MATHÉMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 3h

Cette épreuve comporte 4 pages numérotées 1/4 ; 2/4 ; 3/4 et 4/4.
Une réponse fausse enlève 0,5 point, une question non traitée compte 0 point et une bonne réponse donne 1 point.

Exercice 1

I. Pour chacun des énoncés ci-dessous les informations A, B, C et D permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie. Écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de l'information qui donne l'affirmation vraie.

1. Toute suite croissante et majorée par un réel M … A) converge ; B) converge vers le réel M ; C) diverge vers $+\infty$; D) diverge par absence de limite.	**4**. Dans le plan complexe, on considère les points E et F d'affixes respectives : $Z_E = 3+2i$ et $Z_F = -1-2i$. G est l'image du point E par la similitude directe de centre F, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$. K est l'image de E par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$ alors… A) $Z_E + Z_G + Z_K = Z_F$; B) $Z_E + Z_F = Z_G$; C) $Z_K + Z_G = 6i$; D) $Z_E + Z_F = 2Z_G$.
2. La loi suivie par une variable aléatoire qui compte le nombre de succès (de probabilité p) dans un schéma de Bernoulli (de n répétition) est … A) la loi Binomiale de paramètre p ; B) la loi Binomiale de paramètres n et p ; C) la loi de Bernoulli de paramètre p ; D) la loi de Bernoulli de paramètre n et p.	
3. Les points $R(1+3i)$, $S(-2-3i)$ et $T(-1-i)$ du plan complexe muni d'un repère orthonormal sont … A) les sommets d'un triangle équilatéral ; B) les sommets d'un triangle rectangle ; C) les sommets d'un triangle isocèle ; D) alignés.	**5**. u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle K, la fonction dérivée de la fonction $u \times v$ est … A) $u' \times v'$; B) $u' \times v + u \times v'$; C) $u' \times v - u \times v'$; D) $u' + v'$.
6. Le système d'inéquations : $\begin{cases} 4x + 5y \leq 20 \\ -4x + 5y \leq 9 \\ x + 3y \geq 2 \end{cases}$ où x, y sont des entiers naturels, … A) n'a pas de solution ; B) n'a qu'un seul couple solution ; C) admet le couple $(2;1)$ comme une solution ; D) a pour solutions, tous les points du plan.	

7. L'équation $ln(2x + 3) + ln(x - 1) = In(3x + 1)$ a pour ensemble solution …
A) {-1 ; 2} ; B) {2} ; C) $\emptyset$; D) {1 ; 2}.

8. On considère la suite u définie par :
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4 + u_n \end{cases}$,
la somme ($u_1 + u_2 + ... + u_{20}$) est égale à …
A) 880 ; B) 820 ; C) 860 ; D) 1760.

9. Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}4$.
La valeur de $P(A \cap B)$ est …
A) 0,24 ; B) 1,0 ; C) 0,2 ; D) 0,64.

10. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(5\ ;\ 0{,}2)$. Quelle est son espérance $E(X)$?
A) 0,2 ; B) 1 ; C) 5 ; D) 0,8.

11. Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors les évènements A et B sont dits …
A) Incompatibles ;
B) Équiprobables ;
C) Indépendants ;
D) Complémentaires.

12. Quelle est l'écriture complexe d'une similitude directe de centre $O(0\ ;0)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$?
$A)\ z' = 2z$; B) $z' = iz$; C) $z' = 2iz$;
D) $z' = z + 2i$.

13. Une similitude directe de rapport k multiplie les aires par …
$A)\ k$; B) $2k$; C) k^2 ; D) $\sqrt{k}$.

14. Le centre d'une similitude directe $z' = az + b\ (avec\ a \neq 1)$ a pour affixe …
$A)\ \frac{b}{1-a}$; B) $\frac{b}{a}$; C) $a + b$; D) $1 - b$.

15. La valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^2 dx$ est …
A) 1 ; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{3}$; D) $\frac{1}{4}$.

16. Si f est une fonction impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ est égale à …
$A)\ 2\int_0^a f(x)\,dx$; B) 0 ;
C) $f(a) - f(-a)$; D) a^2.

17. La formule de l'intégration par parties est …
A) $\int uv' = [uv] - \int u'v$;
B) $\int uv' = u'v'$;
C) $\int uv' = [u'v] - \int uv'$;
D) $\int uv' = uv$.

18. La forme trigonométrique de $z = 1 + i$ est …
$A)\ \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$;
B) $2(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2})$;
C) $cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}$;
D) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

19. Le conjugué du nombre complexe $z = 3 - 4i$ est …
$A)\ -3 + 4i$; B) $3 + 4i$; C) $-3 - 4i$;
D) $4 - 3i$.

20. La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x}$ est…
$A)\ e^{2x}$; B) $2e^{2x}$; C) $2e^x$; D) xe^{2x}.

II. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$, g la fonction définie par $g(x) = \frac{lnx}{ln10}$ et h la fonction définie par : $h(x) = [\frac{x^2}{ln2} + \frac{2x}{(\ln2)^2} + \frac{2}{(\ln2)^3}] \times 2^{-x}$.

Écris, le numéro de chacun des énoncés ci-dessous, suivi de VRAI si l'énoncé est vrai ou de FAUX si l'énoncé est faux.

N°	Énoncés	N°	Énoncés
1.	$f'(x) = \frac{x(2-xln2)}{2^x}$	5.	$g(2x) = g(2) + g(x)$
2.	*sur* $[0\,;+\infty[$ *,f admet un minimum* α *lorsque* $x = \frac{2}{ln2}$	6.	$g(2^n) = ng(2)$
3.	$h'(x) = -x^2e^{-xln2}$	7.	$g(\frac{1}{2}) = \frac{-ln2}{ln10}$
4.	$(-h(x))' = f(x)$	8.	$g^{-1}(y) = 10^y$, g^{-1} *définie sur* $\mathbb{R}$ *est la réciproque de g.*

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,I;\,J).OI = 1cm.$

On note (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$.

Soit $f\,:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

1. Étudie les variations de f et trace (C). (*Chaque étape sera notée*)

2. Hachure le domaine dont l'aire $Q = \int_1^5 f(x)dx$ sur (C).

3. Étudie la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par : $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n}$ (sens de variation et convergence).

4. L'équation $(T)\,:\; f(x) = 1$ admet–elle une solution sur]0, +∞ [?

5. On considère la suite de nombre réels définie par : $W_{n+1} = W_n \times f(W_n)$.

On te rappelle que si la limite de la suite (W_n) existe alors les termes W_n *et* W_{n+1} admettent une même limite lorsque n tend vers infini.

En supposant que l'équation (T) admet une unique solution, montre que la limite de la suite (W_n) existe.

Exercice 3

I. Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple n=24 est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est 6 et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montre que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donne un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montre que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

II. Un nombre premier n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. La liste des nombres premiers est $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \ldots\}$.

On dit qu'un nombre entier n est abondant si la somme de ses diviseurs est supérieure ou égale à $2n$. Dans le cas contraire, on dit qu'il est déficient.

Par exemple, la somme des diviseurs de 12 est : $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$; on a $28 > 2 \times 12$, donc 12 est abondant.

On dit qu'un nombre entier est sphénique s'il est le produit de trois nombres premiers différents. Par exemple : $12 = 2 \times 2 \times 3$ n'est pas sphénique. $30 = 2 \times 3 \times 5$ est le plus petit entier sphénique.

1. a) 2014 est-il sphénique ? 2016 est-il sphénique ?

   b) Vérifie que 230 et 231 sont des entiers consécutifs sphéniques. Idem pour 1309, 1310 et 1311.

   c) Est-il possible de trouver quatre entiers consécutifs sphéniques ?

<u>Exercice 4</u> (uniquement pour la série C)

Un transporteur est chargé de transporter les supporteurs d'une équipe de football. Mais, il a oublié le nombre de supporteurs à transporter et n'arrive pas à contacter les dirigeants du club de football.
Néanmoins, il se rappelle que :

- Lorsqu'il utilise les cars de 19 places, tous les cars utilisés sont chargés ;
- Lorsqu'il utilise les cars de 23 places, tous les cars utilisés sont chargés sauf un seul qui a 12 places occupées ;
- Lorsqu'il utilise les cars de 17 places, tous les cars utilisés sont chargés ;
- Le nombre de supporteurs est compris entre 3000 et 4000.

Il voudrait bien utiliser ses cars de 50 places afin de minimiser ses charges en chauffeurs à payer et en carburant et te sollicite.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en mathématiques, détermine le nombre de supporteurs.

<u>Exercice 5</u> (uniquement pour la série D)

Madame AKA organise un jeu avec une urne contenant 4 boules vertes et 5 boules rouges.
Toutes ces boules sont indiscernables au toucher. Le jeu se déroule de la façon suivante :
Le joueur mise 1000 FCFA puis tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urnes.

- Le joueur reçoit 1000 FCFA par boule verte obtenue ;
- Le joueur paye 1000 FCFA par boule rouge obtenue.

Tous ceux qui veulent jouer, trouvent que le jeu n'est pas équitable et se retirent.
Madame AKA voudrait déterminer le nombre de boules vertes pour que le jeu soit équitable et te sollicite.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances en mathématiques, réponds à la préoccupation de Madame AKA.