g , expliciter la série de Fourier complexe de la fonction h , 2π -période, définie sur \mathbb{R} , par

$$h(t) = e^{i\alpha t} \quad \text{pour} \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

4. En déduire l'égalité : $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$.

S-MI2

Concours EAMAC 2016	Cycle INGENIEUR	Epreuve de MATHÉMATIQUES
---------------------	-----------------	-----------------------------

Exercice S-MI2-1: (6 points)

Soit k appartenant à \mathbb{R} et $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ appartenant à $M_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles A_k est inversible.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire que A_k est diagonalisable.
3. Quel est le polynôme minimal de A_k ?
4. Montrer pour tout entier naturel non nul n , on a $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.

Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_k^n en fonction de n .



POLYVALENT
CORPORATION

Exercice S-MI2-2: (4 points)

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2. Calculer I_n

3. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$

EXERCICE S- MI2-3 (5 points)

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt; \quad J(n) = \int_0^{\pi} (\sin t)^n dt; \quad K(n) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$J(n) = K(n) = 2I(n)$$

2. Calculer $I(0)$, $I(1)$ et $I(2)$

3. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n+2)$ et $I(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. Montrer que la suite des intégrales $(I(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante à termes positifs.



**POLYVALENT
CORPORATION**

Exercice S-MI2-4 : (5 points)

On définit pour n entier naturel non nul le polynôme à coefficients réels P_n par :

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!} + \dots + \frac{X(X+1)(X+2)\dots(X+n-1)}{n!}$$

1) Déterminer explicitement les polynômes P_1, P_2, P_3 .

2) Montrer que P_n est un polynôme de degré n .

3) Soit λ_n le coefficient dominant de P_n . Démontrer que $\lambda_n = \frac{1}{n!}$.

4) Démontrer la formule $\sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j = 0$

En déduire que pour tout entier k , tel que $1 \leq k \leq n$, on a $P_n(-k) = 0$

5) Factoriser P_n

Exercice 1

1. (a) Montrer que l'ensemble \mathbb{R}^4 muni de l'addition et la multiplication externe est un espace vectoriel réel.
 (b) Désigner au moins deux sous-espaces vectoriel de \mathbb{R}^4
2. L'ensemble des nombres complexes est-il un espace vectoriel réel ? si oui, quels sont les vecteurs de base ?

Exercice 2

1. on donne le système
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

- (a) étudier la compatibilité de ce système
- (b) le résoudre au cas où il est compatible

2. utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Exercice 3

1. a) Vérifier que les fonctions $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \arctan x$ admettant les mêmes dérivées sur l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
 b) Etablir la relation qui existe entre ces fonctions.

2. calculer les limites suivantes :

(a) : $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

(b) : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x}$

(c) : $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\ln x}$

Exercice 4

1) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$

(b) $\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx$

(c) $\int (\tan x + \cot gx)^2 dx$

(d) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

2) Calculer la longueur de l'arc de la courbe $y^2 = x^3$ compris entre $x = 0$ et $x = 1$; $y \geq 0$.

Exercice 1 : 5 points

Soit f une fonction définie sur \mathfrak{R} Soit $x_0 \in \mathfrak{R}$.

- 1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f .
- 2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur \mathfrak{R} . Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de x_0

Exercice 2 : 3 points

Soit $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 3 : 5 points

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k . Montrer que

$$I_n = I_n - A + A - A^2 + A^2 - \dots + A^{k-1} - A^{k-1} + A^{k-1}$$

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $A^3 = 0$. Calculer l'inverse

de la matrice $B = I_3 - A$.

Exercice 4 : 7 points

Soit A et B des parties d'un ensemble E . Montrer que :

- 1 - $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.
- 2 - $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 3 - $A \Delta B = B \Delta A$.
- 4 - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- 5 - $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- 6 - $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$

Exercice 1 (6 points)

Soient A, B deux sous-ensembles de E , f une application définie par

$$f: P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Démontrer que f est injective ssi $A \cup B = E$
2. Démontrer que f est surjective ssi $A \cap B = \emptyset$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2 (6 points)

Soit A un anneau commutatif. On appelle radical de l'idéal propre I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal
2. Que se passe-t-il si $I = 0$?
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \cap \sqrt{I} = \sqrt{I}$
4. Quel est le radical d'un idéal premier \mathcal{J} ?
5. Déterminer complètement le radical d'un idéal $\mathcal{J} = \sqrt{m}$ de Z où $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$
6. Déterminer $I + J, I \cap J, \sqrt{I + J}$ pour :
 - (a) $I = 8Z, J = 12Z$ dans Z
 - (b) $I = (X - 1), J = (X)$ dans $Z[X]$

Exercice 3 (4 points)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie par

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur \mathbb{R}
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$
3. la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$

Exercice 4 (4 points)

Etudier la série de terme général u_n lorsque :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$



POLYVALENT
CORPORATION

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2013
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES**

Exercice 1 (5 pts)

1. Montrer que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors $\exists \theta \in]a, b[$ tel que: $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

2. Soit $f \in C[a, b]$, $a > 0$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in]a, b[$ tel que:

$$\int_a^b f(x) dx = \theta f(\theta).$$

Exercice 2 (4 pts)

Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(n+2)} x^{n+1}$.

Exercice 3 (5 pts)

Déterminer l'extremum de la fonction f définie par: $f(x, y, z) = 2x^3 yz - x^2 - y^2 - z^2$

Exercice 4 (6 pts)

1) Exprimer $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ et $\frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$ en fonction de $\cos \alpha$.

2) Dans $M_n(\mathbb{R})$, on considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

- 4) et on désigne par $P_n(\lambda)$ son polynôme caractéristique. Déterminer une relation de récurrence liant P_n, P_{n-1}, P_{n-2} (pour $n \geq 4$)
- 5) On pose $\lambda = a + 2b \cos \alpha$. Calculer directement $P_2(\lambda)$ et $P_3(\lambda)$ en fonction de α . En déduire $P_n(\lambda)$ en fonction de α .
- 6) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A .
 Montrer que le vecteur propre V_k associé à λ_k a pour composantes $(\sin \omega, \sin 2\omega, \dots, \sin n\omega)$ en précisant la valeur de ω .



POLYVALENT
CORPORATION

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE DE CONTROLEUR DE LA
 CIRCULATION AERIEENNE DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA
 METEOROLOGIE ET
 DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
 SESSION 2013
 EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
 DUREE : 4 HEURES**

Exercice 1 (5pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2m+1 & 3 & m+2 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le déterminant et le rang de A .
- Discuter et résoudre le système suivant:
$$\begin{cases} mx + y + z = m + 2 \\ x + my + z = 4 - m \\ (2m + 1)x + 3y + (m + 2)z = 2m + 7. \end{cases}$$

Exercice 2 (4pts)

Soit $f \in C([0, +\infty[)$, $a_n = \int_0^1 f(n+x) dx$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

Exercice 3 (5pts)

- Etudier la dérivabilité au point $x_0 = 0$ de la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

- Déterminer le réel b pour que la fonction g définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in]0, 1], \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

soit continue sur $[0, 1]$.

Exercice 4 (6pts)

Calculer la limite suivante: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{ctg} x + 2x - \frac{\pi}{2}}{(1 - \tan x)^3}$.

CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAC

SESSION DE MAI 2013

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LE CYCLE INGÉNIEUR

DURÉE: 4 HEURES

EXERCICE 1: (6 points)

On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: $Q(x)$ admet une racine réelle. (2 points)

B: $Q(x)$ admet deux racines réelles distinctes. (2 points)

C: $Q(x)$ admet aucune racine réelle. (2 points)

EXERCICE 2: (5 points)

Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$

converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

EXERCICE 3: (5 points)

1°) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ (1 point).

2°) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$$

Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, +\infty[$ (1 point)

3°) Montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

(1 point)

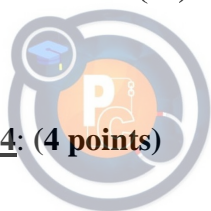
4°) Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt \quad (1 \text{ point})$$

5°) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On admettra que : $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. (1 point)



POLYVALENT
CORPORATION

EXERCICE 4: (4 points)

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\text{Log} n}$.

1°) Montrer que la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ (1 point)

2°) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$ (1 point)

3°) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (1 point)

4°) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. (1 point)

Exercice 1 Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \frac{\text{Arctan}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{cases} .$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et est paire.
2. Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.
3. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,
$$\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)} dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t).$$
5. En déduire le sens de variation de f .



Exercice 2 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. a. f est constante ;
b. f n'est pas constante ;
c. f s'annule ;
d. f est périodique.

Exercice 3 Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que : $\forall x \in A, x^2 = x$.

1. Montrer que $\forall x \in A, x + x = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Montrer que $\forall x, y \in A, xy(x + y) = 0$.

Exercice 4 Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A .



**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE
(EAMAC)**

SESSION 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Exercice 1 (4pts)

1. Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions $\cos^3 x$ et $\cos^4 x$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. En déduire les valeurs des intégrales suivantes: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 x dx$.

Exercice 2 (6pts)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivante: Soit f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$.

2. On pose $\mathcal{A} = \{f \in C^2[0, 1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

a) Déterminer

$$\min_{f \in \mathcal{A}} \int_0^1 (f''(x))^2 dx$$

- b) Déterminer la fonction f pour la quelle ce minimum est atteint.

Exercice 3 (5pts)

On considère la matrice: $A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

2. Calculer les nombres u_n, v_n, w_n définis pour $n \geq 1$ par: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$

avec u_0, v_0, w_0 donnés.

Exercice 4 (5pts)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction densité:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2}, & \text{si } x \in]-a, a[, \quad a > 0 \\ 0, & \text{si } x \notin]-a, a[. \end{cases}$$

1. Déterminer l'espérance mathématique et la dispersion de la v.a. X
2. Déterminer la fonction de répartition de X .

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE DE CONTROLEUR DE LA
CIRCULATION AERIENNE DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA
METEOROLOGIE ET
DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2012
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES**

Exercice 1 (4pts)

Soit la suite (u_n) définie par: $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n(2 - 9u_n)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) est-elle convergente? Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, suivant les valeurs de a .

Exercice 2 (6pts)

Calculer les intégrales suivantes:

1. $I = \int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$

2. $J = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx.$

Exercice 3 (4pts)

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par: $f(x, y) = (5x - 4y, x)$.

1° Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.

2° Quelle est la matrice B de f dans la base $\{(1, 1), (4, 1)\}$.

3° En utilisant la matrice de changement de bases, calculer A^n ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4 (6pts)

1. Calculer le développement limité au voisinage de $t = 0$ et à l'ordre 3 de la fonction

$$g(t) = \arctan(1 + t).$$

2. On pose $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\frac{\pi}{4} - \arctan x}$. Déterminer l .

3. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\frac{\pi}{4} - \arctan x}, & \text{si } x \neq 1 \\ l, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Donner l'allure de la courbe d'équation $y = f(x)$ au voisinage de $x = 1$ (tangente, position de la courbe par rapport à la tangente).

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES D'INGENIEUR ET DE
 CONTROLEUR DE LA CIRCULATION AERIENNE DE L'ECOLE
 AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET
 DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
 SESSION 2011**

**EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
 DUREE : 4 HEURES**

*⇒ Ingénieur
 Contrôleur*

Exercice 1

Calculer la valeur moyenne de la fonction:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

Etudier la convergence de l'intégrale suivante; et lorsqu'elle converge, calculer sa valeur:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx, \beta \geq 0.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$xy' - y^2 + (2x + 1)y = x^2 + 2x, \text{ avec } \int_1^2 (x - y)^2 dx = 1.$$

Exercice 4

On considère la série entière:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients constants.

2. Résoudre l'équation différentielle obtenue.

3. En déduire la somme S de la série: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)!}$.

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE
(EAMAC)
SESSION 2010
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES**

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dy}{dx} x^3 \sin y + 2y = x \frac{dy}{dx}$$

Exercice 2

Dans \mathbb{R}^4 rapporté à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère la forme bilinéaire f définie par:

$$f(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4.$$

Soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' .

1. Déterminer la matrice de f par rapport à \mathcal{B}' .
2. Cette matrice est-elle diagonalisable? Calculer ses puissances $n^{\text{ième}}$.

Exercice 3

Soit la série de fonctions f définie par:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa dérivabilité.

Exercice 4

Soit C le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. Calculer de deux manières différentes l'intégrale curviligne suivante:

$$\int_C xy^2 dy - x^2 dx.$$

1/2

Exercice 5

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer que

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

où $0 < r < R$, $f(z) = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est la somme de la série.

2. On suppose que $R = 1$ et que $\operatorname{Re} f(z) > 0 \forall z \in D$, où D est le disque de convergence de $\sum a_n z^n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 2u_0$, où $u_0 = \operatorname{Re} f(0)$.



POLYVALENT
CORPORATION

2/2

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE
AFRICAINNE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE
(EAMAC)**

SESSION 2009

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Exercice 1

Calculer du , dv , d^2u et d^2v pour $x = y = 1$, $u = 0$ et $v = \frac{\pi}{4}$, si $e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ et $e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . On pose $F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta$, $h > 0$.

Calculer $F''(x)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation: $\int_0^x (x-t) t^2 \sqrt[3]{y(t)} dt + \frac{1}{2} \int_0^x (5x-6t) y(t) dt + 2x = 0$.

Exercice 4

Soit M une matrice carrée d'ordre 6 à coefficients dans \mathbb{R} définie par:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice carrée X d'ordre 3 à coefficients réels telle que

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} M$$

soit une matrice triangulaire par blocs, I étant la matrice identité d'ordre 3.

En déduire $\det M$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de fonction caractéristique $E(u) = \frac{1-iu}{1+u^2}$.

1. Déterminer la densité de la variable aléatoire X .
2. Déterminer les différents moments de X .

1/1

Exercice 1

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{\pi} e^{2i\varphi} \operatorname{ctg}(\varphi - ia) d\varphi, \quad a > 0.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+i)\sqrt{x}}$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{x^2(x^2+1)}$$

Exercice 4

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_{\gamma} z \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right) dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 2\}$$

Exercice 5

Calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

deux 02,

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR
DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE
ET DE L'AVIATION CIVILE
SESSION 2006
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 H**

Exercice 1

Calculer l'intégrale triple $I = \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - 2x \leq 0, z \geq 0\}$.

Exercice 2

En utilisant la méthode des résidus calculer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + i\alpha) dx, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

α étant un nombre réel donné, t et x des variables réelles.

1° Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie par :

$$f(t) = \cos \alpha t \quad \text{si} \quad -\pi < t < \pi.$$

Expliquer pourquoi la somme de la série est égale à $f(t)$ si $-\pi < t < \pi$ et déterminer la valeur de cette somme pour $t = \pi$. Dédurre du résultat précédent que :

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

2° Montrer que si $|x| \leq M$ et si $N > \frac{M}{\pi}$, la fonction :

$$x \rightarrow \sum_N^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}$$

est une fonction continue. Calculer : $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

3° Montrer que si $0 < x < \pi$: $\ln \sin x = \ln x + \sum_1^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

4° Montrer que si x n'est pas un multiple entier de π :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - k\pi)^2}.$$

1

ANCIENS SUJETS DE
PHYSIQUE CONCOURS
EAMAC



POLYVALENT
CORPORATION

S-PI-1

Concours EAMAC 2019	Cycle INGENIEUR	EPREUVE DE : PHYSIQUE
------------------------	-----------------	--------------------------

Durée : 04h

S-PI-1.1 (5 points)

Soit un mobile M se déplaçant sur une branche d'hyperbole dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

M est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + \frac{a}{x(t)}\vec{j}$, avec a constante positive et $x(t) = at$.

1- Déterminer les vecteurs unitaires de **Serret-Frenet** en fonction des vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} **(2,5 pt)**

2- Calculer le rayon de courbure $\rho(t)$ et le centre de courbure C. **(2 pt)**

3- Tracer l'hodographe **(0,5 pt)**

S-PI-1.2 (5 pts)

Une transformation polytropique est une transformation quasi statique vérifiant PV^k constante.

1. Calculer le travail des forces de pression pour un gaz parfait subissant une transformation polytropique entre (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et volumes ainsi que de k. **(1 pt)**

2. On note $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ qui est une constante pour un gaz parfait. Trouver une expression de la quantité de chaleur échangée au cours de la transformation précédente de la forme $C(T_1 - T_0)$ où C est une constante à déterminer. **(1,5 pt)**

3. Donner une interprétation physique de C. **(0,5 pt)**

4. Etudier en les interprétant physiquement les cas suivants : $k = \gamma, k = 0, k \rightarrow +\infty$, et $k = 1$. **(2 pt)**

S-PI-1.3 : (5 pts)

Pour dévier le faisceau d'électrons d'un tube cathodique, on utilise deux bobines circulaires plates de rayons R disposées suivant la figure ci-dessous (figure 2 et 3). En supposant que l'induction B créée par les bobines est uniforme dans le carré qui a pour côté le diamètre des bobines et que sa valeur est celle qui existe au point O (sur l'axe Ox).

1- Déterminer la trajectoire décrite par l'électron (1pt)

2- Déterminer l'angle au centre qui intercepte l'arc décrit (2pts)

- 3- Déterminer la distance PP' (figure1) qui sépare le point P du point P' où l'électron sort de la zone d'action de l'induction B (1pt)
- 4- Le déplacement subi par le point d'impact des électrons sur l'écran lorsque le courant I parcourt les bobines. (1pt)

La distance de l'écran au point P est de 0,2m

On donne : Distances des centres des bobines à l'axe du tube $d = R = 5\text{cm}$

Vitesses constantes des électrons $v = 1000\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

Nombre de spires des bobines $N = 400$

Courant dans les bobines $I = 5\text{mA}$

Charge de l'électron $e = 1,6\cdot 10^{-19}\text{C}$

Masse de l'électron $m = 0,9\cdot 10^{-30}\text{kg}$

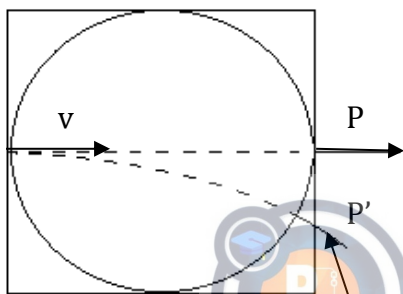


figure 1

Trajectoire de l'électron

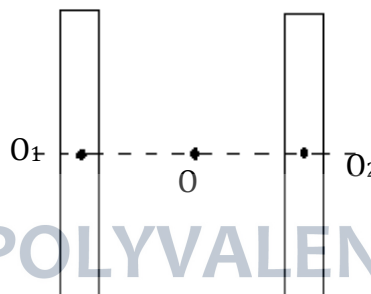


figure 2

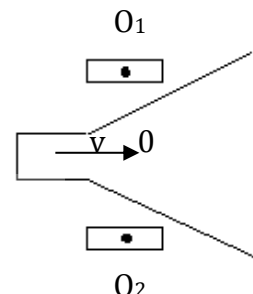


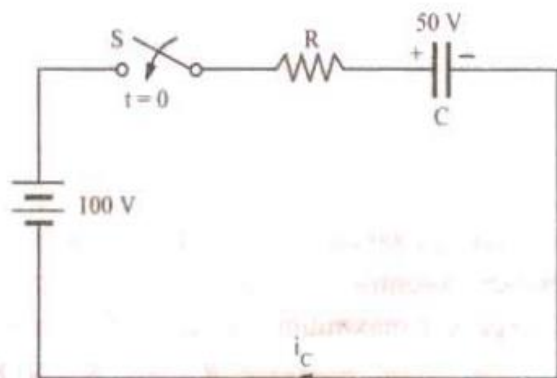
figure 3

S-PI-1.4 : (5 points)

Dans un circuit RC représenté par la figure suivante ; $R = 2\text{M}\Omega$ et $C = 5\mu\text{F}$

Le condensateur est initialement chargé et possède une tension de 50V entre ces bornes.

Si on ferme l'interrupteur S à l'instant $t=0$, calculer :



- 1- La constante de temps pour la charge de condensateur.
- 2- La tension aux bornes du condensateur après un laps de temps $t = 5\lambda$.
- 3- La tension aux bornes de C si on change la polarité du condensateur.
- 4- Les temps de charge pour que $V_c = -10\text{V}$, $V_c = 0\text{V}$ et $V_c = 95\text{V}$.

S-PI-3

Concours EAMAC 2018	Cycle INGENIEUR	PHYSIQUE
------------------------	-----------------	----------

Exercice S-PI3.1 (5 points)

Dans le plan (Oxy), le mouvement d'un point P est déterminé par les équations paramétriques:
 $x = v_0 t \cos(\alpha)$, $y = v_0 t \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$ où v_0 est la vitesse initiale de P et α est l'angle que fait v_0 avec l'axe Ox.

- 1- Quelle est la nature de la trajectoire ? **(1 pt)**
- 2- Déterminer : **(3,5 pt)**
 - a) Les accélérations normales et tangentielles.
 - b) Le rayon de courbure $\rho(t)$ ainsi que le centre de courbure C(t)
 - c) Les expressions des vecteurs unitaires de **Serret-Frenet**.
- 3- Trouver l'angle entre les vecteurs vitesses et accélérations au point où la trajectoire recoupe l'axe Ox. **(0,5 pt)**

Exercice S-PI3.2 (5 points)

Une mole de gaz parfait ($\gamma = 1,4$) subit la succession de transformations suivantes :

- détente isotherme de $P_A = 2 \text{ bar}$ et $T_A = 300 \text{ K}$ jusqu'à $P_B = 1 \text{ bar}$, en restant en contact avec un thermostat à $T_T = 300 \text{ K}$;
- évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5 \text{ L}$ toujours en restant en contact avec le thermostat à T_T ;
- compression adiabatique réversible jusqu'à l'état A.

1. Calculer V_B et représenter ce cycle en diagramme (P, V). S'agit-il d'un cycle moteur ou récepteur ? **(1 pt)**
2.
 - a) Déterminer la variation d'entropie ΔS_{AB} du gaz entre A et B. **(0,5 pt)**
 - b) Déterminer l'entropie $S_{\text{éch}}$ échangée avec le thermostat. **(0,75 pt)**
 - c) En déduire l'entropie créée $S_{\text{créée}}$. Conclure **(1,25 pt)**
3. Calculer la température en C, le travail W_{BC} et la quantité de chaleur Q_{BC} reçus par le gaz au cours de la transformation BC. Calculer l'entropie échangée avec le thermostat ainsi que la variation d'entropie du gaz entre B et C. **(0,75 pt)**

4. Calculer la valeur numérique de l'entropie créée au cours du cycle. Le cycle proposé est-il réalisable ? (0,75 pt)

EXERCICE S-PI3.3 :

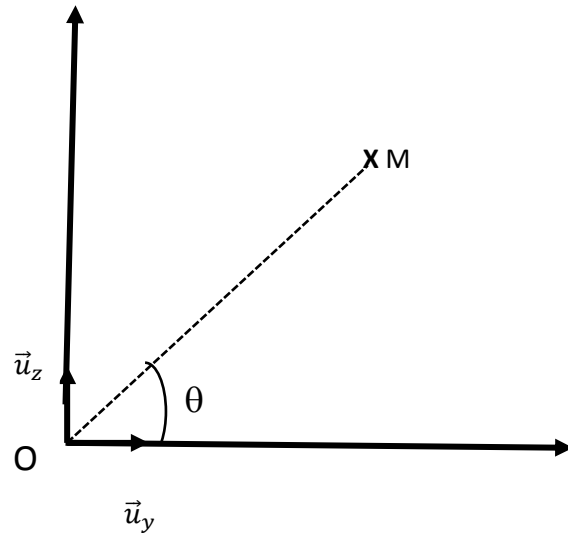
On considère une onde électromagnétique plane, progressive, sinusoidale et monochromatique de pulsation ω , se propageant dans le vide de perméabilité magnétique μ_0 . L'espace est rapporté à un repère cartésien Oxyz de base orthonormée. L'onde se propage dans le plan yOz le long d'un axe faisant un angle θ avec la direction Oy. Le vecteur champ électrique a comme expression :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \vec{u}_x$$

1. Ecrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes k_y et k_z du vecteur d'onde \vec{k} au point M de coordonnées (x,y,z) tel que $\vec{r} = \vec{OM}$ et à l'instant t en fonction de son module k et de θ . (1pt)
2. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide. (1pt)
3. Écrire dans la base orthonormée Oxyz les composantes du vecteur champ électrique \vec{E} au point M à l'instant t . En déduire, à l'aide des équations de Maxwell dans le vide, les composantes du vecteur champ magnétique de l'onde \vec{B} au point M . (1pt)
4. Représenter les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} . (1pt)
5. Déterminer en notation réelle les composantes du vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

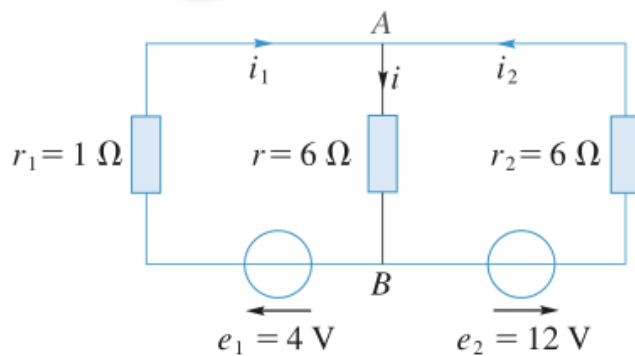
associé à l'onde électromagnétique en fonction de E_0 , μ_0 , \vec{k} et ω .



Exercice S-PI3.4 (5pts)

Déterminer le courant i en utilisant deux des trois lois ci-dessous :

- les lois de Kirchhoff ;
- en remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.



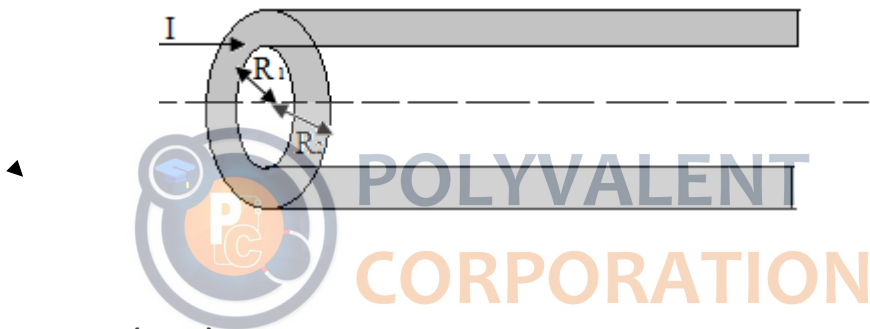
S-PI4

Concours EAMAC 2016	Cycle INGENIEUR	Epreuve de PHYSIQUE
---------------------	-----------------	---------------------

Exercice S-PI4-1 (5pts)

Un conducteur cylindrique creux, de rayons R_1 et R_2 de la figure ci-dessous est parcouru par un courant I tel que le vecteur densité de courant \vec{j} soit uniforme sur toute sa section et soit parallèle à l'axe du cylindre.

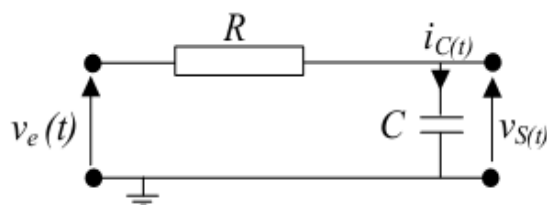
- 1- Donner la relation entre j et I .
- 2- Préciser l'orientation du vecteur $\vec{B}(M)$ en un point M de l'espace, qu'il soit extérieur ou intérieur au cylindre.
- 3- En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique en tout point M de l'espace.



Exercice S-PI4-2 (6 pts)

Les circuits passifs qui utilisent des condensateurs et des inductances, lorsqu'ils sont destinés à des signaux (tensions) alternatifs, présentent des caractéristiques qui dépendent de la fréquence des signaux d'entrée. En cela, ils forment naturellement des « filtres » qui atténuent ou pas, ou « coupent » ou pas, certaines plages de fréquence. Ils ont ainsi un rôle de discrimination en fonction de la fréquence, ce qui correspond bien à une sorte de filtrage. Cette fonction est très importante en électronique et donc assez présente dans les sujets de problèmes.

Pour comprendre la notion de « filtre » prenons comme exemple simple un « filtre passe bas passif » représenté sur la figure ci-après :



- 1) Quelle équation relie la tension $v_s(t)$ et le courant $i_c(t)$?
- 2) Si on suppose que $v_s = V_{\text{max}} \cdot \cos(\omega t)$ quelle sera l'expression littérale de i_c ?
- 3) Que représente la valeur ω ? Par quoi est-elle fixée?
- 4) A quoi est équivalent le circuit si ω est très petit, c'est à dire dans un domaine de « basses fréquences » ?
- 5) A quoi est équivalent le circuit si ω est très grand, c'est à dire dans un domaine de « hautes fréquences »? Justifier alors l'appellation « passe bas ».
- 6) Montrer que l'équation de maille de ce circuit revient à :

$$v_e = RC \cdot \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t).$$

Remplacer alors v_s par sa forme sinusoïdale $v_s = V_{\text{max}} \cdot \cos(\omega t)$.

- 7) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \gg 1/RC$?
- 8) A quoi est équivalente l'équation ainsi formée si $\omega \ll 1/RC$?

Exercice S-PI4-3 (5pts)

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement (OPR) de pulsation ω se propage dans le vide dans la direction de l'axe Oz.

- 1- Déterminer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point de l'espace.
- 2- La valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Exercice S-PI4-4 (5pts)

Soit un point matériel repéré par ces coordonnées cylindriques ρ, φ , et z telles que :

$$\rho = at^2, z = at, \varphi = \omega t, \text{ où } a \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

- 1-Calculer les composantes cylindriques du vecteur vitesse.
- 2- En déduire les composantes cylindriques du vecteur accélération.
- 3- Calculer les modules des vecteurs \vec{V} et $\vec{\gamma}$.

EXERCICE I : Electromagnétisme (5 pts)

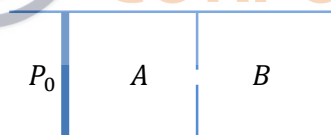
Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans l'air qu'on assimilera au vide. Le champ magnétique \vec{B} est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$:

$$B_x = 0, B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), B_z = 0.$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique \vec{E} en fonction de B_0 . (3 pts)
2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. (1 pt)
3. Quelle est la puissance moyenne $\langle P \rangle$ rayonnée à travers une surface (S) perpendiculaire à la direction de propagation. (1 pt)

EXERCICE II : Thermodynamique (Détente irréversible d'un gaz parfait) (5 pts)

Soit le dispositif de la figure ci-contre. Les parois et le piston sont adiabatiques. La paroi interne est fixe et diatherme (elle permet les échanges thermique). Elle est percée d'un trou et fermée par une fenêtre amovible.



La pression extérieure est $P_0 = 1 \text{ bar}$. Initialement le volume A est rempli d'un gaz parfait ($P_0 = 1 \text{ bar}, T_0 = 300 \text{ K}, n = 1 \text{ mol}$) et le volume B est vide.

Le rapport des capacités thermiques du gaz γ vaut 1,4.

1. On ouvre la fenêtre. Décrire qualitativement ce qui se passe suivant la taille de l'enceinte B . En déduire sans toutefois la calculer, l'existence d'un volume critique V_c de B . (1 pt)
2. On suppose que $V_B < V_c$.
 - a. On appelle V_1 le volume occupé par le gaz. Déterminer le travail reçu par le gaz. (0,5 pt)
 - b. Déterminer l'état final du gaz (P_1, V_1, T_1) en fonction de P_0, V_A et V_B . (1 pt)
 - c. Calculer l'entropie créée. Conclure. Quelle est la cause de la création d'entropie ? (1 pt)
 - d. Déterminer V_c . Effectuer l'application numérique. (0,5 pt)
3. Reprendre la question 2. dans le cas $V_B > V_c$. (1 pt)

EXERCICE III : Mécanique du point : Satellite terrestre (4,5 pts)

Dans ce problème les satellites ou engins spatiaux artificiels sont assimilés à des points matériels de masse m , et les influences perturbatrices dues aux mouvements de la Terre, supposée sphérique et homogène, à son atmosphère et aux champs de gravitation des autres composants du système solaire (soleil, planètes, ...) sont négligées.

On désigne par R le rayon de la terre et par g_0 le module du vecteur du champ de pesanteur au niveau du sol. On donne : $R = 6400 \text{ km}$; $g_0 = 10 \text{ ms}^{-2}$

1. Retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_1 dont dérive la force \vec{F} attractive exercée par la Terre sur un engin spatial lorsqu'il se trouve à la distance r du centre O de la Terre. On admet que E_1 tend vers 0 quand r tend vers l'infini. (1 pt)

2. Si on lançait un tel engin depuis la Terre, en lui communiquant à partir du sol une vitesse initiale V_i ascendante et verticale, de façon qu'il atteigne avec une vitesse nulle un point M d'altitude h , quelle devrait alors être la relation entre cette altitude h et le module V_i de la vitesse de lancement ?

Application numérique : $h = 600 \text{ km}$. (1 pt)

3. Quelle valeur numérique minimale V_2 devrait avoir la vitesse initiale pour que l'engin s'éloigne indéfiniment ? (0,5 pt)

4. Une fois atteinte cette altitude h de la question N°2 ci-dessus, quelle devrait être la vitesse V_i qu'il faudrait communiquer à cet engin à partir du point M pour qu'il devienne un satellite circulaire d'altitude $R + h$? Préciser la direction et le module de \vec{V}_1 .

Quelles seraient dans ces conditions :

(a) la valeur numérique de V_1 ? (0,5 pt)

(b) la période T_1 de révolution de ce satellite ? (0,5 pt)

(c) la valeur numérique du module L_1 de son moment cinétique par rapport à O et son énergie mécanique E_2 dans le cas particulier où m est de 1 tonne ? (1 pt)

EXERCICE IV: Circuit R, L, C (5,5 pts)

Soit le circuit suivant où e est une tension sinusoïdale de pulsation ω . On étudie la variation de l'impédance réelle du circuit.

1. Exprimer l'impédance complexe du circuit. (1 pt)

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

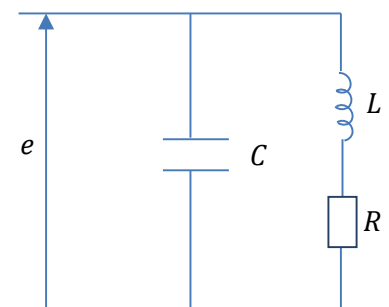
Donner l'expression de l'impédance en fonction de x , Q et R .

(1 pt)

3. Etablir l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera. (1,5 pt)

4. Donner l'expression de la pulsation correspondante à l'extremum. (1 pt)

5. En étudiant les limites du module de l'impédance, en déduire qu'il s'agit d'un maximum. (1 pt)



EAMAC – 2014 - SUJET P-I-8

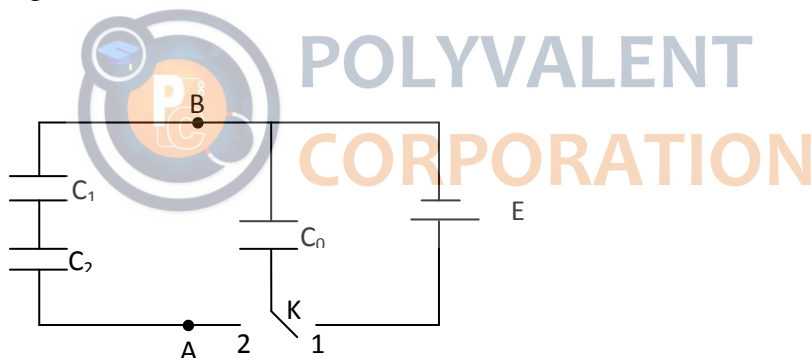
EXERCICE I (5points)

Un point se déplace sur une hélice circulaire représenté paramétriquement dans le repère orthonormé direct $Oxyz$ par les relations suivantes :

- 1) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec l'axe Oz .
- 2) Déterminer les composantes du vecteur accélération et en déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

EXERCICE II (5points)

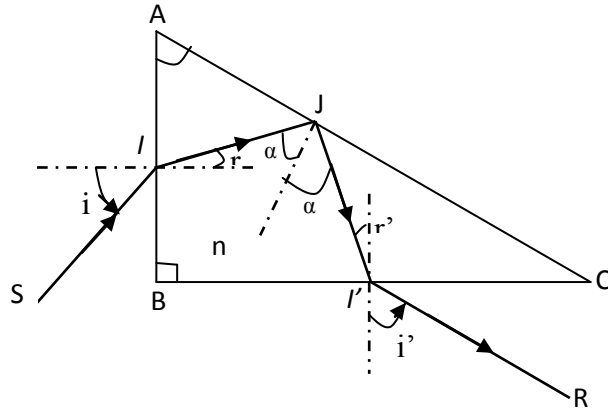
Soit le montage du schéma ci-dessous



- 1) On place l'interrupteur en position 1. Quelle est la charge Q_0 de C_0 ?
- 2) On place l'interrupteur dans la position 2. Calculer $V_A - V_B$ à l'équilibre et les charges Q_0' ; Q_1 et Q_2 des condensateurs C_0 , C_1 , C_2 .
- 3) Montrer la répartition des charges sur chaque condensateur et vérifier si le principe de conservation de la charge est respecté.

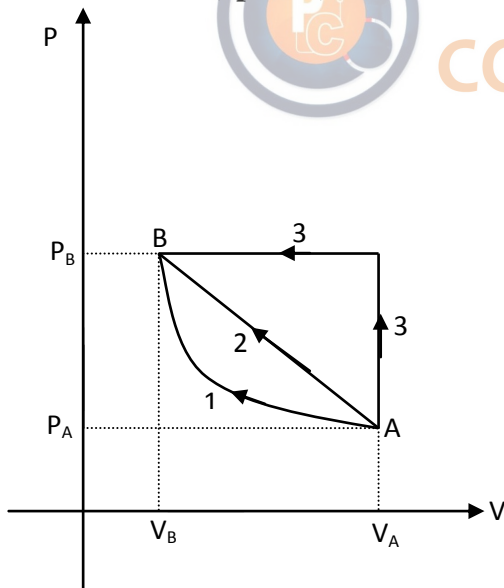
EXERCICE III (5points)

Un prisme de verre, d'indice $n = 1,60$ pour la radiation jaune utilisée, a pour section droite un triangle rectangle ABC . Un rayon lumineux SI , situé dans le plan de section droite, pénètre par la face AB sous l'angle d'incidence i , se réfléchit totalement sur l'hypoténuse AC et émerge à travers BC ; on notera i' l'angle d'émergence.



- 1) Calculer la déviation totale du rayon lumineux SI en fonction de i et i' .
- 2) On donne $A = 60^\circ$. Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i le rayon émergent l'R est-il perpendiculaire au rayon incident SI ? En déduire les valeurs des angles de réfraction et de réflexion.
- 3) Le prisme et le rayon incident demeurent fixes ; on utilise une lumière bleue pour laquelle l'indice du prisme devient $n + dn$. Exprimer en fonction de l'angle A le pouvoir dispersif — .

EXERCICE IV (5 points)



POLYVALENT CORPORATION

On considère deux moles d'oxygène supposé gaz parfait que l'on fait passer de l'état initial A (P_A, V_A, T_A) à l'état final B ($P_B = 3P_A, V_B, T$) par trois chemins distincts :

A1B (Transformation isotherme)

A2B (représenté par une droite)

A2B (voir figure)

Calculer les travaux et quantités de chaleur mises en jeu durant ces trois transformations en fonction de R et T .

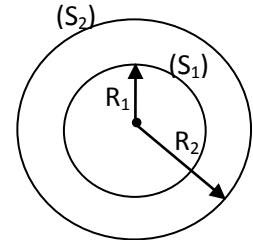
Application numérique :

$T = 300\text{K}$; — — .

EAMAC – 2014 - SUJET P-C-5

Exercice 1

- I. Une sphère conductrice creuse (S_1) de centre O et de rayon R_1 porte une charge Q.
- 1) Déterminer le vecteur-champ électrique en tout point M de l'espace situé à la distance r du point O.
 - 2) Déterminer le potentiel électrique en tout point de l'espace.
- II. On place concentriquement à la sphère (S_1) portant la charge Q, une autre sphère creuse conductrice (S_2) de rayon R_2 portant une charge Q_0 .
- 1) Donner et justifier la répartition des charges sur ces conducteurs.
 - 2) Déterminer les vecteurs-champ électriques, en tout point M de l'espace tel que $OM = r$.
 - 3) Déterminer les potentiels, en tout point M de l'espace tel que $OM = r$. En déduire les potentiels électriques V_1 de (S_1) et V_2 de (S_2).
 - 4) Déterminer la capacité C du condensateur ainsi formé.
 - 5) On relie (S_2) au sol, déterminer la nouvelle valeur V_1' du potentiel de (S_1).



Exercice 2

On considère le réseau électrique comprenant :

un générateur de force électromotrice $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne

$r = 1 \Omega$ et des résistances, connectés selon le montage de la figure 1.

Les puissances consommées dans les résistances R_1, R_2, R_3, R_4

sont respectivement : $P_1 = 6 \text{ W}$; $P_2 = 10 \text{ W}$; $P_3 = 1,5 \text{ W}$; $P_4 = 2,5 \text{ W}$.

La différence de potentiel aux bornes des points A et D est : $U_{AD} = 10 \text{ V}$.

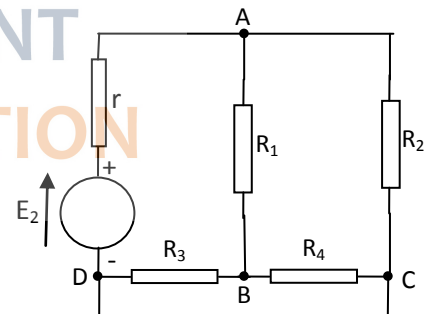


Figure 1

- 1) Déterminer la puissance disponible aux bornes du générateur (E, r).
- 2) Calculer les intensités et les sens des courants dans les différentes branches du réseau.
- 3) On enlève la résistance R_3 du circuit. Déterminer les éléments caractéristiques (E_{Th}, R_{Th}) du générateur de tension de Thévenin correspondant au dipôle BD du réseau électrique restant. En déduire le schéma du modèle équivalent de Thévenin du dipôle BD, ainsi que l'intensité du courant passant par R_3 dans le réseau électrique initial.

Exercice 3

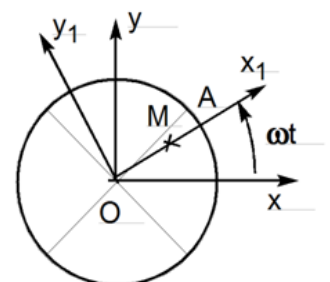
Dans un plan xOy d'un repère fixe orthonormé direct $R(O; \vec{x}, \vec{y})$, un disque de rayon r et de centre O tourne autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire constante ω .

Soit $R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ un repère orthonormé direct lié au disque.

Un point M part à l'instant $t = 0$ du point O pour aller vers le point A à une vitesse linéaire constante V .

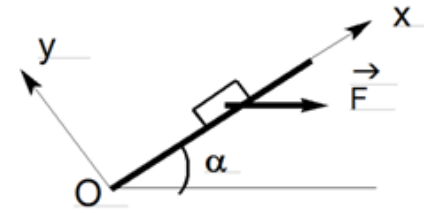
En exprimant les résultats sur R_1 , déterminer pour le point M

- 1°/ - la loi horaire $x_1(t)$ sur Ox_1
- 2°/ - les vecteurs vitesses relative, d'entraînement et absolue
- 3°/ - les vecteurs accélérations relative et de Coriolis.



Exercice 4 :

Un corps matériel de poids P est placé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soit f le coefficient de frottement de glissement. Dans le cas où $(\cos \alpha - f \sin \alpha)$ est positif, on demande :



1°/ - d'énumérer les forces appliquées au corps

Matériel

2°/ - de déterminer la force horizontale F permettant de maintenir en équilibre ce corps matériel.



CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC - 2013

Contrôleur de la circulation aérienne

Epreuve de Physique

EXERCICE N°1

Soit le référentiel $R_0(Ox_0, Oy_0, Oz_0)$ considéré comme galiléen, Oz_0 étant dirigé vers la verticale ascendante. Soit \vec{g} le champ de pesanteur terrestre. Un disque de centre O , de rayon a , tourne dans le plan horizontal (Ox_0y_0) , autour de O , à la vitesse angulaire constante ω . Ce disque est muni d'une rainure radiale, et dans cette rainure coulisse sans frottement une masselotte M de masse m . Soit $R(Ox, Oy, Oz_c)$ un référentiel lié au disque, Ox étant porté par la rainure. On appelle $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox, Oy, Oz_c .

- 1) La masselotte M est attachée à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 ; ce ressort est fixé en O à son autre extrémité.
 - a) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, pour la masselotte M , dans le référentiel (R) lié au disque.
 - b) Montrer que M peut effectuer des oscillations harmoniques, dans (R) , autour d'une position d'équilibre $x = x_c$, sous réserve que k obéisse à une condition que l'on précisera. Calculer x_c et la période T des oscillations. Pensez-vous que la condition ci-dessus soit suffisante pour observer réellement des oscillations harmoniques autour de x_c ?
- 2) On supprime le ressort, la masselotte étant toujours astreinte à glisser sans frottement dans la rainure. A la date $t = 0$, M est lâchée sans vitesse initiale à une distance x_1 de O .
 - a) Donner l'expression de $x(t)$ ainsi que le module de la réaction \vec{N} de la rainure sur M .
 - b) Application numérique : A quel moment M arrive-t-elle à l'extrémité du disque sachant que le disque effectue une rotation de un tour par seconde et que $x_1 = \frac{a}{4}$?

EXERCICE N°2

On considère une spire circulaire de rayon a , de centre O , placée dans le vide et parcourue par un courant I . On appelle Oz l'axe de la spire. Tout point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On désigne par B_r, B_θ, B_z les trois composantes cylindriques du champ magnétique \vec{B} créé par la spire en M . Par symétrie, B_r, B_θ, B_z ne dépendent que des coordonnées r et z du point M .

- 1) Montrer que le champ magnétique \vec{B} créé par la spire en un point M d'abscisse z de l'axe Oz , a pour composante :

$$B_r(0, z) = 0 \quad ; \quad B_\theta(0, z) = 0 \quad ; \quad B_z(0, z) = \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2\right)^{3/2}}$$

- 2) On considère un point M en dehors de l'axe Oz .

a) Montrer que la composante $B_\theta(r, z)$ est nulle.

b) On suppose que le point M est voisin de l'axe Oz ($r \ll a$) ; montrer que :

- $B_z(r, z) \approx B_z(0, z)$ à des termes du second ordre près en r (on pourra effectuer un développement limité des fonctions $B_z(r, z)$ et $B_z(0, z)$ au premier ordre).

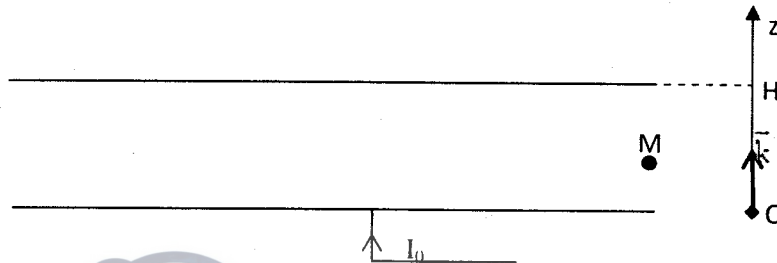
- La composante B_r du champ magnétique normale à l'axe Oz peut s'écrire

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial z} [B_z(0, z)]$$

à des termes du troisième ordre près en r .

EXERCICE N°3

On modélise la basse atmosphère par beau temps selon le schéma électrique suivant. L'atmosphère est le milieu contenu entre les armatures d'un condensateur qu'on peut considérer comme plan ; ces armatures sont, d'une part, le sol supposé parfaitement conducteur, et d'autre part un plan conducteur à l'altitude H qui schématise l'ionosphère ; la surface en regard de ces armatures a une aire notée S . Tous les champs de vecteurs et de scalaires utilisés ne dépendent que de l'altitude z du point M où ils sont définis. On note \vec{k} le vecteur unitaire de l'axe Oz orienté suivant la verticale ascendante. L'atmosphère est un milieu légèrement conducteur de l'électricité ; sa permittivité est égale à celle du vide, ϵ_0 . En un point M règne un champ électrique \vec{E} qui a les propriétés du champ électrostatique.



Un courant permanent d'intensité I_0 traverse verticalement l'atmosphère (le sens algébrique suivant lequel est compté I_0 est celui du schéma). Le courant de retour est assuré par les orages dont il ne sera pas question. En un point M de l'atmosphère, on définit le vecteur densité de courant \vec{j} par : $\vec{j} = \frac{I_0}{S} \vec{k}$. Il est uniforme et relié au champ électrique en M par la relation : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité électrique au point M ; On admet qu'elle varie avec l'altitude suivant la loi $\gamma = \gamma_0 e^{\frac{z}{a}}$ où γ_0 et a sont des constantes.

$$\gamma_0 \exp\left(\frac{z}{a}\right)$$

Pour les applications numériques, on prendra :

$$H = 50000 \text{ m} ; S = 5,09 \cdot 10^{14} \text{ m}^2 ; a = 4000 \text{ m} ; I_0 = -1500 \text{ A} ; \epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$$

(Attention au signe de I_0 !).

- 1) a) Exprimer littéralement le champ électrique \vec{E} en fonction de l'altitude z .
- b) Au niveau du sol, on mesure le champ électrique $\vec{E}_c = E_0 \vec{k}$ avec $E_c = -100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer littéralement puis numériquement γ_0 .
- c) Calculer la différence de potentiel entre le sol et le point d'altitude $z = 1,80 \text{ m}$. Pourquoi un individu debout n'est pas électrocuté ?
- 2) a) Calculer littéralement la charge surfacique σ_0 portée par le sol puis la charge totale Q_0 portée par l'armature constituée par le sol.

- b) Calculer numériquement σ_0 et Q_0 .
 - c) Calculer littéralement la charge surfacique σ_H et la charge totale Q_H de l'armature à l'altitude H.
 - d) Calculer numériquement σ_H et Q_H .
- 3) Calculer littéralement puis numériquement la charge totale Q_a portée par l'atmosphère (armatures non comprises).

EXERCICE N°4

- 1) Soit un doublet électrique A (- q), B (+ q) porté par l'axe Ox, et tel que AO = OB = a. On étudie son action en un point M très éloigné repéré par ses coordonnées polaires r, θ ($r \gg a$).
- a) Retrouver l'expression du potentiel V créé en M par ce dipôle après avoir effectué un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{1}{r}$.
 - b) En déduire les composantes E_r et E_θ du champ électrique en coordonnées polaires puis l'allure des lignes de champ.
- 2) On soumet ce dipôle à l'action d'un champ uniforme \vec{E}_0 de direction et sens Ox, et dont le potentiel s'annule en O.
- a) Justifier que le dipôle reste en équilibre.
 - b) En déduire, toujours en M éloigné, le potentiel résultant V' et les composantes E'_r et E'_θ du champ résultant \vec{E}' .
 - c) Quelle est la nature de l'équipotentielle $V' = 0$? Calculer les nouvelles composantes E'_r et E'_θ du champ résultant \vec{E}' .

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC - Session 2013

Cycle Ingénieur

Epreuve de Physique

EXERCICE N°1

L'espace étant repéré par rapport à un référentiel galiléen $Oxyz$ de vecteurs unitaires (\mathbf{Oz}) (Oz axe vertical ascendant), on considère un objet ponctuel de masse m lancé en O au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale :

Le champ de gravitation terrestre sera considéré comme uniforme, et on posera g . On admettra que la résistance de l'air, dans le domaine considéré est de la forme $\mathbf{R} = -h\mathbf{v}$ est la vitesse de l'objet et h une constante positive.

- 1) En partant de l'équation fondamentale de la dynamique, déterminer en fonction du temps les composantes de \mathbf{v} .
- 2) Déterminer en fonction du temps les coordonnées de l'objet.
- 3) Etudier les limites de \mathbf{v} .
- 4) En déduire l'allure de la trajectoire. On précisera les coordonnées de son sommet. On montrera qu'elle admet une asymptote et on représentera la courbe correspondante.
- 5) Déterminer l'équation de l'hodographe ; tracer la courbe correspondante en ayant soin de préciser les points correspondants respectivement au départ de l'objet, au sommet de la trajectoire et à la partie asymptotique de celle-ci.
- 6) En déduire de l'hodographe la vitesse minimale de l'objet et préciser si celle-ci est atteinte en un point situé sur la partie ascendante ou descendante de la trajectoire.

EXERCICE N°2

Un endoscope est un appareil optique utilisé en investigation paraclinique permettant l'observation, sous faible grossissement, de cavités et de conduits naturels : appareil digestif, respiratoire. Le tube de l'endoscope comporte un objectif, un système optique transportant l'image objective et un oculaire. La lumière nécessaire à l'observation est conduite jusqu'à l'objet par un guide de lumière parallèle au tube endoscopique

Conventions pour l'ensemble du problème :

L'axe optique est orienté dans le sens de propagation de la lumière (de gauche à droite). Les objets et images perpendiculaires à l'axe optique sont mesurés algébriquement sur l'axe orienté vers le haut de la page. Les angles des rayons avec l'axe principal sont évalués algébriquement avec la convention habituelle (sens trigonométrique). Les conditions de l'approximation de Gauss sont supposées remplies.

- 1) On assimile l'objectif à une lentille mince convergente L_1 de distance focale f_1 . L'objet AB assimilé à un segment de droite perpendiculaire à l'axe optique (A sur l'axe) est placé, pour les conditions standard d'utilisation, à 50 mm devant le centre optique O_1 de L_1 . Déterminer par $\overline{O_1A}$ la position de l'image donnée par objectif. Calculer le grossissement $\overline{AB'}$.
- 2) L'image $A'B'$ est observée à travers un oculaire assimilé à une lentille mince convergente L_2 de centre O_2 , de distance focale image f_2 .
 - a) Pour un œil normal effectuant une observation sans accommodation (observation à travers l'instrument d'une image située à l'infini), indiquer la place du foyer objet F_2 de l'oculaire.
 - b) Calculer le grossissement commercial G_0 de l'appareil défini par :
$$G_0 = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

α étant l'angle sous lequel serait vu directement, par l'œil, l'objet AB placé à 250 mm ; α' l'angle sous lequel est vu, à travers l'instrument, l'objet placé comme indiqué dans la question 1).

- 3) On admet que l'observateur, par la faculté d'accommodation de son œil, perçoit nettes les images situées de l'infini à 250 mm. Les positions respectives de l'oculaire et de l'objectif n'étant pas modifiées, dans quel intervalle de $\overline{O_1A}$, l'observateur a-t-il une perception nette de l'objet AB ? Calculer la latitude de mise au point ou profondeur de champ $\overline{O_1A}$.

EXERCICE N°3

L'état d'équilibre thermodynamique d'un volume donné de sel paramagnétique (1 cm^3) est décrit par deux variables indépendantes : le champ magnétique appliqué B et la température absolue T .

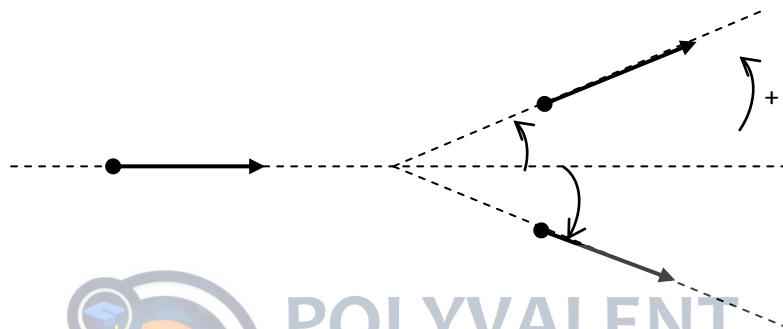
Le moment magnétique M (parallèle à B) de l'unité de volume, est fonction de B et T . On fait passer, de manière réversible, le champ magnétique de la valeur B à $B+dB$ et la température de la valeur T à $T+dT$. L'échantillon de sel reçoit alors du milieu extérieur le travail δW et la quantité de chaleur δQ .

- 1) a) Quel est le sens physique des coefficients calorimétriques α et β ?
b) En appliquant les deux principes sous leur forme différentielle, exprimer α et β en fonction de T , $\alpha = \dots$, $\beta = \dots$.
- 2) Le sel étudié obéit à la loi de Curie, c'est-à-dire que son équation d'état est $M = \frac{C}{T} B$ – où C est une constante.
 - a) Calculer α et β en fonction de B et T , puis en fonction de M et T .
 - b) En déduire l'expression de α en fonction de B et T . Il s'introduit dans ce calcul une fonction arbitraire de la température, $f(T)$. On lui attribuera la valeur donnée par l'expérience, soit : $f(T) = A e^{-T/T_0}$ – où A est une constante.
- 3) a) Le volume considéré (1 cm^3) de sel paramagnétique est initialement à l'équilibre à la température T_i dans le champ magnétique B_i . On annule lentement le champ de manière réversible et adiabatique. En fin d'opération, le sel est à la température T_f que l'on déterminera.
b) Application numérique : Le sel considéré est du sulfate de gadolinium hydraté $\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$, pour lequel $A = 2,65 \text{ J.degré}$, et $C = 78,7 \text{ J.degré.tesla}^{-2}$. Calculer T_f , sachant que $T_i = 2 \text{ K}$ et $B_i = 0,71 \text{ T}$.

EXERCICE N°4

On considère un faisceau de photons monoénergétiques (d'énergie E , de fréquence ν , de quantité de mouvement p , de longueur d'onde λ) incidents interagissant avec des électrons cibles (de masse m) supposés au repos dans le référentiel galiléen (R) du laboratoire.

Après le choc élastique, les photons ont une énergie E' , une fréquence ν' , une quantité de mouvement p' et une longueur d'onde λ' ; les électrons ont une énergie E_e , une quantité de mouvement p_e . On note θ l'angle entre la direction d'incidence et la direction de propagation du photon après le choc, et ϕ l'angle entre la direction d'incidence et la direction de propagation de l'électron après le choc. On utilisera les quadrivecteurs impulsion-énergie P^μ , P_e^μ du photon et de l'électron avant le choc, et P'^μ , $P_e'^\mu$ pour les mêmes particules après le choc.



- 1) Préciser les coordonnées des quatre quadrivecteurs P^μ , P_e^μ , P'^μ , $P_e'^\mu$ à l'aide des quantités E , ν , λ , m et de la vitesse de la lumière c . Exprimer la pseudo-norme de chacun d'eux, et leur six produits scalaires deux à deux.
- 2) Ecrire la loi de conservation du quadrivecteur impulsion-énergie dans le choc des particules.
- 3) L'étude cinématique permet d'obtenir des relations entre trois des paramètres λ , λ' , θ , la masse m étant donnée.
 - a) Exprimer λ' à partir de la loi de conservation du 2). En déduire la relation suivante :

 - b) Exprimer de même θ et en déduire la relation suivante :

 - c) En déduire l'expression de la variation $\Delta\lambda$ de la longueur d'onde associée aux photons en fonction θ et de la constante de Planck h .

EXERCICE N°1 : 1

1°) On considère un conducteur filiforme, de longueur $2L$, chargé uniformément avec la densité linéique de charge λ . On considère le point M de la médiatrice, situé à la distance d du centre O du segment.

a°) Déterminer le champ électrostatique créé en M par la tige conductrice.

b°) En déduire, en ce point M , le champ créé par le fil supposé infini.

2°) Le fil est disposé de manière à former une spire carrée de côté $2a$. On désigne par O' le point de concours des diagonales du carré et par $\vec{O'z}$, l'axe orthogonal au plan du carré. Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution de charges en un point P situé sur l'axe $\vec{O'z}$, à la distance z de O' .

EXERCICE N°2 :

Un point mobile M se déplace, relativement à un référentiel $R(Oxyz)$, le long d'une courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = a \sin \omega t \\ z(t) = bt \end{cases} \text{ où } \omega, a \text{ et } b \text{ sont des constantes positives.}$$

1°) Quelle est la nature du mouvement du point mobile M ?

2°) Exprimer, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ se rapportant à R , les composantes de sa vitesse et de son accélération. Calculer leurs normes dans le cas où $\omega=2\pi$ rad/s ; $a=0,3$ cm et

$$b = \frac{\pi}{5} \text{ cm/s}$$

3°) Trouver la vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire

EXERCICE N°3

Un méson π ayant une masse au repos m_π se désintègre pour donner un méson μ (de masse m_μ au repos) et un neutrino ν de masse au repos m_ν .

1°) Calculer les énergies cinétiques T_μ et T_ν du méson μ et du neutrino. Le neutrino ayant une

masse nulle montrer que :
$$T_\mu = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$$

2°) On donne $m_\pi=273m_e$, $m_\mu=207m_e$ où m_e est la masse de l'électron. Calculer T_μ et T_ν en Mev sachant que l'énergie au repos d'un électron est égale à 0.511MeV.

3°) Calculer en MeV/c les quantités de mouvement P_μ et P_ν des deux particules.

EXERCICE N°4 :

- 1°) On comprime de façon isotherme, un gaz parfait ($\gamma = 1,4$), de la pression $P_0 = 1\text{atm}$ à la pression $P_1 = 20\text{atm}$ à la température $T_0 = 273\text{K}$. Le gaz est ensuite détendu adiabatiquement de façon réversible jusqu'à la pression $P_0 = 1\text{atm}$. Calculer la température finale T_1 après cette double opération.
- 2°) a) On recommence les deux opérations précédentes à la température constante T_1 . Calculer la nouvelle température finale T_2 du gaz.
- b) Trouver la formule générale de la température T_n du gaz, atteinte à la fin de n doubles opérations successives décrites précédemment.
- Application numérique : $n = 4$ et $n = 5$. Quel est l'intérêt de ce procédé ?



EXERCICE N°1

Un corps parachuté, de masse m constante, subit dans son mouvement de chute verticale suivant l'axe (O,x) une force de freinage $\vec{F} = -k\vec{v}$ où k , réel positif, désigne le coefficient de frottement visqueux puis \vec{v} et v sont respectivement le vecteur vitesse et son module. L'intensité de la pesanteur, g , au lieu de la chute est supposée uniforme. La vitesse initiale est nulle à l'origine du mouvement (à $t=0$, $v(t=0) = v_0=0$ et $x(t=0) = 0$).

1°) Montrer que l'équation différentielle qui caractérise le mouvement du corps parachuté peut

se mettre sous la forme suivante :
$$\frac{dv}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{\beta^2} \right).$$

En précisant la dimension cinématique des constantes α et β . Donner leurs expressions respectives en fonction de m , g et k . En déduire la vitesse limite atteinte par le corps au cours du mouvement ?

2°) Déterminer la loi horaire du mouvement $x(t)$. On donne : $g=10\text{m.s}^{-2}$; $m= 25 \text{ kg}$; et $k= 10 \text{ N.s/m}$.

EXERCICE N°2 :

Un électron décrit une boucle de courant dans son mouvement circulaire uniforme autour du proton de l'atome d'hydrogène.

1°) En appliquant la loi de Biot et Savart déterminer les caractéristiques du vecteur champ magnétique créé par ce courant électronique au point où est placé le proton.

2°) Application numérique. Calculer l'intensité du champ magnétique.

On donne : la masse de l'électron $m_e=9,31. 10^{-31}\text{Kg}$,
la célérité de la lumière $c= 3. 10^8\text{m/s}$,
la perméabilité du vide $\mu_0=4\pi. 10^{-7}\text{H/m}$,
le rayon du cercle $a= 0,53. 10^{-10}\text{m}$.

EXERCICE N°3 :

Une caisse de poids 1200N repose sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontal. On tire sur la caisse avec une corde faisant un angle u avec la ligne de plus grande pente du plan. Le coefficient de frottement de la caisse sur le plan est $k = \text{tg}\phi$.

1°) Calculer la force \vec{T} capable de provoquer le glissement de la caisse.

2°) La force \vec{T} est une fonction de u . Déterminer l'angle le plus favorable à la traction de la caisse.

Application numérique : $k = 0,3$; pente du plan définie par $\sin\alpha = 0,15$

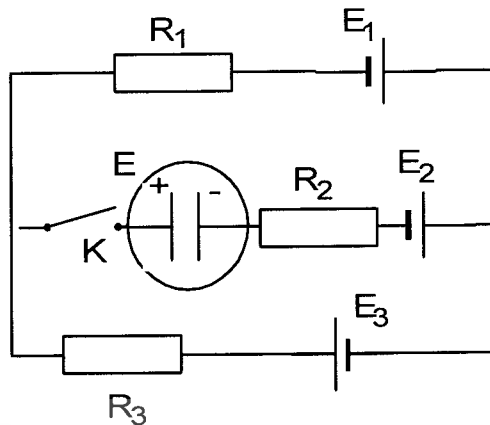
EXERCICE N°4 :

On considère le réseau de la figure suivante :

1°) L'interrupteur K étant fermé, déterminer les courants I_1 , I_2 et I_3 traversant les résistances R_1 , R_2 et R_3 respectivement

2°) L'interrupteur K étant ouvert, calculer la puissance dissipée dans la résistance R_1 .

AN : $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E_1 = 3V$, $E_2 = 6V$, $E_3 = 2V$, $E = 1V$.



**POLYVALENT
CORPORATION**

Exercice 1

Deux pendules identiques sont formés, chacun, d'une boule conductrice, supposée ponctuelle, de masse $m = 10mg$ et d'un fil inextensible de longueur $l = 20cm$; la masse du fil est négligeable. On électrise les boules de la même façon puis on les suspend au même point O. A l'équilibre les deux fils font entre eux un angle $2\theta = 60^\circ$.

- 1) Déterminer les forces qui s'exercent sur chacune des boules; en déduire les conditions d'équilibre d'une boule.
- 2) Quelle est la distance d qui sépare les deux boules à l'équilibre ?
- 3) Calculer la valeur absolue de la charge Q des boules.

Exercice 2

On considère un galvanomètre à cadre mobile dont la résistance interne est $R_g = 10\Omega$. L'angle de déviation θ de l'aiguille du galvanomètre est proportionnelle au courant i qui le traverse : $\theta = ki$ où k est une constante. L'angle maximum de déviation θ_{max} de l'aiguille du galvanomètre est subdivisé en $N = 100$ graduations équidistantes sur le cadran.

- 1) Déterminer le courant maximum i_{max} que peut mesurer le galvanomètre si la chute de tension aux bornes du galvanomètre est $u_{max} = 1V$.
- 2) Déterminer la variation Δi de l'intensité si l'aiguille du galvanomètre dévie d'une graduation sur le cadran.
- 3) Pour disposer d'un ampèremètre de calibre 1A on monte en parallèle aux bornes du galvanomètre une résistance R_s . Déterminer la valeur de la résistance R_s et faire un schéma du montage.
- 4) Pour disposer d'un voltmètre de calibre 10V on monte en série à l'une des bornes du galvanomètre une résistance ρ .
 - a) Déterminer la valeur de la résistance ρ et faire un schéma du montage.
 - b) On suppose que la classe du voltmètre ainsi construit est $C = 1,5$; c'est-à-dire que l'incertitude relative de construction est de 1,5% sur toute la plage de mesure. Déterminer l'incertitude ΔU de mesure d'une tension $U = 3V$ avec ce voltmètre.

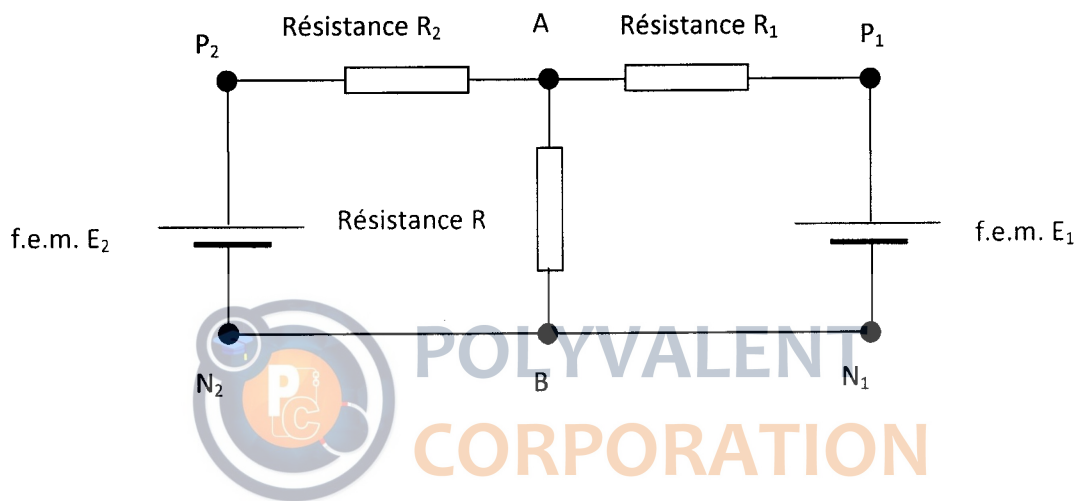
Exercice 3

On considère un conducteur filiforme et circulaire, de rayon R et de centre O, placé dans le vide (perméabilité μ_0). Le conducteur est parcouru par un courant I constant. Le conducteur est étudié dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que le conducteur soit dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et l'axe (O, \vec{e}_z) est confondu avec l'axe de symétrie du conducteur.

- 1) Déterminer l'expression de l'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$, créé en un point M quelconque de l'espace, par un élément de courant $I d\vec{l}$ situé en un point A de la circonférence du conducteur ; l est la circonférence du conducteur.
- 2) Déterminer l'expression de l'induction magnétique \vec{B} en un point M appartenant à l'axe (O, \vec{e}_z) .
- 3) Quelle est l'expression de l'induction magnétique \vec{B} au centre O du conducteur ?

Exercice 4

On considère le circuit électrique de la figure ci-dessous où on s'intéresse à la branche AB ; les générateurs de courant continu sont des générateurs idéaux.



Appliquer le théorème de Thévenin pour déterminer le courant I et la tension $V_A - V_B$ dans la branche AB.

&&&&

EXERCICE N°1 (5 pts)

Une barre homogène AB, de centre G, de longueur $2\ell = 50$ cm et de poids $P = 20$ N est suspendue à un crochet C par deux fils de longueur $CA = a = 43,3$ cm et $CB = b = 25$ cm.

- 1°) Faire un schéma descriptif simple en représentant toutes les forces en présence.
- 2°) Calculer l'angle θ que fait la barre, à l'équilibre, avec le plan horizontal. En déduire les valeurs des angles θ_A et θ_B que font respectivement les fils tendus CA et CB par rapport à la verticale passant par C.
- 3°) Déterminer les tensions des fils à l'équilibre.

EXERCICE N°2 (5 pts)

On considère un cylindre homogène d'axe zz' , de rayon R et de longueur infinie. Une distribution volumique de charge est à l'intérieur du cylindre avec la densité ρ (constante et positive).

- 1°) Déterminer le champ électrique \vec{E} créé par cette distribution en tout point de l'espace à une distance r de l'axe zz' .
- 2°) En déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.

EXERCICE N°3 (5 pts)

Le centre de gravité G d'un solide continu, défini dans un domaine (D) dans un système de référence d'origine O est obtenu par la relation $\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_D \vec{OP} \rho(P) dD$ où $\rho(P)$ désigne la densité massique du solide en P et M sa masse totale. dD désignant le domaine élémentaire.

On considère, dans le plan (Oxy), une plaque supposée homogène de densité 1 ayant la forme d'un triangle rectangle en O, Les deux autres sommets étant A(0, 6) et B(8, 0).

- 1°) Calculer la masse M de la plaque.
- 2°) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque.

EXERCICE N°4 (5 pts)

Une spire filiforme circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I dans le sens trigonométrique.

- 1°) Déterminer les caractéristiques du champ magnétique \vec{B} créé en un point M de l'axe $x'x$ de la spire situé à une distance x du centre O de cette spire. On posera $OM = x$.
- 2°) Déterminer les composantes axiale B_x et radiale B_r du champ magnétique créé par la spire en un point N très voisin de M, tel que $MN = r$ ($r \ll x$), situé sur une perpendiculaire à l'axe au point M. On rappelle que le champ magnétique est à flux conservatif. (On pourrait calculer le flux du champ à travers une surface fermée cylindrique d'axe $x'x$, de rayon r, contenant les points M et N, de longueur élémentaire dx à partir du point M).

Exercice 1

On considère un gaz parfait enfermé dans une enceinte diatherme ayant la forme d'un cylindre dont l'une des bases est un piston mobile. Le milieu extérieur est à la température constante T_0 et à la pression constante P_0 .

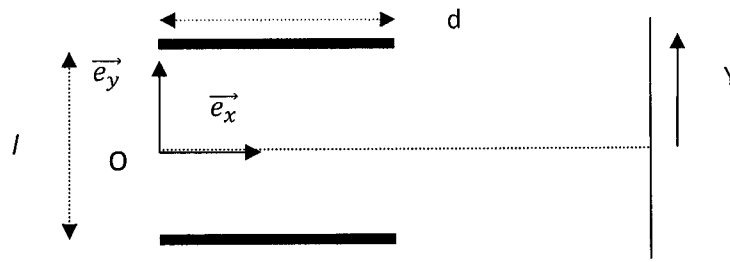
- 1) Déterminer l'expression du volume V_0 occupé par le gaz lorsqu'il est en équilibre avec le milieu extérieur.
- 2) On prépare le système de manière que son volume soit égale $\frac{V_0}{4}$ et on bloque le piston. Quel est le nouvel état d'équilibre du système ?
- 3) A partir cet état imposé au système, on débloque le piston ; décrire l'évolution de l'état du gaz.

Exercice 2

Un canon à électrons est formé par deux plans métalliques parallèles ; le premier plan, appelé cathode C comporte un filament chauffé qui émet des électrons. L'autre plan appelé anode A est percé d'un trou qui laisse passer les électrons accélérés. Le canon à électrons permet donc d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons. Ce faisceau peut être dévié à travers les plaques d'un condensateur plan ; c'est le principe de fonctionnement d'un oscilloscope cathodique.

- 1) En supposant que la différence de potentiel électrique $U = V_A - V_C$ entre l'anode et la cathode est positive, déterminer l'expression de la vitesse v des électrons à la sortie de l'anode ; on admet que les électrons sont émis sans vitesse initiale.
- 2) On considère un condensateur plan à plaques horizontales et on définit un repère cartésien d'étude $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que les plaques soient parallèles au plan $(O, \vec{e}_z, \vec{e}_x)$ et l'épaisseur du condensateur est parallèle à l'axe (O, \vec{e}_y) . On suppose que l'axe (O, \vec{e}_x) passe par le milieu des plaques avec le point O situé juste à l'entrée du champ électrique uniforme $\vec{E} = -E\vec{e}_y$ entre les plaques. A partir du point O , avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$, un électron issu d'un canon à électrons, traverse le champ avant d'en sortir. La distance horizontale des plaques suivant l'axe (O, \vec{e}_x) est d ; voir le schéma de la figure 1 ci-dessous.
 - a) Montrer que la trajectoire de l'électron est parabolique à l'intérieur des plaques
 - b) On s'intéresse au point d'impact de l'électron, sur un écran perpendiculaire à l'axe (O, \vec{e}_x) . Si Y est la distance de ce point par rapport à l'axe (O, \vec{e}_x) , montrer que Y est proportionnel à la tension U appliquée entre les plaques du condensateur.

Figure 1 :



Exercice 3

On considère une sphère, de centre O et de rayon R , dont la charge électrique totale Q est uniformément répartie dans le volume de la sphère.

- 1) Déterminer le champ électrique \vec{E} créé par cette sphère en tout M de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.
- 2) Dédire du calcul précédent le potentiel électrique V créé par la sphère en tout point M de l'espace.

Exercice 4

Les niveaux d'énergie E_n de l'atome d'hydrogène ont des valeurs discrètes données par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dans cette expression, n est un entier tel que $n \geq 1$ et $E_0 = 13,6 \text{ eV}$

- 1) Déterminer le niveau fondamental de l'atome
- 2) Déterminer l'expression de l'énergie d'un niveau excité
- 3) Quel est le niveau d'énergie de l'atome ionisé ?
- 4) Quelle énergie faut-il fournir à l'atome pour l'ioniser depuis son niveau fondamental ?
- 5) L'atome étant au niveau fondamental, il absorbe un photon pour passer à un niveau excité ; déterminer l'expression de la fréquence du photon absorbé.

&&&&

Exercice 1

Le champ électromagnétique est représenté par le couple de vecteurs (\vec{E}, \vec{B}) ; où \vec{E} est le champ électrique et \vec{B} est le champ d'induction magnétique.

- 1) En se plaçant dans le vide, de perméabilité μ_0 et de permittivité ϵ_0 , donner les équations de Maxwell en fonction du champ électromagnétique.
- 2) Montrer que lorsqu'on est en dehors des volumes chargés, le champ électrique et le champ d'induction magnétique vérifient l'équation des ondes.
- 3) Dans le cas d'un champ scalaire, donner la forme des solutions simples de l'équation des ondes.

Exercice 2

En mécanique quantique, on convient de représenter l'état d'une particule ponctuelle, de masse m , par sa fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$; où \vec{r} est le vecteur-position de la particule et t est le temps. On suppose que la particule est soumise à une énergie potentielle $U(\vec{r})$.

- 1) Donner l'équation générale de Schrödinger que doit vérifier la fonction d'onde.
- 2) Donner la forme de la fonction d'onde lorsque l'énergie de la particule est indépendante du temps (état stationnaire).
- 3) Dédire de l'expression de $\psi(\vec{r}, t)$ l'équation stationnaire de Schrödinger.

Exercice 3

On considère une lentille mince convergente, de centre O et de distance focale f . On note F le foyer objet et F' le foyer image.

- 1) Déterminer la position d'un objet *réel* AB, sur l'axe optique de la lentille, pour que son image A'B' soit *réelle*; illustrer la situation par un schéma.
- 2) Déterminer la position d'un objet *réel* AB, sur l'axe optique de la lentille, pour que son image A'B' soit *virtuelle*; illustrer la situation par un schéma.

Exercice 4

On considère à la surface de la terre un système formé par une masse ponctuelle m et un ressort linéaire à spires non jointives; on désigne par l_0 la longueur au repos du ressort et k sa raideur. Une extrémité du ressort est reliée à un point fixe O situé sur une potence immobile par rapport à la

terre ; et on place la masse à l'autre extrémité A du ressort. On suppose que le point A ne peut se mouvoir que suivant seulement l'axe verticale passant par O.

Prendre l'origine du repère cartésien d'étude en O et en considérant l'axe vertical passant par le point O comme l'un des axes de coordonnées ; cet axe sera orienté vers le bas.

- 1) Définir le repère cartésien d'étude et donner un schéma du système
- 2) Déterminer les coordonnées (x, y, z) du point A dans le repère d'étude
- 3) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse ponctuelle
- 4) Déterminer l'allongement Δl du ressort lorsque le point A est en équilibre
- 5) A partir de la position d'équilibre du point A, on le déplace, suivant l'axe vertical, d'une distance a vers le bas. Quel est le mouvement ultérieur du point A lorsqu'il est abandonné à partir de sa nouvelle position ?

&&&&



EXERCICE N°1

On considère l'unité de masse de gaz parfait. On rappelle que dans une transformation réversible d'un fluide, la quantité de chaleur mise en jeu dQ (c'est-à-dire échangée avec le milieu extérieur) s'écrit sous les formes :

$$dQ = C_v dT + \ell dV \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et le volume de } dV.$$

$$dQ = C_p dT + h dP \quad \text{lorsque la température varie de } dT \text{ et la pression de } dP.$$

- 1) Ecrire les expressions des différentielles de l'énergie interne dU , de l'enthalpie dH et de l'entropie dS . En déduire les relations:

$$\ell = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V, \quad h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad C_p - C_v = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

- 2°) On considère l'unité de masse de gaz réel qui obéit à l'équation de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = rT$$

- a) Etablir les expressions des coefficients ℓ et h .
- b) Etablir l'expression du travail reçu par le gaz, au cours d'une compression isotherme réversible s'effectuant entre les volumes V_1 et V_2 , à la température T .
- 3°) Que devient l'expression de ce travail, aux basses pressions ($b \ll V$) ?
- 4°) a) Déterminer la différence des chaleurs spécifiques $C_p - C_v$ du gaz, en fonction des variables indépendantes P , V et des constantes a , b et r .
- b) En tenant compte du fait que $\frac{a}{V^2} \ll P$ et $b \ll V$, trouver une formule approchée de $C_p - C_v$ en fonction des variables P et T .

EXERCICE N°2

Un point matériel M, de masse m, repéré par ses coordonnées polaires (r, θ), est soumis à la force Newtonienne : $\vec{F} = \frac{-k}{r^2} \vec{e}_r$ (avec $\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$), de la part d'un point O. k est une constante positive.

1°) Montrer que l'équation de la trajectoire de M peut être mise sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varphi_0)},$$

où φ_0 est l'axe focal à l'origine, p le paramètre de la conique et e son excentricité. Donner les expressions de p et e.

2°) On choisira la solution correspondant à $\varphi_0 = 0$. Calculer l'énergie potentielle E_p de M en fonction de k, p, θ et e. (On prendra l'origine des potentiels à l'infini).

3°) Calculer l'énergie cinétique E_c de M en fonction de k, p θ et e.

4°) Calculer l'énergie mécanique E de M. Montrer que E est constante.

On rappelle les formules de BINET :

$$\rho = \frac{1}{r} ; \quad V^2 = C^2 \left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} = -C^2 \rho^2 \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho \right) \vec{e}_r$$

EXERCICE N°1

On considère un ressort de masse négligeable, de raideur k et de longueur au repos L , reliant deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 . Le système est en équilibre sur un plan horizontal. A l'instant $t = 0$, on rapproche les deux points matériels de sorte que $M_1M_2 = \frac{L}{2}$, et on les lâche sans vitesse initiale. Le mouvement sur le plan horizontal s'effectue sans frottement.

1°) Soit O un point fixe du plan. Montrer que le centre de masse G du système est immobile.

2°) On pose $\overline{GM_1} = x_1(t)\vec{i}$ et $\overline{GM_2} = x_2(t)\vec{i}$, où \vec{i} est un vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\overline{M_1M_2}$. Trouver la relation entre $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

3°) Exprimer en fonction de $x_1(t)$, $x_2(t)$, k et L , la force exercée par le ressort sur le point matériel M_2 .

4°) Trouver l'équation différentielle donnant $x_2(t)$ et la résoudre avec les conditions initiales données. Quelle est la pulsation propre ω du système ?

5°) En déduire l'équation horaire $x_1(t)$.

6°) Calculer l'énergie cinétique $E_c(t)$

7°) On pose $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Montrer que l'énergie potentielle $E_p(t)$ du système peut se mettre sous la forme $E_p = \frac{1}{2}k(x - L)^2 + C$, où C est une constante que l'on précisera. En déduire l'énergie mécanique E du système.

EXERCICE N°2

Un gaz réel a pour coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{T} - \frac{b}{VT}$ et pour

coefficient de compression isotherme $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} - \frac{b}{PV}$

avec $b = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mole}$. De plus, l'énergie interne de ce gaz ne dépend que de la température, $U = cT$ avec $c = 28,2 \text{ Joules/ degré/ mole}$.

1°) On fait subir à une mole de ce gaz à partir d'un état ($P_1=100\text{atm}$; $V_1=0,5\text{litre}$; $T_1=545\text{K}$), une détente isotherme qui l'amène à l'état ($P'_1=10\text{atm}$; V'_1).

a°) Calculer le volume final V'_1 .

b°) Quel est le travail échangé au cours de cette transformation ? Préciser s'il a été reçu ou fourni par le gaz.

c°) Quelle est la quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur ?

2°) Le gaz pris à l'état (P'_1 ; V'_1 ; T_1) est ensuite détendu de façon adiabatique jusqu'à l'état final (P_2 ; $V_2=20\text{ litres}$; T_2).

a°) Etablir l'équation d'état du gaz, en y faisant figurer la constante R des gaz parfaits.

b°) Déterminer la température T_2 à la fin de la détente.

c°) Calculer le travail échangé dans cette transformation. On prendra $R=8,32 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

d°) Représenter les transformations subies par le gaz dans le diagramme de Clapeyron.

EXERCICE N°1 :

Un point matériel M, de masse m est repéré, dans le plan xOy d'un référentiel Galiléen, par ses coordonnées polaires (r, θ) dans la base polaire ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$). Il se déplace, sur le cercle d'équation polaire $r = 2a \cos \theta$ où a est une constante positive, sous la seule action du champ de force $\vec{F} = m \varphi(r) \vec{e}_r$. A l'instant initial, le point M se trouve en A ($\theta_0 = 0$) et sa vitesse initiale est \vec{V}_0 .

1°) Montrer que le moment cinétique par rapport à O, $\vec{L} = \vec{OM} \wedge \vec{P}$, reste constant.

2°) a°) Quelle est, dans le cas général, l'expression, dans la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$), du vecteur

vitesse \vec{V} et de la constante des aires $\vec{C} = \frac{\vec{L}}{m}$?

b°) Exprimer, pour le point matériel M, la constante \vec{C}_0 à l'instant $t = 0$. En déduire

la valeur de la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction de r, a et V_0 .

3°) Exprimer en fonction de V_0 et θ , les composantes radiale V_r et orthoradiale V_θ de la vitesse \vec{V} du point matériel M et écrire son expression vectorielle.

4°) a°) Quelle est, dans le cas général, l'expression, dans la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$), du vecteur accélération $\vec{\gamma}$?

b°) Montrer que la composante γ_θ de l'accélération du point matériel M suivant \vec{e}_θ est nulle.

c°) Exprimer alors l'accélération du point matériel M dans la base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$), en fonction de V_0 , θ et $\frac{d\theta}{dt}$, puis en fonction de a, V_0 et r. En déduire que la

fonction $\varphi(r)$ est de la forme : $-\frac{K}{r^5}$ où K est une constante que l'on précisera.

5°) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle U dont dérive le champ de force \vec{F} , en considérant le potentiel nul à l'infini, en fonction de m, K et r.

EXERCICE N°2 :

Une masse m d'un gaz parfait, de masse molaire M , décrit de façon réversible le cycle de Carnot ABCDEFA :

- AB est une détente isotherme à $T_1 = \text{constante}$,
- BC est une détente adiabatique,
- CD est une compression isotherme à $T_3 = \text{constante}$,
- DE est une compression adiabatique,
- EF est une compression isotherme à $T_2 = \text{constante}$, et
- FA est une compression adiabatique.

On désigne par (P_A, V_A) , (P_B, V_B) les pressions et volumes du gaz aux états d'équilibre A, et B et on prendra $\gamma = 1,4$. On rappelle que $T_1 > T_2 > T_3$.

1°) Représenter le cycle de transformations dans le diagramme de Clapeyron

2°) Montrer que :

- a°) La quantité de chaleur Q_1 échangée au cours de AB est une fonction de V_A et V_B
- b°) La variation d'énergie interne ΔU_{BC} est une fonction de T_1 et T_3 .
- c°) La quantité de chaleur Q_3 échangée au cours de CD est une fonction de P_C et P_D
- d°) La pression P_E est une fonction de P_D , T_2 et T_3 .
- e°) La quantité de chaleur Q_2 échangée au cours de EF est une fonction P_A , P_D , T_1 et T_3 .

f°) Le travail W_{FA} est une fonction de P_A , P_F , V_A , et V_F .

3°) Vérifier l'égalité de Clausius : $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$.

fonction de V_0 , G et $\frac{m}{\rho}$, prise en ...

fonction $\phi(r)$ est de la forme $\frac{K}{r^2}$ ou K et

5°) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle en considérant le potentiel nul à l'infini, et

2006

CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAC

EPREUVE DE PHYSIQUE

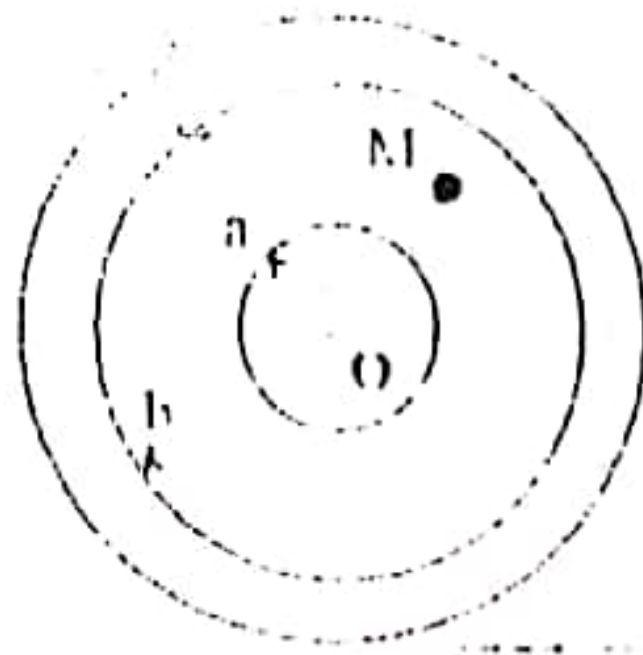
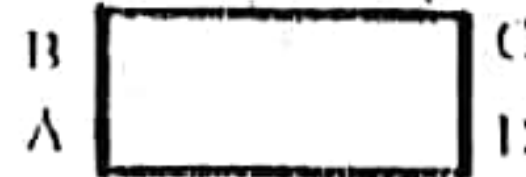
NIVEAU INGÉNIEUR

SUJET N°10

DURÉE : 3 HEURES

Exercice n°1

On considère une ligne de transmission coaxiale constituée comme indiqué sur la figure par deux cylindres de très grande longueur et de même axe Oz .


 $(OM; Oz) = 0; OM = r$


Le cylindre (1) plein a un rayon a , le cylindre extérieur (2) creux a un rayon intérieur b . Ces deux cylindres sont métalliques de conductibilité infinie. Un point compris entre les deux cylindres sera défini par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . L'espace compris entre les 2 cylindres est le vide. A une des extrémités de cette ligne de côté $z = 0$ est appliquée une tension alternative $V = V_0 \cos \omega t$.

1°) On admettra que le champ électrique dans l'espace vide séparant les conducteurs est donné par

$$E_r = r^n - \frac{V_0}{h} \frac{\cos \omega(t - \frac{z}{c})}{\log \frac{b}{a}}$$

$$E_\theta = E_z = 0$$

- 1) Déterminer la valeur de n pour laquelle le champ électrique satisfait à l'équation de propagation des ondes et aux conditions aux limites.
- 2) Déterminer en un point M quelconque entre les 2 conducteurs les composantes B_r, B_θ et B_z du champ magnétique.

Application Numérique :

Donner l'amplitude du vecteur champ magnétique pour les valeurs

$$r = a = 1 \text{ cm} \quad \text{et} \quad r = b = 5 \text{ cm} \quad \text{avec} \quad V_0 = 10 \text{ V} \quad \text{et} \quad \log 5 = 1,6$$

- 3) Calculer la circulation du champ électrique le long du parcours ABCD indiqué sur la figure.
- 4) Calculer le vecteur de POYNTING et déterminer la puissance moyenne transportée par le champ électromagnétique dans l'espace séparant les 2 cylindres et traversant un plan de côté z (élément de surface $dS = r dr d\theta$).
- 5) Quelle serait la valeur de la résistance R_0 qui dissiperait la même puissance moyenne si on lui appliquait la même différence de potentiel ?

On donne en coordonnées cylindriques

$$\Delta \bar{A} = \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} - \frac{\bar{A}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2}$$

$$\bar{A}(A_r, A_\theta, A_z) \Rightarrow \text{rot} \bar{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Exercice n°2

1°) Dans une diffusion Compton, un photon incident, de fréquence ν_0 de longueur d'onde λ_0 , rencontre un électron supposé libre et au repos de masse m . Après le choc élastique, le photon diffusé, de longueur d'onde λ_0' se propage dans une direction faisant un angle θ avec la direction Ox du photon incident ; et l'électron se déplace avec une vitesse v faisant un angle φ avec Ox. On pose

$$\alpha = \frac{h\nu_0}{mc^2}$$

Calculer :

- a) La variation relative de la longueur d'onde de la radiation : $\frac{\lambda_0 - \lambda_0'}{\lambda_0}$ en fonction de l'angle de diffusion θ et du rapport α ; en déduire la longueur d'onde du photon émergent, lorsque la diffusion se fait à 90° ;
- b) L'énergie du photon diffusé en fonction de θ et de α ; cas où $\theta=90^\circ$.
- c) Exprimer $\text{tg } \varphi$ en fonction de θ et α ; calculer φ pour $\theta=90^\circ$.

2°)

- a) Etablir la relation entre les angles θ et φ , β figurant comme seul paramètre dans cette relation ($\beta=v/c$). Simplifier cette relation dans le cas où la vitesse de recul de l'électron est petite devant la célérité c de la lumière.
- b) Posons $t = \text{tg } \varphi/2$ montrer que t vérifie une équation du second degré, θ , β et α sont donnés.
Application numérique : on donne l'angle $\theta=90^\circ$ on demande de calculer β en prenant pour valeur de φ celle calculée à la question 1) c)

3°) On réalise une collision Compton entre un photon de longueur d'onde λ_0 , se propageant suivant l'axe Ox vers les x positifs, et un électron qui se dirige vers les x négatifs avec une énergie cinétique $T=0,5\text{MeV}$, dans le référentiel du laboratoire (R_0). Déterminer :

- a) La longueur d'onde λ du photon dans le référentiel (R) lié à l'électron.
- b) La direction du photon diffusé, dans le référentiel du laboratoire (R_0), sachant que dans le référentiel (R) la diffusion se fait à 90° .
- c) La longueur d'onde λ_0' du photon diffusé dans le référentiel du laboratoire (R_0).

d) Calculer dans le laboratoire la perte d'énergie cinétique $T-T'$ de l'électron au cours de la collision, en fonction de α et α' ($\alpha' = h\nu_0'/mc^2$) où ν_0' est la fréquence du photon diffusé dans (R₀).

On donne :

- la longueur d'onde Compton : $h/mc = 0,024 \text{ \AA}$.
- la longueur d'onde du photon incident $\lambda_0 = 0,100 \text{ \AA}$.
- l'énergie de l'électron au repos : $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$.



POLYVALENT
CORPORATION

1

**CORRIGES ANCIENS SUJETS
PHYSIQUE ET
MATHÉMATIQUES**



**POLYVALENT
CORPORATION**

**Corrigé du concours d'entrée au Cycle d'ingénieur de
PEAMAC – session MAI 2015
Épreuve de Mathématiques**

Exercice 1 :

1.a) Montrons que $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ est un espace vectoriel. C'est facile à vérifier. Il faut savoir qu'un élément de \mathbb{R}^4 est $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ et montrer que \mathbb{R}^4 vérifie les axiomes suivants. et

$(\mathbb{R}^4, +)$ est un groupe $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^4 \text{ non vide (1)} \\ "+" \text{ loi de composition interne (2)} \\ "+" \text{ associatif (3)} \\ \mathbb{R}^4 \text{ admet un élément neutre pour la loi "+" (4)} \\ \text{tout élément symétrisable pour "+" dans } \mathbb{R}^4 \text{ (5)} \end{array} \right.$

(1) $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ car $0 \in \mathbb{R}$

(2) Soit $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$. Montrons que :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$$

En effet, $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i + b_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i + b_i \in \mathbb{R} \text{ d'où}$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$$

3) On a : $a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4), c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}$

Montrons que $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$a + b + c = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3, a_4 + b_4 + c_4)$$

Puisque $a_i + b_i + c_i \in \mathbb{R}$ et \mathbb{R} est associatif. $(a + b) + c = a + (b + c)$

4) L'élément neutre est $e = (0,0,0,0)$

$$\text{car } (a_1, a_2, a_3, a_4) + (0, 0, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3, a_4) \forall a \in \mathbb{R}^4$$

5) $\forall a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ chercher $a' \in \mathbb{R}^4$ tel que $a + a' = e$

Prendre $a' = -a$.

Vérifions de même que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^4, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^4 \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^4, 1 \cdot a = a$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^4 \quad a = \alpha(\beta a)$$

$$\text{NB: } a \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

b) Exemple de s.e.v de \mathbb{R}^4

$$1) E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathbb{R}^4, \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2) E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathbb{R}^4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2) E = \{(a, b, c, d)\} \in \mathbb{R}^4, \quad a + b + 3c + d = 0$$

NB: 1) Le principe est simple il ne faut pas de constante autre que 0, il ne faut pas avoir une multiplicative de composante.

2) On peut également démontrer cela en montrant les trois axiomes

$$\begin{cases} E \neq \emptyset \\ \forall a, b \in E, a + b \in E \\ \forall a \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda a \in E \end{cases}$$

2-Oui, c'est un espace vectoriel réel, (facile à vérifier) tout élément de \mathbb{C} est de la forme $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ et les corps de base et \mathbb{R})

Exercice 2 :

$$1) \text{ On donne : } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$a) \text{ On a } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right) \leftrightarrow \begin{matrix} l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 5l_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftrightarrow -\frac{1}{11}l_2 - 2l_1 \\ \leftrightarrow l_3 - 5l_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftrightarrow l_2 - 5l_1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ donc}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{14}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 = \frac{1}{11} \\ x_2 + \frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 = \frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}(1 - 14x_3 + 2x_4) \\ x_2 = \frac{1}{11}(2 - 6x_3 - 7x_4) \end{cases}$$

Donc

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \frac{1}{11}(1 - 14x_3 + 2x_4) \text{ et } x_2 = \frac{1}{11}(2 - 6x_3 - 7x_4) \right\}$$

$$\Delta = 6 \quad \Delta x_1 = 6 \quad \Delta x_2 = 12 \quad \Delta x_3 = -12$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$S = \{1, 2, -2\}$$

Exercice 3 :

1.a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et $g(x) = \arctan x$ ont les mêmes dérivées sur $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$

Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \\ &= \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = g'(x)$$

b) On a : $f'(x) = g(x)$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) + k; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(0) = \arctan(1) = g(0) + k = 0 + k$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = g(x) + \frac{\pi}{4} \quad \forall x \in E$$

2.a) On a : $(\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}$

$$= e^{x \ln \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{e^5}{5!} \right)}$$

$$= e^{x \ln x} \times e^{x \ln \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{e^4}{5!} \right)}$$

$$= e^{x \ln x} \times e^{x \left(\frac{x^2}{3!} + \frac{e^4}{5!} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x}$

On pose $X = x - \frac{\pi}{2}$, $x = X + \frac{\pi}{2}$

$$(\tan)^{2 \cos x} = \left(-\frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-2 \sin x} = e^{-2 \sin x \ln(\cos x)} \times e^{2 \sin x \ln(\sin(-x))}$$

$$= e^{-2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)} \times e^{2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln \left(-x + \frac{x^3}{6} \right)}$$

$$= e^{-2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \left(-\frac{x^2}{2} \right)} \times e^{2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln(-x)} \times e^{2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} \right)}$$

$$= e^{+2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \frac{x^2}{2}} \times e^{2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \ln(-x)} \times e^{-\frac{1}{3} x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2 \frac{x^3}{2} \left(1 - \frac{x^2}{6} \right)} \times e^{2x \ln(-x) \left(1 - \frac{x^2}{6} \right)} \times e^{-\frac{1}{3} x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} \right)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{2 \cos x} = 1$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x \ln(1+x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{(\ln x)} = 1$$

Exercice 4 :

$$\begin{aligned} 1.a) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right)^2 dx &= \int \left(x + 2x^{\frac{11}{6}} + \frac{1}{x^3} \right) dx \\ &= \int x dx + 2 \int x^{\frac{11}{6}} dx + \int \frac{dx}{x^3} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{1+\frac{11}{6}} x^{\frac{11}{6}+1} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}-1\right)x^{\frac{2}{3}-1}} + k \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}} + k \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right)^2 dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} b) \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx &= \int e^{x \ln 2} \times e^{2x \ln 3} \times e^{3x \ln 5} dx \\ &= \int e^{(x \ln 2 + 2x \ln 3 + 3x \ln 5)} dx \\ &= \int e^{x(\ln 2 + 2 \ln 3 + 3 \ln 5)} dx \\ &= \frac{1}{\ln 2 + 2 \ln 3 + 3 \ln 5} e^{x \ln 2 + x \ln 9 + x \ln 125} \\ &= \frac{1}{\ln(2 \times 9 \times 125)} e^{x \ln(2 \times 9 \times 125)} = \frac{1}{\ln(2250)} e^{\ln(2250)x} \end{aligned}$$

$$\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx = \frac{1}{\ln(2250)} e^{x \ln(2250)}$$

$$\begin{aligned} c) \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 dx &= \int \left(\frac{\tan x^2 + 1}{\tan x} \right)^2 dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \times \cos^2 x dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \tan^2 x)}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{d(\tan x)}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 dx &= \frac{1}{\sin^2 x} \times \tan x - \int \tan x \left(-\frac{2 \cos x \sin x}{\sin^4 x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} \times \tan x + 2 \int \tan x \times \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} + 2 \int \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} + 2 \int \frac{dx}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

On pose $t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$, $dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{2(1+t^2)}{4t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} t + k, k \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + k$$

$$\Rightarrow \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 dx = \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)} + \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) + k$$

d) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{3x}{(1+x^2)^2} \right) dx$ (décomposition en éléments simples)

$$= \int \frac{x}{1+x^2} dx - 3 \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2} \times \frac{1}{1+x^2} + k$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3}{2(1+x^2)} + k$$

2) $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{9}{4} x$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + 9x} dx$$

$$= \frac{1}{18} \int_0^1 9(4 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{18} \times \frac{1}{+\frac{3}{2}} \left[(4 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27} \left((4 + 9)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{27} (13^{\frac{3}{2}} - 8)$$



POLYVALENT
CORPORATION

LES EPS - EPS CAMEROUIN

**Corrigé du concours d'entrée au Cycle d'ingénieur de
l'ÉAMAC – session MAI 2014
Épreuve de Mathématiques**

EXERCICE 2 :

1) Montrons que \sqrt{I} est un idéal.

Montrons d'abord que \sqrt{I} est un sous-groupe de A . On remarque que $I \subset \sqrt{I}$, donc $0 \in \sqrt{I}$. Soit $x, y \in \sqrt{I}$, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x^n, y^m \in I$.

$$\text{Alors } (x - y)^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} x^k (-y)^{n+m-1-k}.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n+m-1\}$ soit $k \geq n$, soit $n+m-1-k \geq m$, donc tous les éléments de la somme sont dans I , et la somme elle-même est dans I . Il reste à prouver que \sqrt{I} est stable par multiplication par les éléments de l'anneau A . Soit $x \in \sqrt{I}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$ et $a \in A$. Alors $(ax)^n = a^n x^n \in I$.

2) Que se passe-t-il si $I = 0$?

Si $I = 0$ alors $\sqrt{0}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de A .

3) Montrons que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cdot J}$

Soit $x \in \sqrt{I \cdot J}$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2n} \in I \cdot J$. On remarque que $I \cdot J \subset I \cap J$, donc $x^{2n} \in I \cap J$. On a donc $\sqrt{I \cdot J} \subset \sqrt{I \cap J}$.

Soit $x \in \sqrt{I \cap J}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2n} \in I \cap J$. Alors $x \in \sqrt{I}$ et $x \in \sqrt{J}$. On a donc $\sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Soit enfin $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $x^{2n} \in I$ et $x^{2m} \in J$. Alors $x^{2(n+m)} = x^{2n} x^{2m} \in I \cdot J$, donc $x \in \sqrt{I \cdot J}$. On a donc $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cdot J}$.

Finalement, on a la succession d'inclusions.

$$\sqrt{I \cdot J} \subset \sqrt{I \cap J} \subset \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subset \sqrt{I \cdot J}. \quad \text{Toutes les inclusions sont donc des égalités.}$$

4) Quel est le radical d'un idéal premier J ?

5) Déterminons complètement le radical d'un idéal $J = \sqrt{m\mathbb{Z}}$ de \mathbb{Z} où $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$

Notons $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de m en facteurs premiers. On montre alors que $\sqrt{m\mathbb{Z}} = p_1 \dots p_r \mathbb{Z}$.

D'après la deuxième question,

$$\begin{aligned}\sqrt{mZ} &= \sqrt{p_1^{a_1}Z \cap \dots \cap p_r^{a_r}Z} \\ &= \sqrt{p_1Z \cap \dots \cap p_rZ} \\ &= \sqrt{p_1 \dots p_r Z}\end{aligned}$$

On vérifie alors facilement que puisque les p_i sont premiers.

$$\sqrt{p_1 \dots p_r Z} = p_1 \dots p_r Z.$$

6) Déterminons $I + J$; $I \cap J$ et \sqrt{I} pour :

a) $I = 8Z$ et $J = 12Z$ dans Z

b) $I = (X - 1)$ et $J = (X)$ dans $Z[X]$

C'est trivial, nous invitons le lecteur à le faire.



POLYVALENT
CORPORATION

**Corrigé du concours d'entrée au Cycle d'ingénieur de
l'EAMAC - session MAI 2013
Épreuve de Mathématiques**

Exercice 2

- Déterminons d'abord le rayon de convergence de cette série. Posons $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ alors,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = (-1)^n \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{(-1)^{n-1} n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + n} \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = 1 \text{ d'où}$$

- On a $\frac{n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{n+1} + \frac{2}{n+2}$ Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+2} \text{ On a}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n (n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^n = \frac{-x}{1+x} \text{ Donc}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = - \int \frac{x}{1+x} dx = - \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = -x + \ln(x+1)$$

Par ailleurs, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2) x^{n+1}}{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^{n+1} = -x \sum_{n=1}^{+\infty} (-x)^n = \frac{-x^2}{1+x}$ Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} x^{n+2} = \int \frac{-x^2}{1+x} dx = \int \left(-x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{-x^2}{2} - x + \ln(x+1)$$

Ainsi donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -x + \ln(x+1) + \frac{2}{x} \left(\frac{-x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) = -x + \ln(x+1) + x - 2 + \frac{2 \ln(x+1)}{x} = \ln(x+1) \left(1 + \frac{2}{x} \right) - 2$$

Exercice 3

$$f(x, y, z) = 2x^3 yz - x^2 - y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 yz - 2x = 2x(3xyz - 1); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 z - 2y = 2(x^3 z - y); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3 y - 2z = 2(x^3 y - z) \text{ On a donc}$$

$$\begin{cases} 2x(3xyz-1) = 0 & (1) \Rightarrow x = 0 \text{ ou } xyz = \frac{1}{3} \\ 2(x^3z - y) = 0 & (2) \\ 2(x^3y - z) = 0 & (3) \end{cases}$$

Si $x = 0$, alors $y = z = 0$.

Si $xyz = \frac{1}{3}$, alors (2) $\Rightarrow y = x^3z$ et (3) $\Rightarrow z = x^3y$ D'où $y = x^3(x^3y) = x^6y \Rightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ D'où

$$\begin{cases} yz = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \\ z = \pm y \end{cases}$$

Exercice 4

1)

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \cos(2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha$$

$$\text{Donc } \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha + (2\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 4\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 4\alpha = \sin(3\alpha + \alpha) = \sin 3\alpha\cos\alpha + \cos 3\alpha\sin\alpha \text{ Or } \sin 3\alpha = 4\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \end{aligned}$$

D'où $\sin 4\alpha = \cos\alpha\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\sin\alpha$ et

$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\sin\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 1) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$$

2) Relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2} : On a

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a-\lambda & b & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & b & a-\lambda & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & b & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)P_{n-1}(\lambda) - b^2P_{n-2}(\lambda)$$

$$\Rightarrow P_n(\lambda) = (a-\lambda)P_{n-1}(\lambda) - b^2P_{n-2}(\lambda)$$

3) Calculons $P_2(\lambda)$ et $P_3(\lambda)$ en fonction de α :

$$P_2(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = (a-a-2b\cos\alpha)^2 - b^2 = 4b^2\cos^2\alpha - b^2 = b^2(4\cos^2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow P_2(\lambda) = b^2(4\cos^2\alpha - 1) = b^2 \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = (-b)^2 \frac{\sin((2+1)\alpha)}{\sin \alpha}$$

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & b \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)P_2(\lambda) - b(b(a-\lambda)) = (a-\lambda)[b^2(4\cos^2\alpha - 1)] - b^2(a-\lambda)$$

$$= (a-\lambda)[b^2(4\cos^2\alpha - 1) - b^2] = (a-\lambda)(4b^2\cos^2\alpha - b^2 - b^2) = -2b\cos\alpha(4b^2\cos^2\alpha - 2b^2)$$

$$\Rightarrow P_3(\lambda) = -4b^3\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - b^3(8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha) = -b^3 \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} = (-b)^3 \frac{\sin((3+1)\alpha)}{\sin \alpha}$$

Déduisons-en $P_n(\lambda)$ en fonction de α :

On a par conjecture : $P_n(\lambda) = (-b)^n \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$

- Preuve par récurrence sur n (récurrence forte) :

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on a $P_2(\lambda) = (-b)^2 \frac{\sin((2+1)\alpha)}{\sin \alpha}$ et $P_3(\lambda) = (-b)^3 \frac{\sin((3+1)\alpha)}{\sin \alpha}$

Soit $n > 3$, supposons que $\forall 3 < k \leq n, P_k(\lambda) = (-b)^k \frac{\sin((k+1)\alpha)}{\sin \alpha}$ et montrons que

$$P_{n+1}(\lambda) = (-b)^{n+1} \frac{\sin((n+2)\alpha)}{\sin \alpha}. \text{ On sait que } P_n(\lambda) - (a-\lambda)P_{n-1}(\lambda) + b^2P_{n-2}(\lambda) = 0 \text{ alors,}$$

$$P_{n+1}(\lambda) = (a-\lambda)P_n(\lambda) - b^2P_{n-1}(\lambda) = -2b\cos\alpha P_n(\lambda) - b^2P_{n-1}(\lambda)$$

$$= -2b\cos\alpha(-b)^n \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha} - b^2(-b)^{n-1} \frac{\sin(n\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{-2\cos\alpha(-b)^{n+1}\sin((n+1)\alpha) - (-b)^{n+1}\sin(n\alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{(-b)^{n+1}}{\sin \alpha} (-2\cos\alpha\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha)) \text{ or } \sin((n+2)\alpha) = \sin((n+1)\alpha + \alpha)$$

$$= \sin((n+1)\alpha)\cos\alpha + \cos((n+1)\alpha)\sin\alpha = \sin((n+1)\alpha)\cos\alpha + \frac{1}{2}[\sin((n+2)\alpha) + \sin(n\alpha)]$$

$$\text{avec } \frac{1}{2}\sin((n+2)\alpha) = \sin((n+1)\alpha)\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin(n\alpha)$$

$$\text{d'où } \sin((n+2)\alpha) = 2\cos\alpha\sin((n+1)\alpha) + \sin(n\alpha) \Rightarrow P_{n+1}(\lambda) = (-b)^{n+1} \frac{\sin((n+2)\alpha)}{\sin \alpha}$$

4) valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A : $P_n(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-b)^n \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha} = 0 \Rightarrow \sin((n+1)\alpha) = 0$

$\Rightarrow (n+1)\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $\lambda_k = a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), 1 \leq k \leq n$

Valeur propre de V_k associée à λ_k : on a $(x_1, \dots, x_n) \in E_{\lambda_k}$ alors,

$$\forall A \cdot V_k = \lambda_k \cdot V_k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & b & a & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_k x_n \end{pmatrix}$$

d'où le système suivant :

- (1) $(a - \lambda_k)x_1 + bx_2 = 0$
- (2) $bx_1 + (a - \lambda_k)x_2 + bx_3 = 0$
- (3) $bx_2 + (a - \lambda_k)x_3 + bx_4 = 0$
- ...
- $bx_{n-2} + (a - \lambda_k)x_{n-1} + bx_n = 0$ (n-1)
- $bx_{n-1} + (a - \lambda_k)x_n = 0$ (n)

(1) $\Rightarrow bx_2 = (\lambda_k - a)x_1 = 2b \cos(\alpha_k)x_1 \Rightarrow x_2 = 2 \cos(\alpha_k)x_1$

(2) $\Rightarrow bx_1 = -bx_2 + (\lambda_k - a)x_3 = -bx_2 + 2b \cos(\alpha_k)x_3$
 $\Rightarrow x_1 = -x_2 + 2 \cos(\alpha_k)x_3 = -x_2 + 2 \cos(\alpha_k)(2 \cos(\alpha_k)x_2) = x_2(-1 + 4 \cos^2 \alpha_k) = \frac{\sin(3\alpha_k)}{\sin \alpha_k} x_2$

(3) $\Rightarrow bx_3 = -bx_2 + (\lambda_k - a)x_4 = -bx_2 + 2b \cos(\alpha_k)x_4$
 $\Rightarrow x_3 = -x_2 + 2 \cos(\alpha_k)x_4 = -2 \cos \alpha_k x_2 + 2 \cos \alpha_k (4 \cos^2 \alpha_k - 1)x_4$
 $= [-2 \cos \alpha_k + 2 \cos \alpha_k (4 \cos^2 \alpha_k - 1)]x_4 = (-2 \cos \alpha_k + 8 \cos^3 \alpha_k - 2 \cos \alpha_k)x_4$
 $\Rightarrow (8 \cos^3 \alpha_k - 4 \cos \alpha_k)x_4 = \frac{\sin(4\alpha_k)}{\sin \alpha_k} x_4$

On en déduit que $\forall 2 \leq p \leq n, x_p = \frac{\sin(p\alpha_k)}{\sin \alpha_k} x_1$ (preuve par récurrence forte sur n)

Donc $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, \frac{\sin(2\alpha_k)}{\sin \alpha_k} x_1, \dots, \frac{\sin(n\alpha_k)}{\sin \alpha_k} x_1 \right) = x_1 \left(1, \frac{\sin(2\alpha_k)}{\sin \alpha_k}, \dots, \frac{\sin(n\alpha_k)}{\sin \alpha_k} \right)$
 $= \frac{x_1}{\sin \alpha_k} (\sin \alpha_k, \sin(2\alpha_k), \dots, \sin(n\alpha_k))$

$$\begin{aligned} \text{D'où } V_k &= (\sin \alpha_k, \sin(2\alpha_k), \dots, \sin(n\alpha_k)) = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right) \\ &= (\sin w_k, \sin(2w_k), \dots, \sin(nw_k)), \text{ avec } w_k = \frac{k\pi}{n+1} \end{aligned}$$



POLYVALENT
CORPORATION

Exercice 1 :

1.

- Développement de $\cos^3 x$

La fonction $f : x \mapsto \cos^3 x$ est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Donc les conditions de Dirichlet sont satisfaisantes pour f . f admet donc un développement en série de Fourier de la forme :

$$F(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \neq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$\text{Avec } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Or f est paire $\Rightarrow x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire et $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } b_n = 0$$

$$\text{On a } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 x dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^3 x \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{\pi} (\cos(n+3)x) + \cos((3-n)x) dx + 3 \int_0^{\pi} (\cos(n+1)x) + \cos((n-1)x) dx \right]$$

(Par linéarisation de $\cos^3 x$ et transformation du produit $\cos a \cos b$ en somme

$$\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{n+3} \sin((n+3)x) + \frac{1}{n-3} \sin((n-3)x) \right]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{3}{4\pi} \left[\frac{1}{n+1} \sin((n+1)x) + \frac{1}{n-1} \sin((n-1)x) \right]_0^{\pi} \text{ [avec } n \neq 1 \text{ et } n \neq 3]$$

$$= 0$$

Calculons a_1 et a_3

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{\pi} (\cos(4x) + \cos(2x)) dx + 3 \int_0^{\pi} (\cos 2x + 1) dx \right] = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^\pi (\cos 6x + 1) dx + 3 \int_0^\pi (\cos 4x + \cos 2x) dx \right] = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } SF(f)(x) = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos(3x)$$

- Développement en série de Fourier de $\cos^4 x$

$$\text{Posons } g(x) = \cos^4 x$$

Alors $g(x) = \cos x \cdot f(x)$; donc g possède un développement en série sur Fourier donné par :

$$\begin{aligned} SF(g)(x) &= \cos x \cdot SF(f)(x) = \frac{3}{4} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos x \cos(3x) \\ &= \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

2. On utilise l'intégrale de Parseval : $\frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) \right) = \pi (a_1^2 + a_3^2) \\ &= \frac{5\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 x dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + a_2^2 + a_4^2 \right) = \frac{35\pi}{64}$$

Exercice 2 :

1. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit $(E, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ un espace euclidien

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in E \times E, \quad |\langle x / y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Donc, posons $E = I([a, b])$ et $\langle f / g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)$ et mq $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

(a) Mq $\langle \cdot / \cdot \rangle$ est forme bilinéaire sur E .

$$\text{Soit } f, g, h \in E, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g / h \rangle &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) h(x) dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x) h(x) dx + \beta \int_a^b g(x) h(x) dx \\ &= \alpha \langle f / h \rangle + \beta \langle g / h \rangle \end{aligned}$$

De même, on montre que $\langle f / \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f / g \rangle + \beta \langle f / h \rangle$

(b) Symétrie

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f / g \rangle = \langle g / h \rangle \quad (\text{évident})$$

(c) Positivité

$$\forall f \in E, \langle f/f \rangle \geq 0 \quad (\text{évident})$$

(d) Séparation : $\forall f \in E, \langle f/f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

Conclusion : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E ; on peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\langle f/g \rangle$ et on a :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

Exercice 3 :

1. Valeurs propres et vecteurs propres de A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left(\frac{1}{12} \right)^3 \begin{vmatrix} 9-12\lambda & 3 & 2 \\ -1 & 5-12\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 8-12\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-12\lambda^3 + 22\lambda^2 - 12\lambda + 2) \times \frac{1}{12}$$

$$(x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right)$$

$$S_p(A) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \langle (1, 0, 1) \rangle$$

$$(x, y, z) \in E_{1/2} \Leftrightarrow \left(A - \frac{1}{2}I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_{1/2} = \langle (1, -1, 0) \rangle$$

$$(x, y, z) \in E_{1/3} \Leftrightarrow \left(A - \frac{1}{3}I \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow E_{1/3} = \langle (0, 1, -1) \rangle$$

2. Déterminons u_n, v_n, w_n

$$\text{On a } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \\ w_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } A^n = PD^nP^{-1}$$

$$\text{Le calcul de } P^{-1} \text{ donne } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } u_n = \frac{u_0}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + \frac{v_0}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + \frac{w_0}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

$$v_n = \frac{u_0}{2} \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + \frac{v_0}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + \frac{w_0}{2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

$$w_n = \frac{u_0}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + \frac{v_0}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + \frac{w_0}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

Exercice 4 :

1. Espérance et dispersion de la v à x

$$E(x) = \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

= 0, car la fonction $x \mapsto x\sqrt{a^2 - x^2}$ est impaire.

2. Fonction de réparation de x

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -a \\ \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^x \sqrt{a^2 - t^2} dt & \text{si } x \in]-a, a[\\ \frac{2}{\pi a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - t^2} dt & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

$$\text{Calculons } \int \sqrt{a^2 - t^2} dt$$

En posant $t = a \cos \theta$, on a $\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \int a / \sin \theta (-a \sin \theta) d\theta$

$$= a^2 \int \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos^2 \theta) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\operatorname{Arctos} \frac{t}{a} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \operatorname{ar} \cos \frac{t}{a} \right) \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{Arcos} \frac{t}{a} \pm \frac{t}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a} \right)^2} \right)$$

Donc pour $a < x < a$, $F(x) = \frac{a}{\pi} \left(\operatorname{Ar} \cos \left(\frac{x}{a} \right) \pm \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} + \pi \right)$

Pour $x \geq a$, $F(x) = \frac{b}{\pi} (0 - (-\pi)) = 1$



POLYVALENT
CORPORATION

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES D'INGENIEUR ET DE CONTROLEUR DE LA
CIRCULATION AERIENNE DE L'EAMAC**

SESSION 2011

Corrigé EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

La valeur moyenne de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 + \tan^2 x} dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + \mu^2)(\mu^2 + 4)}, \text{ avec } \mu = \tan x \\
 &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + \mu^2} - \frac{1}{4 + \mu^2} \right) d\mu, \text{ après décomposition en éléments simples.} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos(\lambda x) dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos(\lambda x) dx$$

Au vge de 0, on a $\cos \lambda x = 1 - \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^2 + 0(x^2)$ et $e^{-\beta x} = 1 - \beta x + \frac{(\beta x)^2}{2!} + 0(x^2)$

$$\text{Donc } (1 - e^{-\beta x}) \cos(\lambda x) = \frac{\lambda^2 x^2}{4} + 0(x^2) \Rightarrow \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} = \frac{\lambda^2 x}{4} + 0(x)$$

D'où $I = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos(\lambda x) dx$ converge $\forall \lambda, \beta$

$$|J| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} dx$$

Exercice 3 :

Il s'agit d'une équation de Riccati

- Solution particulière.

$$\text{On a } y' - \frac{1}{x} y^2 + \frac{2x+1}{x} y = x+2$$

Donc on peut chercher une solution particulière y_0 sous la forme $ax+b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

En dérivant y_0 et en reportant dans l'équation initiale, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2a - a^2 = 1 \\ a + b - ab = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ et } b = 0 \\ b - b^2 = 0 \end{cases}$$

D'où $y_0 = x$

- Posons $z = y - y_0$, dérivons et reportons dans l'équation initiale.

On trouve $z' + \frac{z}{x} = \frac{z^2}{x}$ qui est une équation de Bernoulli en z .

On trouve $\mu' - \frac{\mu}{x} = \frac{1}{x}$ qui a pour solution $\mu = Ax + 1$, $A \in \mathbb{R}$

D'où $z = \frac{1}{-Ax+1}$ et $y = z + y_0 = \frac{1}{-Ax+1} + x$, $A \in \mathbb{R}$

- Déterminons la constante A .

$$\int_1^2 (y-x)^2 dx = \int_1^2 \frac{1}{(-Ax+1)^2} dx = \frac{1}{A} \cdot \frac{+1}{-Ax+1}$$

$$\text{Donc } \int_1^2 (y-x)^2 dx = 1 \Leftrightarrow A(2A-3) = 0$$

$$\text{D'où } A \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}x} + x$$

$$A = 0 \Rightarrow y = x + 1$$

Exercice 4 :

1.

- Rayon de convergence

$$\text{En posant } x = \tilde{x}^3, \text{ on a } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{(3n)!}$$

$$\text{Le rayon de convergence de } g(x) \text{ est } R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+3)!}{(3n)!} = +\infty$$

On en déduit le rayon de convergence de $f(x)$ est aussi $R = +\infty$

- Equation différentielle

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n}}{(3n)!}, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (3n) \frac{x^{3n-1}}{(3n)!}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (3n)(3n-1) \cdot \frac{x^{3n-2}}{(3n)!}, f'''(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n (3n)(3n-1)(3n-2) \frac{x^{3n-3}}{(3n)!}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} (3n+3)(3n+2)(3n+1) \frac{x^{3n}}{(3n+3)!} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{(3n)!} \\ &= - \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n}}{n!} - 1 + \frac{x^3}{6} \right] = - \left(f(x) - 1 + \frac{x^3}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'''(x) + f(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$$

$$2. \quad y'''(x) + f(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$$

- Equation homogène : $y''' + y = 0$ a pour solution

$$y = Ae^x - e^{x/2} \left[B \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right], A, B, C \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière : de la forme $y_0 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \lambda x + \gamma$

$$\text{On trouve } y_0 = 1 - \frac{x^3}{6}$$

- D'où la solution générale :

$$y = y + y_0$$

$$y = Ae^x - e^{x/2} \left[B \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] + 1 - \frac{x^3}{6}; A, B, C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad f'(0) = 0 \Rightarrow A - B = -1$$

$$y' = Ae^x - \frac{1}{2} e^{x/2} \left[B \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] - e^{x/2} \left[-\frac{B\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{C\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] - \frac{x^2}{2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow A - \frac{B}{2} - \frac{C\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$y'' = Ae^x - \frac{1}{4} e^{x/2} \left[B \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + C \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] - e^{x/2} \left[-\frac{B\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{C\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$

$$- \frac{1}{2} e^{x/2} \left[-\frac{B\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{x\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right] - e^{x/2} \left[\frac{-3B}{4} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3C}{4} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \right]$$

-x

$$f''(0) = 0 \Rightarrow A - B - \frac{C\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{D'où le système } \begin{cases} A - B = 1 \\ A - \frac{B}{2} - \frac{C\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow A = -1, B = 0 \text{ et } C = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ A - B - \frac{C\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } f(x) = -e^x + \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + 1 - \frac{x^3}{6}$$

$$S = f(1) = -e + \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5}{6}$$



POLYVALENT
CORPORATION

**CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'EAMAC
SESSION 2010**

Corrigé EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

On a $\frac{x^3 \sin y}{\frac{dx}{dy}} + 2y = \frac{x}{\frac{dx}{dy}} \Leftrightarrow x^3 \sin y + 2yx' = x$, avec $x' = \frac{dx}{dy}$, $x' \neq 0$

Donc $x' + \frac{\sin y}{2y} x^3 - \frac{x}{2y} = 0$ (C'est une équation de Bernoulli en x, avec.

On pose $z = \frac{1}{x^2}$; alors $z' = -2x'x^{-3}$ et l'équation devient :

$$\frac{-z'}{2} - \frac{z}{2y} + \frac{\sin y}{2y} = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{z}{y} - \frac{\sin y}{y} = 0$$

- L'équation homogène donne $z' + \frac{z}{y} = 0$, avec pour solution $Z = \frac{K}{y}$; $K \in \mathbb{R}$
 - On cherche une solution particulière par la variation de la constante : $z_0 = \frac{-\cos y}{y}$
 - Donc la solution générale de l'équation initiale ; $x^2 = \frac{K}{k - \cos y}$; $k \in \mathbb{R}$
- Or $z = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{z}$
- D'où la solution générale de l'équation initiale ; $x^2 = \frac{y}{k - \cos y}$; $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. La matrice de f relativement à la base B est donnée par :

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } M_{B'}(f) = T.M_B(f).T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Le polygone caractéristique de $M_{B'}(f) = A$ est :

$$P(x) = |A - xI_4| = x^4$$

$$(x, y, z, t) \in E_0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_0 = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$$

Donc A n'est pas diagonalisable

Comme A est racine de son polynôme caractéristique (théorème de Cayley-Hamilton), on a $A^n = 0, \forall n \geq 4$

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2 A$$

Exercice 3 :

- Domaine de définition de f

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{|x|}{n^2 + x^2} \leq \frac{|x|}{n^2}$, et pour x fixé, la série numérique de t.g $\frac{|x|}{n^2}$ est convergente comme série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha = 2 > 1$ comme la série num. de t.g $\frac{|x|}{n^2 + x^2}$ est positive, on en déduit qu'elle converge aussi.

D'où $Df = \mathbb{R}$.

- Dérivabilité de f

Posons $f_n(x) = \frac{|x|}{n^2 + x^2}, n \in \mathbb{N}^*$

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur \mathbb{R} comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

* On a $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + 1}$ qui est de t.g d'une numérique convergente.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[$, on a $f'_n(x) = \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}$

* $\forall a, b \in [0, +\infty[/ a < x < b$ on a $\frac{n^2 - b^2}{(n^2 + b^2)^2} \leq f'_n(x) \leq \frac{n^2 - a^2}{(n^2 + a^2)^2} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$

La série de t.g $\frac{1}{n^2}$ est convergente ; donc la série de fonction de t.g $f'_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle borné de $[0, +\infty[$.

Donc f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-\infty, 0[$, on a $f'_n(x) = \frac{-x}{n^2 + x^2} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{x^2 - n^2}{(n^2 + x^2)^2}$

$$\text{Donc } f'_n(x) = \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} - \frac{n^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

$$\text{Donc } |f'_n(x)| \leq \frac{x^2}{(n^2 + x^2)^2} + \frac{n^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

$$< \frac{a^2}{n^4} + \frac{n^2}{n^4}, \text{ pour } a < x < b, a, b \in]-\infty; 0]$$

$$< \frac{a^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}$$

La série numérique de $\sum \mu_n = \frac{a^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}$ est convergente ; donc la série de fonctions de $\sum f'_n(x)$

converge normalement, et donc uniformément sur tout intervalle borné de $]-\infty, 0]$.

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 4 :

1^{ère} méthode : Formule de Green.

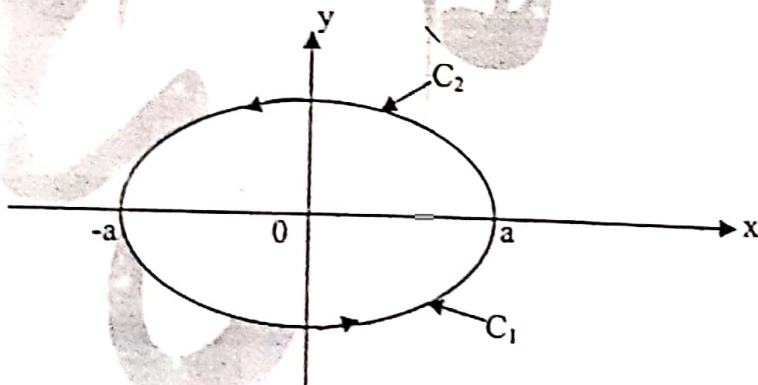
$$I = \iint_D \left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2)}{\partial y} \right) dx dy$$

= $\iint_D y^2 dx dy$, avec D = disque de centre O et de rayon a :

= $\int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin^2 \theta (r dr d\theta)$, par passage en coordonnées polaires.

$$= \frac{\pi^2 a^4}{8}$$

2^{ème} méthode : Calcul direct



- Sur C_1 , on a $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$, $dy = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, -a \leq x \leq a$

$$\text{Donc } I_1 = 2 \int_0^a \left(\frac{x^2(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - x^2 \right) dx$$

- Sur C_2 , on a $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dy = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, a \geq x \geq -a$

$$I_2 = \int_0^{-a} \left(x^2 (a^2 - x^2) \left(\frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) - x^2 dx \right)$$

$$= 2 \int_0^a \left(\frac{x^2 (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - x^2 \right) dx$$

$$\text{D'où } I = I_1 + I_2 = 4 \int_0^a \left(\frac{x^2 (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - x^2 \right) dx$$

On passe et on calcule I.



POLYVALENT
CORPORATION

Corrigé EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 :

$$e^{\frac{u}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (1), \quad e^{\frac{u}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

i) $\frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \tan \frac{v}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow v = y \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$

$$\text{Donc } \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\left(-\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \operatorname{Arc} \tan \frac{y}{x} + \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(1, 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } dv(1, 1) = \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) dx + \frac{\partial v}{\partial y}(1, 1) dy = -\frac{1}{2} dx + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) dy$$

ii) (1) $\Rightarrow e^{\frac{2u}{x}} \cos^2 \frac{v}{y} = \frac{x^2}{2}$ et (2) $\Rightarrow e^{\frac{2u}{x}} \sin^2 \frac{v}{y} = \frac{y^2}{2}$ (2)

$$(1') + (2') \rightarrow \frac{2u}{x} = \ln \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(1, 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } du(1, 1) = \frac{1}{2}(x + dy)$$

iii) $d^2u = d(du) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \right] dx \wedge dy$

Exercice 2 :

$$F(x) = \frac{1}{h^2} [\xi]_0^h \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta = \frac{1}{h} \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta$$

Posons $t = x + \xi + \eta \quad \backslash \quad dt = d\eta$

- Pour $\eta = 0, \quad t = x + \xi$

- Pour $\eta = h, \quad t = x + \xi + h$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{h} \int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(t) dt \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{h} [f(x + \xi + h) - f(x + \xi)]$$

$$\text{D'où } F''(x) = \frac{1}{h} [f'(x + \xi + h) - f'(x + \xi)]$$

Exercice 3 :

$$\text{Posons } F(x, y) = \int_0^x (x-t) t^2 \sqrt{y(t)} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 (5x-6t)y(t) dt + 2x$$

$$\text{Alors } F(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}(5x-6y)y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{x}$$

Exercice 4 :

$$\text{Posons } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} I & o \\ X & I \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} I & o \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA+C & XB+D \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} I & o \\ X & I \end{pmatrix} M$ est triangulaire par blocs si et seulement si $B=0$ ou $XA+C=0$.

Or $B \neq 0$, donc $XA+C=0$

$$\text{Or } xA+C = \begin{pmatrix} a & b & a+c \\ d & e & d+f \\ g & h & g+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $a=0, b=-1, d=-1, e=0, g=0, h=0, a+c=0, d+f=-1, g+i=-1$.

$$\text{D'où } X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déduisons-en le déterminant de M

$$\text{On a } \det \left[\begin{pmatrix} I & o \\ X & I \end{pmatrix} M \right] = \det \begin{pmatrix} A & B \\ XA+C & XB+D \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \det \begin{pmatrix} I & o \\ X & I \end{pmatrix} x \det(M) = \det(A) x \det(xB+D) \text{ car } XA+C=0$$

$$XB+D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(XB+D) = -8, \quad \det(A) = 1$$

D'où $\det(M) = -8$

Exercice 5 :

1. $E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ux} dx$, f étant la densité de X .

$$2. E(X^n) = i^n \varphi^{(n)}(0), \text{ où } \varphi(u) = E(e^{iu})$$

$$= \frac{1-iu}{1+u^2}$$

$$= -i(u-i)^{-1}$$

On montre par récurrence sur n que :

$$\varphi^{(n)}(u) = -i(-1)^n n!(u-i)^{-(n+1)}$$

Pour $u = 0$, on a $\varphi^{(n)}(0) = -i(-1)^n n!(-i)^{-(n+1)}$

$$= n!i^n$$

D'où $E(X^n) = i^{-n} (n!i^n) = (-1)^n n!$



POLYVALENT
CORPORATION

Exercice 1 :

Posons $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(4 - x^3 - y^3 - x - y) = e^{ay} + \lambda(4 - x^3 - y^3 - x - y)$

- Conditions de 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aye^{ay} + \lambda(-3x^2 - 1) = 0 & (1) \\ axye^{ay} + \lambda y(3y^2 + 1) & (2) \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{aye^{ay}}{3x^2 + 1} \\ (x - y)[3(x^2 + xy + y^2) + 1] = 0 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$$

1^{er} cas : $y = x$

Alors $2x^3 + 2x = 4 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1$

Donc on a le point critique $A(1,1)$, avec $\lambda = \frac{ae^a}{4}$

2^{ème} cas : $\begin{cases} 3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + x + y = 4 \end{cases}$

$3x^2 + 3xy + 3y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + xy = -\frac{1}{3} < 0$ (absurde)

En effet $(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq -xy$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow -xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \geq 0$

- Condition de 2nd ordre

On a $n = a$ variables et $P = 1$ contrainte ; donc on a $n - p = 1$ mineur principal

$$\Delta_3 = |M| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3x^2 + 1 & 3y^2 + 1 \\ 3x^2 + 1 & a^2 y^2 e^{ay} - \frac{3xae^a}{2} & ae^{ay} + a^2 xy e^{ay} \\ 3y^2 + 1 & ae^{ay} + a^2 xy e^{ay} & a^2 x^2 e^{ay} - \frac{3}{2} aye^{ay} \end{vmatrix}$$

Donc $\Delta_3(1,1) = 80ae^a$

D'où

* Pour $a > 0$, $\Delta_1(1,1) > 0$ et $(-1)^{p-1} \Delta_1(1,1) > 0$

Le point $A(1,1)$ est un maximum

* Pour $a < 0$, $\Delta_1(1,1) < 0$ et $(-1)^p \Delta_1(1,1) < 0$

Le point $A(1,1)$ est un minimum

Exercice 2 :

1. f est de classe C^1 sur $[-\pi, \pi]$, en particulier de classe C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$; f est de 2π -périodique. Donc les conditions de Dirichlet sont satisfaisantes et par suite f est développable en série de Fourier.

- Déterminons cette série

$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\text{Avec } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Or f est paire $\Rightarrow x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire et $\Rightarrow x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0$$

$$\text{On a } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \pi$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \text{ (intégrer par parties)}$$

Donc pour n pair, $a_n = 0$ et n impaire, $a_n = \frac{-4}{\pi n^2}$

$$\text{D'où } SF(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$$

$$2. \text{ Soit } y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{Alors } y' = \sum_{n \geq 1} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$

$$y'' = \sum_{n \geq 1} (-n^2 a_n \cos nx - n^2 b_n \sin nx)$$

$$\text{Donc } y'' - 3y = \frac{3a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} -(n^2 + 3)[a_n \cos nx + b_n \sin nx] = SF(f)(x)$$

$$\text{Par identification on a } \begin{cases} a_0 = -\frac{\pi}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{-n^2(n^2 + 3)} \end{cases}$$

Exercice 3 :

- Au voisinage de 0, on $\ln(1+x^2) \approx x^2$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \sqrt{1+\sqrt{x}} \approx x^{1/4} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \approx \frac{1}{x^{1/4-\alpha} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}\right)} < \frac{1}{x^{1/4-\alpha} \times \frac{\sqrt{x}}{2}} < \frac{2}{x^{3/4-\alpha}}$$

- Si $\frac{3}{4} - \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{4}$, alors l'intégrale converge en 0.
- Si $\frac{3}{4} - \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq -\frac{1}{4}$, alors l'intégrale diverge en 0.

- Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x}} &= \sqrt{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)} = \sqrt{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{1/2} \approx x^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &\approx x^{1/2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\ln(1+x^{\alpha}) = \alpha \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^{\alpha}}\right) \approx \alpha \ln x + \frac{1}{x^{\alpha}}$$

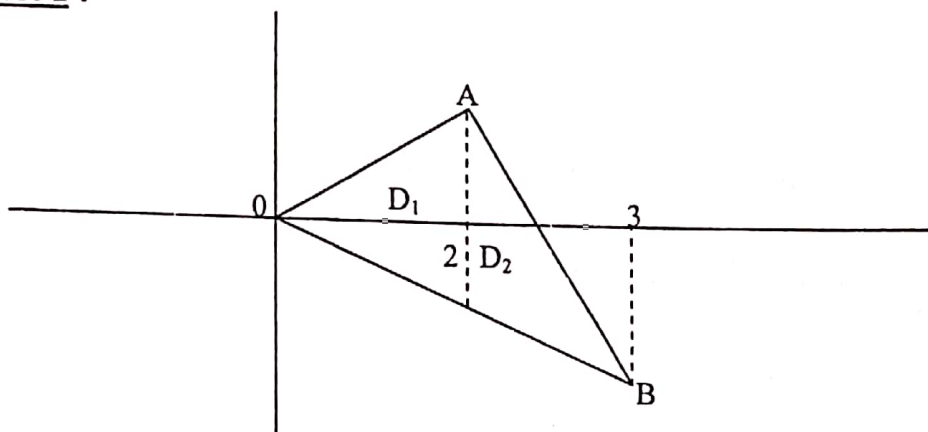
$$\text{Donc } \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \approx \frac{\alpha \ln x + \frac{1}{x^{\alpha}}}{x^{1/2} + \frac{1}{2}} \approx \frac{\alpha \ln x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} \left(x^{\alpha} + \frac{1}{2}\right)}$$

- Si $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$, alors $\int \frac{1}{x^{\alpha} + \frac{1}{2}} dx$ converge en $+\infty$
- Si $\alpha + \frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $\int \frac{dx}{x^{\alpha} + \frac{1}{2}}$ converge en $+\infty$

Conclusion

- Si $\alpha > -\frac{1}{4}$ et $\left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$, alors I converge
- Si $\alpha > -\frac{1}{4}$ et $\left(\alpha \leq \frac{1}{2}\right)$, alors I converge
- Si $\alpha \leq -\frac{1}{4}$ et $\left(\alpha \leq \frac{1}{2}\right)$, on ne peut pas conclure.

Exercice 2 :



On a $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, -\frac{1}{3}x \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\}$

$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x \leq 3, -\frac{1}{3}x \leq y \leq -2x+5 \right\}$

On a $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

Donc $I = I_1 + I_2$, avec $I_1 = \iint_{D_1} (2x+y)^2 dx dy$ et $I_2 = \iint_{D_2} (2x+y)^2 dx dy$

$I_1 = \int_0^2 \left(\int_{-\frac{1}{3}x}^{\frac{1}{2}x} (2x+y)^2 dy \right) dx$

$= \frac{1}{2+1} \int_0^2 \left(\left(2x + \frac{1}{2}x \right)^2 - \left(2x - \frac{1}{3}x \right)^2 \right) dx$

$= \frac{10^{\alpha+2}}{5(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\alpha+1} \right]$

$I_2 = \int_2^3 \left(\int_{-\frac{1}{3}x}^{-2x+5} (2x+y)^2 dy \right) dx = \frac{1}{\alpha+1} \int_2^3 \left(5^{\alpha+1} - \left(\frac{5}{3}x \right)^{\alpha+1} \right) dx$

$= \frac{5^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left[1 - \frac{3}{2+\alpha} \left(1 - \frac{3}{2} \right)^{\alpha+1} \right]$

Exercice 3 :

Posons $z = e^{ix}$; alors $dz = iz dx$; $\cos(\sin x) = \frac{e^{i \sin x} + e^{-i \sin x}}{2}$

$$= \frac{e^{\frac{z-\bar{z}}{2}} + e^{-\frac{z-\bar{z}}{2}}}{2}$$

$$= \frac{e^{\frac{i}{2}} - e^{-\frac{i}{2}} + e^{\frac{i}{2}} e^{\frac{i}{2}}}{2}$$

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \frac{z^n + \bar{z}^n}{2}$$

$$e^{\cos x} \cos(\sin x) = e^{\frac{i}{2}} e^{\frac{i}{2}} \left(\frac{e^{\frac{i}{2}} e^{\frac{i}{2}} + e^{-\frac{i}{2}} e^{\frac{i}{2}}}{2} \right) = \frac{e^i + e^{\bar{i}}}{2}$$

$$\text{Donc } e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{4} (e^i + e^{\bar{i}}) (z^n + \bar{z}^n)$$

$$\text{Alors } I = \frac{1}{4i} \int_C \frac{(e^i + e^{\bar{i}})(z^n + \bar{z}^n)}{z} dz, \text{ avec } C = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

$$\text{Posons } f(z) = \frac{(e^i + e^{\bar{i}})(z^n + \frac{1}{z^n})}{z^{n+1}}$$

D'après le théorème des résidus, on a $\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

$$\text{Avec } \operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{n+1} f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^i}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$\text{D'où } I = \frac{\pi}{2(n!)}$$

Exercice 4 :

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E, avec $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Soit $y \in F$

Alors $f^{-1}(\{y\})$ est un compact de E (d'après l'hypothèse 3)

La famille $(F_i \cap f^{-1}(\{y\}))_{i \in I}$ est une famille de fermés de $f^{-1}(\{y\})$ (Topologie de sous-espace).

On a $\bigcap_{i \in I} F_i \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

Comme $f^{-1}(\{y\})$ est compact, $\exists I_y \subset I / I_y$ finie et $\bigcap_{i \in I_y} (F_i \cap f^{-1}(\{y\})) = \emptyset$

Posons $A_y = \bigcap_{i \in I_y} F_i$.

Alors A_y est un fermé de E comme intersection de fermés de E.

Donc $f(A_y)$ est un fermé de F (hypothèse 2).

Ainsi $(f(A_y))_{y \in F}$ est une famille de fermés de F.

Mais $\bigcap_{y \in F} f(A_y) = \emptyset$ (en effet $z \in \bigcap_{y \in F} f(A_y) \Rightarrow z = f(x), x \in A_y$; en particulier

$$x \in A_z; \text{ or } Az \cap f^{-1}(\{z\}) = \emptyset$$

Comme F est compact (hypothèse 1), $\exists y_1, y_2, \dots, y_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dans F tel que $\bigcap_{i=1}^n f(A_{y_i}) = \emptyset$.

$$\text{Or } f\left(\bigcap_{i=1}^n A_{y_i}\right) \subset \bigcap_{i=1}^n f(A_{y_i}) = \emptyset \Rightarrow f\left(\bigcap_{i=1}^n A_{y_i}\right) = \emptyset$$

$$\text{Or } A_{y_i} = \bigcap_{j \in I_{y_i}} F_j, \text{ avec } I_{y_i}; \text{ posons } \bigcup_{i=1}^n I_{y_i}$$

Alors $\bigcap_{k \in K} F_k = \emptyset$ avec K finie. D'où E compact.

Exercice 5 :

$$1) \text{ On a } a_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \frac{t^n}{n!} dt = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \cdot t^n dt$$

$$u = e^{-t} \ln t \Rightarrow u' = -e^{-t} \ln t + \frac{e^{-t}}{t}$$

$$v' = t^n \Rightarrow v = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\text{Donc } a_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^{-t} \ln t \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} \ln t - \frac{e^{-t}}{t} \right) \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} dt$$

$$= a_{n+1} - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$$

$$\text{Calculons } \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = I$$

$$u' = e^{-t} \Rightarrow u = -e^{-t}$$

$$v = t^n \Rightarrow v' = nt^{n-1}$$

$$\text{Donc } I = \left[-e^{-t} t^n \ln t \right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

$$= n(n-1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-2} dt \quad (\text{Intégration par parties})$$

⋮

$$\text{Ainsi de suite jusqu'à l'ordre } I = n! \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = n!$$

$$\text{D'où } a_n = a_{n+1} - \frac{n!}{(n+1)!} = a_{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

- Déduisons-en $\lim b_n$

$$\text{On a } a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } a_1 - a_0 = 1$$

$$a_2 - a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{1}{3}$$

⋮

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n}$$

En additionnant membre à membre, il vient : $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + a_0$

$$\text{D'où } b_n = -a_n - \log n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + a_0 - \log n$$

$$\text{Donc } \lim b_n = \gamma + a_0$$

2) Supposons $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{C_{n+1}(\eta)}{C_n(\eta)} \leq u_n \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell, 0 < \ell < 1 \right)$

$$\text{et } \frac{d_{n+1}(\eta)}{d_n(\eta)} \leq v_n; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'; \quad 0 \leq \ell' < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{C_{n+1}(\eta)}{C_n(\eta)} < \ell + \varepsilon$$

$$\text{Ainsi on a } 0 < \frac{C_{N+2}(\eta)}{C_{N+1}(\eta)} < \ell + \varepsilon$$

$$0 < \frac{C_{N+3}(\eta)}{C_{N+2}(\eta)} < \ell + \varepsilon$$

⋮

$$0 < \frac{C_n(\eta)}{C_{n-1}(\eta)} < \ell + \varepsilon$$

On multiplie membre à membre et on a :

$$0 < C_m(\eta) < C_{N+1}(\eta) (\ell + \varepsilon)^{n-N-1}$$

En choisissant $\ell > \varepsilon$ tel que $0 < \ell + \varepsilon < 1$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ell + \varepsilon)^{n-N-1} = 0$;

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(\eta) = 0$$

De manière analogue, on établit $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(\eta) = 0$

Exercice 1 :

$$f(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$$

- Conditions de 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 2x + 2ay = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 y + 2y + 2ay = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy^2 + x + ay = 0 & (1) \\ x^2 y + y + ax = 0 & (2) \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow x = \frac{-ay}{1+y^2}$$

On remplace x par sa valeur dans (2).

$$\frac{a^2 y^2}{(1+y^2)^2} + y - \frac{a^2 y}{1+y^2} = 0 \Leftrightarrow y \left(\frac{a^2 y^2}{(1+y^2)^2} + 1 - \frac{a^2}{1+y^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee \frac{y^4 + 2y^2 + 1 - a^2}{(1+y^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y^4 + 2y^2 + 1 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y \in \{\pm\sqrt{a-1}\}, \text{ car}$$

$$a \geq 0 \Rightarrow -1 - a < 0, \text{ car}$$

Donc les points critiques sont $0(0,0)$, $A(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1})$ et $B(\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$

- Conditions de 2nd ordre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y^2 + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy + 2a$$

$$* \text{ Pour } 0(0,0), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2a$$

$$\text{Donc } s_0 - r_0 t_0 = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4s - 4 = (a-1)$$

$$* \text{ Pour } A(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = 2(a-1) + 2 = 2a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = 2(a-1) + 2 = 2a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}) = -4(a-1) + 2a = -2a + 4$$

$$\text{Donc } s_0 - r_0 t_0 = -4a + 8 - 4a^2 = -4(a^2 + a - 2)$$

Conclusion :

- Si $0 < a < 1$, alors 0, A et B sont des minima locaux.
- Si $a > 1$, 0 n'est pas un extrémum, A et B sont des minima locaux
- Si $a = 1$, on a un cas douteux.

ANGLAIS ET FRANCAIS



**POLYVALENT
CORPORATION**

EAMAC

Ecole Africaine de la Météorologie et de l'Aviation Civile

B.P 746 Niamey -Niger

Tél : (+227) 20723662 Fax : (+227) 20722236 [http// :www.eamac.ne](http://www.eamac.ne)

contact : eamacsec@asecna.org

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC

SESSION DE MAI 2012

Cycle Ingénieur

Epreuve d'Anglais

Durée : 2 H

I. Reading (5 points)

A. Read the text below and answer the following questions.

Gravity

A force of attraction exists in every body in the universe. It has been investigated by many scientists including Galileo and Newton. This gravitational force depends on the mass of the bodies involved. Normally it is very small but when one of the bodies is a planet, like the earth, the force is considerable. Everything on or near the surface of the earth is attracted by the mass of the earth. The greater the mass, the greater is the earth's force of attraction on it. We call this force of attraction gravity.

Because of gravity, bodies have weight. We can perceive weight only when a body resists gravity. For example, when we pick up a stone there are two forces involved. One is the lifting force we exert, and the other is the force of gravity which attracts the stone downwards and thus gives it weight. When a body escapes from the influence of the earth's gravitational pull, it can become 'weightless'. For example, the centrifugal force of a spacecraft spinning in orbit round the earth cancels the effect of gravity. The crew therefore experiences weightlessness. One of the minor disadvantages of weightlessness is that normal pens will not write because the ink is not attracted by gravity to flow out of the pens.

ndinning Eric H. English in Mechanical Engineering, P36

1. What is meant by gravity?
2. How can we perceive the weight of a body?
3. What are the two forces involved in picking up something?
4. What happens when a body escapes from the force of the earth?
5. How does the crew of a plane experience weightlessness?

B. Give a synonym or the French equivalent of the following words.

1. Body
2. Weight
3. Exert
4. Escape
5. Weightlessness

II. Grammar (5 points)

A. Put the verbs in parenthesis in the right tense. (5 points)

1. The atom (to be) _____ the smallest recognizable part of any element.
2. In the past people (to think) _____ that energy could be created or destroyed.
3. Galvani (to invent) _____ the electric battery in 1786.
4. The students (to do) _____ these experiments for two years now.
5. Professor Johnson (to do) _____ this experiment three years ago.
6. Next year he (to start) _____ a new experiment.
7. Friction (to happen) _____ when there is movement between surfaces.
8. I was not listening when the teacher (to call) _____ my name.
9. If I (to know) _____ the boss was coming I would do the work earlier.
10. My boss (to travel) _____ tomorrow.

B. Prepositions

Complete the sentences with correct prepositions: in, at, to, for, from.

1. I borrowed the money _____ my brother.
2. I am ready _____ a change and a better job.
3. Sue, I'd like to introduce you _____ Ed. Jones.
4. You shouldn't stare _____ other people. It's not polite.
5. Do you usually work _____ the evening?

C. For each statement below select the right completion.

1. How _____ children are there in the park?
a) numerous b) much c) many

2. There isn't _____.
a) none b) any c) no one

3. I need an umbrella because it _____ right now.
a) will rain b) is raining c) has rained

4. Yesterday I was sleeping when my mother _____
a) has come b) was coming c) came

5. Millet is _____ in Niger.
a) grown b) growing c) grew

III. Translation (5 points)

A. Translate the following paragraph into French.

A force of attraction exists in every body in the universe. It has been investigated by many scientists including Galileo and Newton. This gravitational force depends on the mass of the bodies involved. Normally it is very small but when one of the bodies is a planet, like the earth, the force is considerable. Everything on or near the surface of the earth is attracted by the mass of the earth. The greater the mass, the greater is the earth's force of attraction on it. We call this force of attraction gravity.

B. Translate the following sentences into English.

1. J'ai essayé de soulever la malle mais je n'y suis pas arrivé.
2. Pourriez-vous m'aider ?
3. Il se pourrait qu'il pleuve aujourd'hui.
4. Il faut que tu finisses ce travail aujourd'hui.
5. Vous feriez mieux de rouler lentement.

IV. Writing: Guided composition (5 points)

Many people believe that men are more gifted for scientific and technical branches than women. Do you agree with this idea? Write a 250-300 composition in which you explain and support your view. Use the following points as a guide to write your composition:

Are men more gifted than women? why?

Do you think in real life there are more male

8. It was sunny all the summers months.
 A- Round B- between C- through D- in
9. Don't feel guilty being late.
 A- From B- about C- with D- to
10. She has no control that dog!
 A- On B- over C- with D- about

III. Complete each sentence by choosing the correct pronoun.

11. It's always that gets the blame.
 A- I B- my C- me D- their
12. She was rather surprised at asking her to help.
 A- I B- myself C- my D- mine
13. Isn't that man over there a friend of ?
 A- You B- your C- yours D- me
14. Is that at the door?
 A- One B- anybody C- somebody D- once
15. We were very sorry and ashamed of for causing trouble.
 A- Us B- we C- ourselves D- ours

IV. Complete each sentence by choosing the verb that collocates with the word in CAPITALS

16. People tell so many different stories; it's hard to get a TRUE
 A- Description B- view C- picture D- drawing
17. Can you EXPLAIN you got there?
 A- That B- why C- how D- the way

18. I think it shows JUDGEMENT to invest in training.

- A- Secure B- right C- sound D- accurate

19. I am BORED tidying up.

- A- In B- for C- with D- on

20. He should the BLAME for the delay.

- A- Take B- have C- do D- carry

V. Complete each sentence by choosing the correct modal verb.

21. The woman asked if she wait in his office.

- A- Would B- might C- will D- may

22. If you hadn't given me a lift, I late.

- A- Might be B- would've been C- won't D- will've been

23. He's late. She have told him the right time to meet.

- A- Won't B- can't C- musn't D- must

24. I'm doing it now. I have finished by 6 this evening.

- A- Can B- must C- will D- am going to

25. He arrive late because of the traffic.

- A- Shall B- ought to C- may D- might have

CONCOURS D'ENTRÉE A L 'EAMAC : EUPREUVE D' ANGLAIS.

ANNEE 2014-2015: CYCLE D'
INGENIEURS.

A) **comprehension: read the text then answer the questions.**

5pts

Terrorism

Terrorism refers to *acts of violence or the threat of such violence employed by an individual or group as a political strategy*. Like revolution, terrorism falls outside the rules of established political systems. Paul Johnson (1981) offers four insights into terrorism.

First, terrorists consider violence a legitimate political tactic, despite the fact that such acts are condemned by virtually every nation. Terrorists also bypass (or are excluded from) established channels of political negotiation. Terrorism is therefore a weak organization's strategy to harm a stronger foe. Holding U.S. hostages in Iran between 1979 and 1981 may have been morally wrong, but those terrorists succeeded in directing the world's attention to issues they believed were important.

Second, terrorism is employed not just by groups, but also by governments against their own people. *State terrorism* is the use of violence, usually without support of *law*, by government officials. State terrorism is lawful in some authoritarian states, which survive by inciting fear and intimidation.

Third, democratic societies are especially vulnerable to terrorism because they afford extensive civil liberties to their people and have limited police networks. In striking contrast, totalitarian regimes not only make widespread use of state terrorism, their extensive police power minimizes opportunities for others to commit acts of terror.

Taking hostages and killing innocent people provoke widespread anger, but responding to terrorism is difficult. The immediate concern is identifying those responsible. Because terrorist groups are often shadowy organizations

with no formal connection to any established state, targeting a reprisal may be all but impossible. Then, too, a forcible military reaction may broaden the scope of violence, increasing the risk of confrontation with other governments.

Fourth and finally, terrorism is always a matter of definitions. Governments claim the right to maintain order, even by force, and may brand opponents who use violence as “terrorist.” Political differences help explain why one person’s “terrorist” is another’s “freedom fighter.”

- 1- Does terrorism belong to an established political system?
- 2- Why do people use terrorism as a political strategy?
- 3- Should one use a military force against terrorism according to the text? Why? Or why not?
- 4- Why are democratic countries vulnerable to terrorism?
- 5- What is a state terrorism?

ii) **Vocabulary** : explain the following words according to the context.

1.25pts

- 1- Insights: (offers four insights into terrorism.)
- 2- Threat : (*the threat of such violence*)
- 3- Foe : (to harm a stronger foe.)
- 4- Afford : (they afford extensive civil liberties to their people.)
- 5- Issues : (to issues they believed were important)

i) **Translate:**

a) **Translate into French.**

3pts

Taking hostages and killing innocent people provoke widespread anger, but responding to terrorism is difficult. The immediate concern is identifying those responsible. Because terrorist groups are often shadowy organizations with no formal connection to any established state, targeting a reprisal may be all but impossible. Then, too, a forcible military reaction may broaden the scope of violence, increasing the risk of confrontation with other governments.

b) Translate the following sentences into English.

1.25pts

- 1- La publicité des actes de violence contre les Etats Unis fait que certain citoyens américains tendent a lier le terrorisme a l'Islam.
- 2- Toutefois l'islam et le christianisme cherchent la justice et l'harmonie.
- 3- Tous les pays doivent être prudents et courageux pour combattre le terrorisme.
- 4- Les opposants qui utilisent la violence sont qualifiés de terroristes par les régimes totalitaires.
- 5- La préoccupation immédiate est d'identifier les responsables pour un dialogue large.

B) Linguistic competence. Choose the best form to complete the blanks

5pts

1. _____ of the two teams won on the day.
a. the best b. the better c. the well d. the gooder
2. Me and my mum _____ surprised by the crowd in the shop
a. was b. were c. where d. when
3. _____ you and me, I think it is better to get it right
a. between b. among c. inside d. into
4. I enjoyed meeting them _____.
a. their b. there c. they're d. than
5. _____ were several kids in the room.
a. their b. there c. they're d. than
6. Never has John _____ such a bad grade.
a. have b. has c. had d. has had
7. We'd arrive too early if we _____ the 10.30 train.
a. took b. take c. will take d. would take
8. I wish I _____ her number.
a. know b. have known c. knew d. known
9. Had I had my address book _____ you a postcard.
a. I had sent b. I would send c. I would have sent d. I sent
10. Sarah is having her hair _____.

- a. do b. does c. done d. did
11. Your car needs _____.
- a. serviced b. to service c. be serviced d. servicing
12. How often _____ to the dentist?
- a. do you go b. are you gone c. you go d. are you go
13. He's taking a driving lesson. It's the 1st time _____.
- a. he drives b. he drove c. he has driven d. he will drive
14. Next time try to put _____ sugar in the tea.
- a. less b. least c. the less d. the least
15. I was invited to two parties last week, but I didn't go to _____.
- a. neither b. either of them c. Neither of them d. none of them
16. He will get his wife _____ the eggs.
- a. break b. breaks c. to break d. broken
17. Never before have their parents _____ so sensitive
- a. been b. were c. are d. be
18. We'd rather-----now
- a. to go b. gone c. go d. going
19. This book is worth _____
- a. reading b. reads c. to read d. read
20. They haven't looked into the matter _____
- a. still b. ago c. yet d. during

C) **Writing** : Is terrorism really a matter of culture? Use twenty lines to express your ideas

4.5pts



KEY ANSWERS TERRORISM. (INGENIEURS)

i) Comprehension questions.

- 1- No terrorism does not belong to any established political system. it falls outside of established political system.
- 2- They are weak. They use terrorism as a political strategy to harm stronger foe.
- 3- We should not use a military force against terrorism because it may broaden the scope of violence and increase the risk of confrontation with other governments.

- 4- These countries afford extensive civil liberties to their people and have limited police network.
- 5- The state terrorism is the use of violence, usually without the support of the law by the government officials.

ii) **Vocabulary.**

1-Insights: the ability to have a clear understanding. Comprehension, perception, vision, judgment.

1- *Threat* : it is a menace, a danger, risk or peril.

2- *Foe* : enemy.

3- *Afford* : to have or do something because you have the means or time to do it.

4- *Issues* : matter, subject problem.

iii) **Translate.**

a) **Translate into French.**

Prendre les otages et tuer des personnes innocentes répand la colère; mais répondre au terrorisme est difficile. Le souci immédiat est d'identifier ceux qui sont responsables; parce que les groupes terroristes sont des organisations qui opèrent dans l'ombre sans aucune relation quelconque avec un état établi, envisager une représailles peut être tout sauf possible. alors , aussi une réaction vigoureuse des militaires peut élargir les dimensions de la violence et augmenter le risque d'une confrontation avec d'autres gouvernements.

b) **Translate into English.**

- 1- The publicity of violent acts against U S makes some Americans link Islam with terrorism.
- 2- Islam , however like Christianity seeks justice and harmony.
- 3- All countries must be prudent and courageous to fight terrorism.
- 4- The opponents who use violence are branded as terrorists by totalitarian regimes.
- 5- The immediate concern is to identify the leaders for a broad dialogue.

A) Linguistic competence.

1b 2b 3a 4b 5b 6c 7a 8c 9c 10c 11d 12a 13c 14a 15b 16c 17a 18c 19a 20c.

ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE
ET
DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC 2010

(EPREUVE D'ANGLAIS)

Durée : 2 heures

I-COMPREHENSION: (5pts)

Read the following Text carefully and answer to the questions:

TEXT: Education and Democracy

It may be appropriate to begin this section with a review of the findings on the relationship between education and democracy. It can be shown, for example, that the higher the education level of a country, the more likely is it to be a democracy. Within countries, moreover, there is an even stronger relationship between education and democratic attitudes. In a summary of the main research findings Lipset argues that "data gathered by public opinion research agencies which have questioned people in different countries about their beliefs on tolerance for the opposition and their attitude toward ethnic or racial minorities, have showed that the most important single factor differentiating those given democratic responses from the others has been education. The higher one's education, the more likely one is to believe in democratic values and support democratic practices. All the relevant studies indicate that education is more significant than either income or occupation." Particularly impressive in this connection is Lipset's evidence that the working classes, and the less- educated, tend to be more authoritarian in their attitudes, and to be more likely to favour extremist political and religious groups. There is also some, although by no means conclusive, evidence that students at college become more liberal "in the sense of being more sophisticated and independent in their thinking, and placing greater value upon individual freedom and well-being."

O. BANKS

QUESTIONS:

1. What can be shown on the relationship between education and democracy? (1 mark)
2. What does education stand for? (1 mark)
3. State on the relationship between income or occupation and education.(1 mark)
4. Who tend to be more authoritarian and more extremist? (1 mark)
5. Who are more liberal? Why? (1 mark)

II- VOCABULARY: Give the meaning of each of the following words in French (2.5 marks):

1. Data
2. college
3. well-being
4. impressive
5. relevant.

III- GRAMMAR (9.5 marks)

A/ Turn the following sentences from active voice to passive voice or vice versa (2.5 marks)

1. The new road will be finished next month.
2. Palm- wine is sometimes sold by the bottle.
3. The first three Americans used to eat boiled egg.
4. Somebody is asking for you on the phone.
5. Monkeys will imitate everything you do.

B/ Correct the following sentences by conjugating the verbs in brackets (5 marks):

1. When they reached the bus- stop the lorry already (to leave).
2. They are told that they (to need) it no more.
3. Adam and his wife Samira (to be) about to entertain Sam iel.
4. If I (to be) the president, I should punish the driver.
5. He (to be) on the brink of being rewarded by the new managing director.

C/ Use a tag question to complete the sentences (2 marks):

1. The old man never eats cola nuts.....
2. You would like to be a marginal.....
3. Lina and Nadia did not enjoy your joke.....
4. They do nothing to prevent the strike.....

IV- TRANSLATION: Translate the following text from English to French (3 marks):

Text: The drought

West African countries have often been affected by drought. When this drought lasts several years - as it is the case this time- it is a national disaster for each of these countries. The livestock - that is often, to the south of the Sahara, the basis of the economic life - begins to die of hunger and thirst. Harvests do not grow anymore and when there is not anything to eat people begin to die... Let us wish that international help and cooperation will one day replace violence and war!

GOOD LUCK!!!

TOPIC N°2

1. READING COMPREHENSION

"It is our duty to erase the negative perceptions and to **highlight** the positive elements of migration," said Sir John Kaputin, ACP Secretary General. The ACP Group Brussels Resolution on Migration and development adopted at the meeting will be presented to the **incoming** Global Forum on Migration, in Manila, the Philippines, in October 2008. It calls for more research into why people move, including the connection with climate change and to urgently halt the **dumping** of toxic waste in ACP waters- a practice which **induces** migration. Improved management of asylum, migration and mobility by ACP governments is another recommendation.

The commissioning by the ACP's Secretariat of a study by 2009 on best practices for the promotion of the integration of migrants in host countries is requested. Innovative solutions to illegal migration to arrest the **brain drain** of **skilled** workers from ACP countries are also called for.

Circular migration- (allowing greater flexibility of workers to enter overseas job markets and return to his or her country of origin with greater ease- should be taken forward,) said ACP Ministers. The resolution also says governments should tackle the issue of migrants working without documentation and that ACP nations should ratify legal frame works to tackle human smuggling.

Responding to journalists' questions on the recent violence in South Africa directed at Zimbabwean migrants, Senator Elma Campbell, Minister of State for the Immigration of the Bahamas, who chaired the Brussels meeting said: "we

urge ACP states to implement legislation to combat racism and xenophobia and increase awareness of the phenomena."

QUESTIONS THE PASSAGE (4points)

1. The passage shows that migration does not always have a negative aspect. Justify this from some expression in text.
2. Give an important and good recommendation in favour of migration from adopted in the Migration meeting in Manilla.
3. What is the bad consequence of immigration on ACP countries?
4. What does circular migration consist in?

2. VOCABULARY (5points)

Explain the following words as they relate to the text.

- a) Highlight b) incoming c) dumping d) induces e) brain drain
b) f) skilled g) tackle h) frame works i) chaired j) awareness

3. GRAMMAR (20points)

A / Complete the following sentences with the appropriate words from the five alternatives (10 marks).

1. My car.....so I had to walk.

- a) broke down; b) broke off; c) broke up; d) fell down; e) fell
trough

2. He's the greatestexpert on French art.

- a) alive; b) live ; c) lively ; d) living ; e) nowadays

3. The banks are offering five hundred thousand CFA.....to anyone who can give them useful information about the robbery.
a) cost; b) price; c) prize; d) reward; e) salary
4. I'm veryto you for all help.
a) agreed; b) graceful; c) grateful; d) reliable; e) thanks
5. One of the waterburst during the recent cold weather and the kitchen was flooded. a) channels; b) conductors; c) pipes; d) tubes; e) ways
6. He.....to hit me if I didn't do as he said.
a) pretended; b) said; c) thought; d) threatened; e) warned
7. I haven't seen him.....he came to dinner with me last week.
a) for; b) meanwhile; c) since; d) when; e) while
8. We've.....bread. I'll have to go to the baker's to buy some more
a) run away; b) run down; c) run off; d) run out of; e) run over
9. The good service at the restaurant.....the poor meal to some extent.
a) made for; b) made out; c) made over; d) made up; e) made up for
10. He lost his.....and threw a book at me.
a) feeling; b) mood; c) sense; d) spirit; e) temper

B / Put the verbs in parentheses in the correct tense. You just write the number and the correct verb form (10marks).

In another one year's time I (live)..... here for ten years. I

first (12 come)...here in 1997. I remember my arrival in London. I...

13 never (forget)..... It. I (14 try).....to explain what I wanted to a porter, but he (15 can).....not understand a word I (16 say)
Finally, I managed to make a policeman understand me. With the help of his map and street guide I (17 find)..... the address I 18 look).... for. I don't think people were either more or less friendly than I (19 imagine).....them (20 be).....

4. TRANSLATION (5 points)

Translate the following passage into French.

"It is our duty to erase the negative perceptions and to highlight the positive elements of migration," said Sir John Kaputin, ACP Secretary General. The ACP Group Brussels Resolution on Migration and development adopted at the meeting will be presented to the incoming Global Forum on Migration, in Manila, the Philippines, in October 2008. It calls for more research into why people move, including the connection with climate change and to urgently halt the dumping of toxic waste in ACP waters-a practice which induces migration. Improved management of asylum, migration and mobility by ACP governments is another recommendation.

5. ESSAY (6points)

If people are not happy in their own country, they should migrate to another country in search of a better living condition. Do you agree with this statement? Justify your point of view in ten lines.

Les avancées de la biologie

Il est évident que les avancées spectaculaires de la biologie ne sont pas neutres - comme rien n'est neutre dans toute science. Bien que les problèmes soulevés par les diverses méthodes destinées à obtenir les « enfants de la science » soient différents dans leurs conséquences et dans leur évolution, tous suscitent des interrogations éthiques et sociales.

Les médecins et les biologistes qui sont directement impliqués dans ces techniques, même s'ils sont conscients et heureux de rendre d'immenses services à des milliers de couples stériles, se posent, malgré cela, beaucoup de questions sur le sens de leur démarche et sur les motivations de leurs patients.

Ces techniques révolutionnaires ont pour unique objet de satisfaire le désir d'enfant qui tenaille les couples stériles, que l'adoption ne satisfait pas, dans la mesure où le nombre des enfants proposés est faible et l'attente insupportablement longue pour l'impatience des parents.

Ce désir d'enfant a de quoi inquiéter, surtout par la vigueur avec laquelle, depuis quelques années, il surgit et s'amplifie. Comme si, après avoir voulu et obtenu de pouvoir faire l'amour sans risquer l'enfant non souhaité, après avoir acquis cette liberté jugée si importante, les couples découvraient soudain l'exigence inverse : avoir tout de suite, sans attendre, l'enfant dont le désir apparaît soudain.

C'est de ce désir d'enfant, puissant, violent, que les couples interpellent désormais la médecine et la biologie, au point de favoriser, de justifier parfois, des solutions extrêmes dont beaucoup sont pourtant mal acceptées par l'opinion générale.

C'en est au point qu'il faut se poser des questions essentielles. Celle de savoir ce que représente réellement l'enfant pour un couple, pour un homme, pour une femme. On ne saurait se contenter, sur ce sujet, du désir des parents. Un enfant n'est pas un jouet. Il est important de réfléchir aussi - surtout, disent certains - au devenir de cet enfant du désir, qui va naître sans père biologique. Quel sera son destin d'enfant, d'adolescent, d'adulte ? Comment pourra-t-il s'installer dans la vie, lui à qui il manquera peut-être l'essentiel ?

Certes, nous venons de le voir, notre morale n'est pas universelle. Bien des civilisations ne tiennent guère compte de la biologie et ne considèrent que l'aspect social de la parenté et de la famille. Mais nous vivons dans une civilisation où la loi et la morale se rejoignent pour considérer l'enfant comme le fruit de l'amour d'un homme ou d'une femme. Ce n'est pas nécessairement faire preuve d'un conservatisme démodé que de croire en cette conjugaison qui, si elle n'est plus absolument indispensable sur le terrain de la biologie, reste essentielle pour l'avenir psychologique de l'enfant.

L'un des principaux risques des méthodes révolutionnaires qui se développent est de déshumaniser et la conception et la notion même de l'être humain - qu'il s'agisse de l'embryon, manipulé, congelé, rétrocedé, ou de l'enfant auquel on impose une parenté imprévue, pleine de dangers. L'enfant tend à devenir une chose, un objet, sur lequel l'on agit, que l'on transforme - que, demain, peut-être, on vendra.

On peut s'inquiéter de cette « médecine du désir » que les spécialistes pratiquent, parfois sans enthousiasme, sur des bien-portants dont le seul mal est un mal d'enfant. Les moralistes s'en inquiètent à juste titre et se demandent si ce désir est entièrement justifié et s'il faut, pour la satisfaction de quelques uns, mettre en œuvre des techniques qui risquent de bouleverser ce qu'il y a d'essentiel dans l'homme.

Mgr Lustiger, archevêque de Paris, déplore ainsi de voir l'enfant ramené à cet objet de désir. « Nous allons vers des temps terribles, dit-il, où il faudra que les hommes et les femmes aient beaucoup de courage pour sauver la dignité humaine. » François Mitterrand, président de la République [française], indique, de son côté, en installant le Comité National d'éthique, que « plus vite va le monde, plus nous devons prendre le temps de la mesure, le temps de l'échange et de la réflexion, c'est-à-dire le temps même de la morale ».

Robert Clarke, *Les Enfants de la science*, Ed. Stock, 1984

QUESTIONS

1- Vocabulaire :

- Expliquez les expressions marquées en gras dans le texte : croire en cette conjugaison ; déshumaniser (2 points)

2- Compréhension du texte :

- L'évolution de la biologie inquiète sur le plan moral. Donnez 4 arguments développés par l'auteur pour exprimer cette inquiétude. (8 points)

3- Commentaire :

A propos de l'évolution de la science et du monde, le président François Mitterrand indique que « plus vite va le monde, plus nous devons prendre le temps de la mesure, le temps de l'échange et de la réflexion, c'est-à-dire le temps même de la morale ».

Après avoir expliqué son propos, vous direz dans un texte argumenté si les solutions que François Mitterrand propose sont adéquates pour répondre aux problèmes que posent les manipulations scientifiques aujourd'hui. (10 points) [Maximum 2 pages]

- Un bref commentaire sur les réponses proposées par Mitterrand aux problèmes que pose la science aujourd'hui. (6 points)
[Maximum 2 pages]



POLYVALENT
CORPORATION

RÉPUBLIQUE DU NIGER
MINISTÈRE DU TRANSPORT

- : - : - : -

ÉCOLE AFRICAINE DE LA MÉTÉOROLOGIE
ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

CONCOURS D'ENTRÉE A L'EMAC SESSION 2010

Niveau DUEG II Scientifique

TRAITEZ AU CHOIX L'UN DES TROIS SUJETS SUIVANTS

Sujet N° 1 : Résumé - Discussion

Littérature réactionnaire

Si je reviens en Afrique, ce sera pour dire qu'il a existé et il existe encore une certaine littérature réactionnaire, fort compréhensible en un moment déterminé de notre histoire mais devenue extrêmement dangereuse aujourd'hui ; je veux parler de cette littérature de complaisance, d'extrême complaisance avec le passé africain. On ne retourne pas aux sources pour y demeurer éternellement mais pour y puiser une certaine inspiration.

Je considère une certaine littérature issue du mouvement de la négritude comme un frein au développement c'est-à-dire au progrès, à partir du moment où elle a manifesté une inaptitude à réviser sa manière de poser les problèmes. Il s'est d'abord agi de nous faire reconnaître et admettre en tant que peuples et mondes ayant une histoire et une personnalité propres. Nous subissons alors le joug de la colonisation et le problème, car il n'y en avait qu'un, se posait en termes de libération politique, culturelle et économique et dans le cadre d'une dialectique Intérieur-Extérieur. Notre littérature était alors une littérature de jérémiades, de protestations indignées, résolument moralisatrice. Aujourd'hui, malgré les indépendances politiques, il faut bien se le dire, nul ne peut prétendre que nous soyons libérés culturellement et économiquement. Or, ce n'est pas pour autant qu'il faut méconnaître le fait que le problème de notre libération ne se pose plus dans les mêmes termes qu'avant 1960.

Si avant 1960 il était compréhensible que notre libération passe par un dialogue avec le colonisateur, voire même par des fusillades (il occupait physiquement nos territoires), il est moins compréhensible qu'aujourd'hui la littérature continue à induire des attitudes tendant toujours à faire dépendre des autres notre seconde libération qui est une entreprise de longue haleine et dont il nous appartient principalement d'élaborer la stratégie. Or une certaine littérature pleine de ressentiment et de roucoulements boudeurs continue à faire croire que la dénonciation de l'immoralité et de l'inhumanité des autres suffira à faire changer la physionomie des choses dans nos pays et à déclencher les bons sentiments des autres vis-à-vis de nous. Je dis que cette littérature est en retard d'une bataille et se montre indiscutablement réactionnaire et inadaptée.

C'est une extrême naïveté de s'imaginer que les autres nations renonceront à leurs intérêts primordiaux pour prendre fait et cause pour les intérêts de l'Afrique et cela parce qu'ils auront entendu les leçons de morale d'une certaine littérature africaine. Il s'agit aujourd'hui du développement de nos pays et non plus de leurs indépendances. Nos attitudes quand nous nous battions pour gagner l'indépendance politique de nos pays ne peuvent plus être strictement les mêmes aujourd'hui, où nous nous battons contre la pauvreté et pour l'amélioration de nos conditions d'existence.

Si je parle d'attitudes, c'est parce que précisément la littérature ne manifeste son influence qu'à ce niveau. Les idées qu'elle fait circuler, les schèmes de comportement qu'elle diffuse, les conflits qu'elle exprime et toutes sortes de visions du monde qu'elle fait éclore sont indiscutablement déterminants dans la vie quotidienne des hommes. C'est ainsi que des attitudes de passivité et d'irresponsabilité peuvent être déterminées par une littérature passéiste faite principalement de ressentiment et d'auto-satisfaction. Comment ne pas voir qu'une telle littérature est irrémédiablement réactionnaire et contre le développement ?

La littérature peut donc parfaitement se révéler réactionnaire et retardatrice par rapport aux exigences de transformation et de progrès. Mais chacun sait également que cette même littérature peut être révolutionnaire quand, à travers les visions du monde qu'elle élabore et les attitudes qu'elle induit, elle se pose en fossoyeuse des mondes de distorsion et de laideur réellement et actuellement existants. Ainsi fut la littérature négro-africaine d'avant 1960 qui, contrairement à ce que la révolution d'hier a toujours comme vocation à peu près inéluctable de devenir la réaction d'aujourd'hui.

(Ebénézer Njoh-Mouelle, *L'Africanisme aujourd'hui*, Éditions CLE, pp. 57-59)

- a) Résumez ce texte au ¼ de sa longueur ;
- b) Vous discuterez par exemple l'idée selon laquelle « Les idées que la littérature fait circuler, les schèmes de comportement qu'elle diffuse, les conflits qu'elle exprime et toutes sortes de visions du monde qu'elle fait éclore sont indiscutablement déterminants dans la vie quotidienne des hommes. »

Sujet N° 2 : Commentaire Composé



POLYVALENT

Le visage de l'emploi

CORPORATION

L'été, tel un amant instable, partit puis revint, repartit et, comme pour bien s'assurer de l'état de tout ce qu'il avait quitté, revint à nouveau. J'étais toujours chez les Dupont, changeant des couches, saupoudrant de petites fesses roses, faisant le trajet de l'école quatre fois par jour, poussant le landau d'un bébé blond que je ne pouvais même pas faire passer pour mien, passant l'aspirateur, repassant, lavant le carrelage de toute la maison, et maudissant la merde des Dupont qui s'accrochait aux parois des w-c et ne sentant pas la rose. Tout ça pour un salaire de garde d'enfants.

Madame était contente de moi. Un jour, elle me donna une robe devenue trop serrée pour elle. Je n'en voulais pas, elle était moche et datait au moins des années soixante-dix. Il faut dire que Madame s'habillait comme la reine d'Angleterre : coiffée comme une batavia, elle était fidèle à son apparence et s'habillait comme un chou-fleur. Je me disais en la regardant : si cette femme a pu exciter son mari, c'est qu'il doit y avoir des hommes qui trouvent mère Thérèse sexy. J'acceptai la robe par politesse et m'en débarrassai lors de la collecte annuelle des vêtements. L'argent peut acheter une bonne, mais pas le goût. Merci madame.

Madame Dupont jouait à l'intellectuelle et avait entrepris de me civiliser. Un jour que le couple patronal était rentré plus tôt que d'habitude, la petite fille me demanda de lui mettre une cassette vidéo dans le magnétoscope. Elle voulait voir cette satanée Cendrillon qui est à l'origine de quelques générations de femmes complexées quant à la taille de leurs pieds. Je me gardais bien de toucher au matériel : le jour où j'avais cassé un vase en faisant le ménage, Madame m'avait déduit cinq cents francs pour de la terre cuite. Alors malgré la demande insistante de Mademoiselle, je refusai de toucher au magnétoscope. Madame me dit :

- Toi savoir allumer vidéo ?
- Non madame, répondis-je.

Elle me considéra, mi-maternelle, mi-méprisante :

- Toi tête pour réfléchir ?

Puis se tournant triomphalement vers son mari, avant de me jauger à nouveau elle proféra :

- *Cogitum sum*, je suis pensée, comme dirait Descartes.

Evidemment Madame instaurait ainsi une connivence avec son époux et m'excluait de la discussion à venir. Mais cette fois c'en était trop, l'outrage était grand et l'héritage de Descartes menacé. Je ne pouvais pas empêcher qu'elle fit la savante à mes dépens, mais j'exigeais qu'elle le fit correctement. Alors je rétorquai à Madame :

- Non Madame, Descartes dit *Cogito ergo sum*, c'est-à-dire "je pense donc je suis", comme on peut le lire dans son *Discours de la Méthode*.

Madame laissa tomber sa cassette vidéo, Monsieur suspendit le geste qui menait un biscuit à sa bouche. C'était la première fois que je formulais une phrase complète devant eux. Monsieur reprit de la contenance et me dit :

- Tu te prends pour qui pour reprendre comme ça Géraldine ? Tu sais, on n'est pas Comme toi, ma femme a passé son bac avant de travailler ; quant à moi que tu vois là, je suis un universitaire, j'ai bac plus deux !

Je ne pipais mot, mais mon sourire calme faisait dans la chair de monsieur Dupont l'effet d'un bistouri. Madame se fit humble pour me dire :

- Tu es en terminale, peut-être ?

- Non madame, lui dis-je, j'ai ma licence de Lettres depuis deux mois. Chère madame, les enfants de monsieur Banania sont aujourd'hui lettrés.

Puis, au fond de moi j'ajoutai : « Et ça vous lime le caquet ! »

Monsieur Dupont emprunta les escaliers vers l'étage supérieur comme lors de ma première venue. Je parie qu'il se demandait encore, mais cette fois pour d'autres raisons :

- Mais qu'est-ce que tu veux qu'on fasse avec ça ?

Madame monta le rejoindre. La pauvre petite attendait toujours Cendrillon devant le magnétoscope. Un jour, elle comprendrait comme sa mère que le petit pied de Cendrillon ne foule pas tout sur son passage. Je dis au revoir à la petite qui boudait et jetai un ample bonsoir à Monsieur et Madame du bas de l'escalier avant de fermer la porte derrière moi.

Après un week-end paisible, je me présentai le lundi matin à 8 h 00 chez les Dupont. J'avais décidé d'éliminer la demi-heure d'avance qui n'était pas payée depuis plus de deux ans.

- Bonjour madame, saluai-je.

- Bonjour, me dit-elle, je vous attendais, la petite doit aller à l'école, si je l'emmène Je serai en retard à mon travail. Voulez-vous maintenir la demi-heure d'avance je vous la paierai ?

- D'accord, répondis-je. Je ne rêvais pas, la grande dame avait retrouvé sa politesse ; elle qui m'avait tutoyée dès la première minute de notre rencontre se souciait maintenant des convenances. La semaine fut froide. Puis le temps passa, et avec lui la gêne et la rancune. Quelques mois après, je donnais de temps en temps et gratuitement des cours de français à madame Dupont qui préparait un concours. Elle ne me parlait plus en petit-nègre, nous nous tutoyions et nous appelions par nos prénoms. Même Jean-Charles s'y était mis. Parfois nous mangions ensemble. Ils semblent apprécier les spécialités sénégalaises, et quand ils parlent des Noirs ils ne disent plus « ces gens-là » mais plutôt « les Africains. »

(Fatou DIOME, *La Préférence Nationale*, Paris, Présence Africaine, 2000, pp. 73-77)

Vous ferrez un commentaire composé de ce texte. Vous pourriez par exemple étudier comment, grâce à l'ironie, l'auteur déconstruit le mythe de la supériorité du Blanc.

Selon l'historien Ibrahima Baba Kaké, l'histoire doit faire connaître le passé de l'espace choisi, réhabiliter les héros du passé, inciter à se servir de ce passé pour poser les problèmes actuels et y puiser des leçons de morale.

Commentez et discutez cette assertion.



**POLYVALENT
CORPORATION**

www.touslesconcours.info

REPUBLIQUE DU NIGER
MINISTERE DU TRANSPORT

- :- :- :-

ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE
ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)

CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAC

SESSION 2011

Niveau DUES

TRAITEZ AU CHOIX L'UN DES TROIS SUJETS SUIVANTS

Sujet N°1 : Résumé – Discussion

La publicité, moyen de promotion de valeurs nouvelles dans la société

La publicité est aujourd'hui à la croisée des chemins. Pour subsister et pour conserver un sens, elle doit acquérir une conscience et cesser d'exploiter des valeurs dépassées pour promouvoir plus librement des valeurs nouvelles. Cette transformation fondamentale suppose de la part de ceux qui le font une mutation complète de leurs habitudes de pensée et une prise de conscience de leurs nouvelles responsabilités.

Le premier objectif doit être d'améliorer la qualité morale et sociale de la communication publicitaire. Il est parfaitement possible de le faire sans détruire la liberté qui s'attache à l'économie du marché. La légitimité de la persuasion doit être reconnue et son exercice doit être préservé. L'homme n'est pas un simple spectateur du monde, même lorsqu'il est consommateur. Il en est l'acteur. Il est donc normal que soit fait appel à sa raison, mais aussi à sa faculté d'émotion. Persuader pour vendre est légitime à condition de le faire dans certaines limites et d'une certaine façon. L'information et la stimulation publicitaires dureront autant que la liberté dans la consommation. Ce qui est mis en cause n'est pas le fond, mais le ton ; ce n'est pas la fonction, mais la façon dont elle s'exerce. Rien de serait pire que de se réfugier dans la censure ou dans la réglementation, car c'est dans la liberté et en toute responsabilité que les normes de la communication doivent être établies.

La vérité doit en particulier représenter, plus que jamais, l'un des critères de base de la valeur de la publicité. La vérité publicitaire doit être évaluée à partir du récepteur et de son interprétation du message. L'exactitude fonctionnelle est plus importante que l'inexactitude littérale : c'est la vérité utile.

La publicité se doit aussi de ne pas faire peser sur l'individu des contraintes qui le placeraient dans un état de frustration s'il n'avait pas le moyen de satisfaction ainsi

suscités. La publicité n'est pas un jeu gratuit. Elle projette des modèles d'identification qui peuvent bouleverser certaines valeurs et en modifier la hiérarchie. Parce qu'elle s'insère dans les opinions, elle reflète et elle guide. Dans les deux cas, elle engage la responsabilité de celui qui la fait et qui doit prendre conscience d'être un agent culturel et moral. A cet égard, l'autodiscipline est plutôt une autodestruction qui s'exerce non par crainte de la loi, mais dans une perspective de progrès. En effet, la publicité n'est pas une force autonome. Elle ne peut être efficace que si elle s'intègre aux forces sociales et si elle collabore avec elles.

A l'horizon se dessinaient les moyens pour y parvenir. Le publicitaire va très vite devoir se préoccuper des retombées sociales de son activité et consacrer une partie de ses études à cette recherche. La notion de bilan social de l'entreprise progresse rapidement. Dans ce cadre, le chef d'entreprise devra bientôt justifier l'actif et le passif de son action publicitaire à l'égard de la collectivité. de main, on appliquera les techniques de mesure de l'efficacité pour évaluer l'impact social de la campagne publicitaire. En corollaire de cette orientation, on peut s'attendre à ce que l'on dirige l'effort publicitaire en priorité sur les produits ayant une valeur sociale certaine. Ceci nous conduirait-il à sacrifier des produits dont l'agrément est immédiat mais superficiel au profit d'autres plus bénéfiques à long terme, même si leur valeur immédiate paraît médiocre ?

Pour maintenir la liberté de persuasion, il faut préparer le public, et notamment les jeunes, à recevoir la publicité aussi bien que toute autre forme de propagande. L'éducation à la communication n'est pas moins importante que l'éducation sexuelle. L'étude des mass-médias doit prendre place dans l'enseignement public, comme on le fait en Suède où, par exemple, la lecture critique de la publicité est enseignée aux enfants. Le publicitaire découvre qu'il se trouve en face d'une responsabilité d'un nouveau genre, très différente de ses responsabilités commerciales. Elle n'appartient qu'à lui. Elle ressemble à celle de l'éditeur ou à celle du journaliste. Faute de vouloir l'assumer, il compromettrait irrémédiablement sa fonction dont l'efficacité diminuerait à mesure que des critiques et des contraintes de toutes natures juguleraient son action.

Robert Leduc, *Le Pouvoir publicitaire*, Bordas, Paris, 1974.

- a) Vous résumerez ce texte de 695 mots au ¼ de sa longueur (10 points)
- b) Répondez aux questions suivantes (4 points) :
 - Pourquoi la publicité doit-elle changer d'orientation ?
 - En quoi consiste la nouvelle responsabilité du publicitaire ?
- c) Dites, en une dizaine de phrases, ce que vous pensez de la publicité aujourd'hui. (6 points)

Sujet N°2 : Commentaire Composé

Carré de sable

Carré de sable grège et blocs bariolés. Le square où s'affairaient les enfants agiles n'est qu'éclats de joie et couleurs d'innocence vu de si haut. Devinant l'impatience délicate qui me gagne, ma mère m'encourage à quitter le recoin de fenêtre que j'affectionne pour rejoindre cette petite troupe : pendant que je jouerai, elle lira près de la fenêtre.

Ma mère, une fontaine de fraîcheur dans la chaleur de juillet, avec tout ce bleu en cascade de ses yeux à sa robe. J'en garde une lumière au cœur en dévalant la pénombre de l'escalier. C'est encore elle que je retrouve lorsque je me retourne dans l'allée. Silhouette amincie, inaccessible mais familière, elle est assise à la fenêtre, et c'est sûr, en temps opportun, m'appellera pour le goûter. Sautillant dans le gravier qui m'éclabousse, je ne sens aux épaules que le poids de mes tresses et les chauds attouchements d'un bon été. Tout va bien.

Tout allait bien : j'étais à l'âge où les groupes fascinaient.

Les voilà justement qui se préparent pour un jeu, les enfants, équipés de pelles et de seaux : l'un crie des ordres aux indécis qui se rangent docilement, d'autres complotent à l'écart. Il ne me reste bien sûr qu'à rallier l'un des camps, au hasard.

A mon approche, tout se fige. Les petits se resserrent lentement pour ne former qu'une ligne. Leurs bras frêles haut levés font une grille sur laquelle viennent s'écraser mes espoirs. Entre ces barreaux, des visages ternes, gonflés par une colère silencieuse. Soudain jaillissent d'on ne sait où, des mots acides qui jusqu'aujourd'hui me corrodent. On risque d'abord un trait, et un autre, comme par inadvertance. Puis, peu à peu les voix fluettes s'harmonisent et scandent à l'unisson une comptine burlesque.

Si burlesque vraiment, qu'hier en la retrouvant sous une pile de souvenirs, j'ai bien failli en rire.

Si burlesque que je cherche, éperdue, quelqu'un pour m'en expliquer le sens : là-haut, la fenêtre est déserte ; sur les bancs tout proches, des mères attentives tricotent en souriant. Derrière elles, les troncs couturés de deux plantes me barrent l'horizon, et la peinture au ciel s'écaille.

Tout à coup, une grêle jaune, irritante et drue, me dérobe le jour, tandis qu'un rugissement s'élève du groupe des enfants. Assise près de la table, j'entends mon pouls battre lourdement au cadran de l'horloge ; en contrepoint, une goutte d'eau ricoche sur l'évier émaillé. Je renais peu à peu. Goutte à goutte. Grain à grain ? Grain à grain, ma mère ôte le sable de mes yeux, à l'aide d'un papier fin, translucide, un papier-cigarette, je crois.

le vois désormais

D'abord ses mains dont je connais par cœur le paysage.

Puis, ce coq farouche ergotant sur un couvercle de boîte dérisoire.

Au loin, les bâtiments blancs de la cité, les draps qui claquent aux balcons.

La haine séculaire qui vieillit les visages d'enfants, empoisonne leurs bouches, il me semble la voir, elle aussi.

Et tant d'autres choses encore. Au fond, il ne me reste qu'une question, lancinante.

- Qu'est-ce que c'est, qu'est-ce que c'est que cela peut bien être. une mulâtresse ?

Sylvie KANDÉ, *Lagons, Lagunes*, Gallimard, Paris, 2000.

Vous ferrez un commentaire composé du texte de Sylvie KANDÉ. Vous pourriez par exemple montrer la manière dont la narratrice ressent sa condition de mulâtresse.

Sujet N°3 : Dissertation

Que pensez-vous de cette affirmation de l'écrivain André Chéhid ?

« L'écriture est à la fois lieu de l'enracinement et du déracinement ».